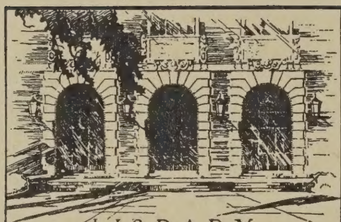


Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünfter Band,

In 4 Heften.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1830.

Inhaltsverzeichnifs
des fünften Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

Aufgaben und Lehrsätze.

1.

Über ein neues Coordinatensystem.

(Vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.)

Jeder besondern Art die Lage eines Punctes in Beziehung auf Puncte oder Linien, die als der Lage nach bekannt angesehen werden, zu bestimmen, entspricht ein Coordinatensystem. Die Gleichung einer Curve, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, ist als die algebraische Aussage einer, dieselbe characterisirenden Eigenschaft, aus der sich alle übrigen Eigenschaften derselben herleiten lassen, anzusehen. Was die Leichtigkeit dieser Herleitung betrifft, so kommt offenbar sehr viel auf die Wahl derjenigen Eigenschaft, welche an die Spitze der Untersuchung gestellt wird, und mithin auf die Wahl des Coordinatensystems an. Das gewöhnliche Coordinatensystem ist offenbar dasjenige, welches im Allgemeinen die gröfste Leichtigkeit darbietet. Der eine grofse Theil der Geometrie, der von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig ist *(géométrie de situation)* fliefst in diesem Systeme, eben weil er keine absolute Gröfsen-Bestimmung fordert, ohne alle Entwickelungen, unmittelbar aus der algebraischen Constitution der Gleichungen und einer allgemeinen Verbindung derselben. In diesem grofsen Felde der Untersuchung gewährt dasjenige Coordinatensystem, mit welchem wir uns in dem Folgenden beschäftigen werden, im Allgemeinen dieselben Vortheile, und hat überdies noch vor dem gewöhnlichen Coordinatensystem einige besondere Vorzüge. Hierher gehört unter Anderm auch, dafs wenn wir die drei Puncte, die ich Coordinatenpuncte genannt habe, auf dem Umfange der Curve irgend einer Ordnung annehmen, aus der allgemeinen Gleichung derselben sogleich drei Constanten ausfallen, während wir auf entsprechende Weise, in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, nur das constante Glied fortschaffen können. Hierhin rechne ich ferner, dafs für die Curven aller Ordnungen sich Gleichungen ergeben, die in Beziehung auf drei Veränderlichen (p,q,r) homogen sind; wonach die geometrische Interpretation des Theorems über die homogenen Functionen unmittelbar die Gleichung der Tangente und osculirender Curven für jeden gegebenen Punct der Curve liefert, u. s. w.

Die allgemeine analytische Methode und die Methode, die Herr Poncelet in seinem *„Traité des propriétés projectives“* entwickelt hat, beruhen auf der einen Seite auf ganz wesentlich verschiedenen Ideen, und stimmen doch, auf der andern Seite, so sehr in den Resultaten überein, dafs man, freilich sonderbar genug, die erste Methode als eine Periphrase, als ein Plagiat der zweiten hie und da betrachtet zu haben scheint; statt dafs man sich ruhig die Frage beantworten sollte: ob nicht ein nothwendiger Grund dieser Übereinstimmung vorhanden und wo derselbe zu suchen sei. Auch ich bin von dieser Übereinstimmung mehrmals überrascht worden: einige Beispiele hiervon bietet auch das Folgende dar. So scheint es mir z. B. bemerkenswerth, dafs wir in dem neuen Coordinatensystem ebenfalls auf jenen Satz hingeleitet werden, der in der Ponceletschen Methode eine grofse Rolle spielt, „dafs nemlich alle Puncte einer Ebene, die unendlich weit entfernt sind, in gerader Linie liegen,“ und wir überdies diese unendlich weit entfernte gerade Linie durch eine Gleichung zwischen endlichen Gröfsen darstellen können. Eben so stofsen wir in diesem System auf den andern Ponceletschen Satz, „dafs zwei concentrische Kreise in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact haben.“

Ich habe bei den folgenden Entwickelungen nur die Absicht gehabt, an Beispielen zu zeigen, dafs die neue Methode, einerseits, zum Beweise vorgelegter einzelner Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorieen sich sehr geschmeidig zeigt, und dafs sie, andrerseits, Resultate finden lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspuncten betrachtet. Mein Haupt-Augenmerk war nur auf die Methode, aber keineswegs darauf gerichtet, neue Sätze zu geben. Der am Ende dieses Aufsatzes aufgestellte Satz, den ich früher für den einfachsten Fall, dafs nur zwei Puncte gegeben sind, bemerkte, ergab sich in dem neuen Coordinatensysteme unmittelbar für drei gegebene Puncte, wonach es natürlich war, seine ganze Allgemeinheit zu vermuthen; und der Beweis des allgemeinen Satzes scheint sich in dem neuen Systeme unvergleichbar viel leichter zu ergeben, als in dem gewöhnlichen.

Mit Rücksicht auf das neue Coordinatensystem habe ich die analytische Theorie der Reciprocität *(théorie des polaires réciproques)* und deren so zu sagen unbegrenzte Erweiterung mehr angedeutet als ausgeführt.

Der gröfste Vortheil, der sich aus dem neuen Coordinatensysteme, besonders wenn wir demselben die gegen Ende dieses Aufsatzes angezeigte Allgemeinheit geben, ziehen läfst, betrifft wie mir scheint die mathe-

matischen Entwickelungen der Mechanik. Doch hierauf konnte ich natürlich hier gar keine Rücksicht nehmen.

Anfangs war es meine Absicht, mich auch auf die Construction des Raumes auszudehnen. Hier sind die analytischen Erörterungen den nächstfolgenden ganz analog, wenn wir statt des Coordinaten-Dreiecks ein Coordinaten-Tetraëder nehmen. Doch hat dieser Aufsatz ohnedies schon einen so grossen Umfang gewonnen, dafs ich hierauf verzichten mufs.

---

1. Es seien (Taf. I. Fig. 1.) OO', OO'' und $O'O''$ drei gerade Linien, die irgend ein beliebiges Dreieck bilden, und p, q und r die Abstände irgend eines beliebigen Punktes M von diesen drei geraden Linien. Wenn wir alsdann unsere Construction auf irgend ein gewöhnliches System geradliniger Coordinaten YAX beziehen, so sind bekanntlich die obigen Abstände p, q und r durch Ausdrücke gegeben, die in Beziehung auf die Coordinaten des Punctes M linear sind. Auch die Vorzeichen von p, q und r sind alsdann für eine bestimmte Lage des Punctes M vollkommen bestimmt, und diese Zeichen ändern sich, wenn der Punct M von einer Seite der bezüglichen Linien OO', OO'' und $O'O''$ auf die andere Seite hinüberrückt. Wir nehmen (vergl. meine analyt. geom. Entwicklungen No. 31.) für einen innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegenden Punkt M:

p positiv, q negativ, r negativ.

Nach diesen Bemerkungen stellt jede Gleichung zwischen p, q und r, die in Beziehung auf diese Gröfsen von irgend einem $m$ten Grade ist, eine Linie der $m$ten Ordnung dar, deren auf ein gewöhnliches Coordinatensystem bezogene Gleichung wir leicht erhalten können. Wir werden uns in dem Folgenden nur auf solche Gleichungen beschränken, die in Beziehung auf p, q und r homogen sind, also auf Gleichungen von folgender Form:

$$1.\quad Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-1}r + Dp^{m-2}p^2 + Ep^{m-2}qr + \cdots + Yqr^{m-1} + Zr^m = 0.$$

2. Wenn wir:

$$\frac{p}{q} = \varphi, \quad \frac{r}{p} = \psi$$

setzen, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung (1.) in folgende:

$$2.\quad A + B\varphi + C\psi + D\varphi^2 + E\varphi\psi + \cdots + Y\varphi\psi^{m-1} + Z\psi^m = 0,$$

mithin in eine vollständige Gleichung des $m$ten Grades zwischen φ und ψ. Für irgend einen beliebig angenommenen Punct M erhalten wir für φ und ψ bestimmte und einzige Werthe. Auch das Zeichen dieser Gröfsen ist alsdann ein bestimmtes; für den Punct M z. B., der innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks $OO'O''$ liegt, sind φ und ψ beide negativ.

Da die Gleichung (2.) eine vollständige des $m$ten Grades ist, und also eben so viele von einander unabhängige Constanten enthält, als die allgemeine Gleichung desselben Grades zwischen gewöhnlichen Coordinaten, so kann diese Gleichung, indem wir φ und ψ als veränderliche Gröfsen und die Coëfficienten A, B, C u. s. w. als beliebig zu bestimmende Constanten betrachten, alle möglichen Linien der $m$ten Ordnung darstellen.

3. Statt φ und ψ können wir auch:

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{p}{q}=\mu,\quad \frac{1}{\psi}=\frac{p}{r}=\nu,$$

als die beiden veränderlichen Gröfsen betrachten. Alsdann erhalten wir eine Gleichung, die eben so allgemein ist als die Gleichung (2.) und ebenfalls alle möglichen Linien $m$ter Ordnung darstellen kann. Diese Gleichung in μ und ν steigt im Allgemeinen zum $2m$ten Grade; kann aber in bestimmten Fällen, wie wir später sehen werden, auch unter den $m$ten Grad hinabsinken.

4. Wir können also φ und ψ, oder auch μ und ν, als Coordinaten ansehen, und demnach wollen wir O, O' und O'' den ersten, zweiten und dritten Coordinatenpunct, OO', OO'' und $O'O''$ die erste, zweite und dritte Coordinatenlinie, und endlich die Winkel $O''OO'$, $OO'O''$ und $OO''O'$ oder α, α' und α'' den ersten, zweiten und dritten Coordinatenwinkel nennen. In dem Folgenden werden wir dieselbe Bezeichnung beibehalten.

Nichts verhindert uns, zwei der drei Coordinatenlinien parallel anzunehmen. Alsdann liegt ein Coordinatenpunct unendlich weit, und ein Coordinatenwinkel ist Null.

5. Der Werth von φ oder μ ist derselbe für alle Puncte einer und derselben durch O gehenden geraden Linie, und eben so ist ψ und ν constant für alle Puncte einer durch O' gehenden geraden Linie. Es sind demnach

$$\varphi=\text{const.},\quad \mu=\text{const.},$$

Gleichungen einer durch O, und

$$\psi = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.},$$

Gleichungen einer durch O' gehenden geraden Linie. Während wir also in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme geometrische Örter durch den Durchschnitt zweier, den Coordinaten-Axen parallelen geraden Linien construiren, construiren wir in dem neuen Coordinatensysteme geometrische Örter durch den Durchschnitt zweier, durch zwei feste Puncte O und O' gehenden geraden Linien.

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den dritten Coordinatenpunct geht, hat folgende Form:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \text{const.}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \text{const.}$$

6. Irgend zwei gerade Linien, die durch folgende beiden Gleichungen

$$\varphi = c, \quad \varphi = -c,$$

oder auch durch folgende:

$$\mu = c', \quad \mu = -c',$$

indem wir durch c und c' constante Gröfsen bezeichnen, dargestellt werden, bilden mit den beiden Coordinatenlinien OO' und OO'' ein System von solchen vier geraden Linien, die man „Harmonicalen“ nennt.

7. Von solchen zwei geraden Linien, die durch folgende beiden Gleichungen:

$$\varphi = c, \quad \psi\left(=\frac{1}{\varphi}\right) = c,$$

in welchen wir durch c dieselbe beliebige Constante bezeichnen, dargestellt werden, bildet die eine mit OO' denselben Winkel als die andere mit OO''; von zweien geraden Linien

$$\psi = c', \quad \nu\left(=\frac{1}{\psi}\right) = c',$$

bildet eine denselben Winkel mit $O'O$, als die andere mit $O'O''$, und endlich von den beiden geraden Linien

$$\frac{\varphi}{\psi} = c'', \quad \frac{\mu}{\nu} = c'',$$

bildet eine mit $O''O$ denselben Winkel, als die andere mit $O''O'$.

8. Die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\varphi = c, \quad \psi = c'$$

geht, ist folgende:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{c}{c'}.$$

Eben so ist die Gleichung einer geraden Linie, die durch O'' und den Durchschnitt der beiden Linien

$$\mu = c, \quad \nu = c'$$

geht, folgende:

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{c}{c'}.$$

Nach der vorigen Nummer liegt hierin der Beweis von folgendem bekannten Satze:

Wenn man von irgend einem Puncte M in der Ebene eines Dreiecks, nach den Winkelpuncten desselben O, O' und O'' drei gerade Linien zieht, die mit den Seiten OO'', $O'O$ und $O''O'$ Winkel bilden, welche gleich β, β' und β'' sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche durch dieselben Winkelpuncte gehen, und dieselben Winkel, β, β' und β'' mit den Seiten OO', $O'O''$ und $O''O$ machen, durch ein- und denselben Punct N.

Dieser Satz schliefst als besondern Fall den Satz ein, dass diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, sich in demselben Puncte schneiden. In diesem Falle fallen die beiden Puncte M und N zusammen und sind der Mittelpunct eines, die drei Seiten des Dreiecks berührenden Kreises. Im Allgemeinen sind M und N die beiden Brennpuncte einer in das Dreieck beschriebenen Linie zweiter Ordnung.

9. Die allgemeine Gleichung der geraden Linie ist folgende:

$$p + aq + br = 0,$$

mit der die nachstehenden beiden Gleichungen identisch sind:

$$1 + a\varphi + b\psi = 0,$$
$$\mu\nu + a\nu + b\mu = 0.$$

Für diejenigen beiden Puncte Q und R (Fig. 2.), in welchen diese gerade Linie die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ schneidet, erhalten wir folgende:

$$\left(\varphi = 0, \psi = -\frac{1}{b}\right) \text{ und } \left(\varphi = -\frac{1}{a}, \psi = 0\right),$$

und mithin ergiebt sich für S, den Durchschnitt von OR und $O'Q$:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} = -a, \quad \nu = \frac{1}{\psi} = -b,$$

wodurch die beiden Constanten der obigen Gleichung bestimmt sind.

10. Wenn zwei lineare Gleichungen von folgender Form

$$mp + n(aq+br) = 0,$$
$$m'p+n'(aq+br) = 0,$$

wobei m, m', n und n' vier willkürliche Coëfficienten bezeichnen, gegeben sind, so erhalten wir durch eine einfache Verbindung dieser beiden Gleichungen folgende dritte:

$$p = 0.$$

Wir sehen hieraus, dafs, wenn wir m und n als unbestimmte Coëfficienten betrachten, alle einzelnen durch

$$mp+n(aq+br) = 0$$

dargestellten geraden Linien sich in einem festen Puncte von OO' schneiden. Auf ähnliche Weise schneiden sich alle durch die beiden Gleichungen

$$mq+n(p+br) = 0 \text{ und}$$
$$mr+n(p+aq) = 0$$

dargestellten geraden Linien in zwei festen Puncten von OO'' und $O'O''$.

11. Für zwei parallele gerade Linien OT und $O'T'$, die durch O und O' gehen und mit OO' irgend einen Winkel ω bilden, erhalten wir sogleich folgende beide Gleichungen:

$$p\sin(\alpha-\omega)+q\sin\omega = 0,$$
$$p\sin(\alpha'-\omega)-r\sin\omega = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben:

$$\cot\omega = -\frac{q-p\cos\alpha}{p\sin\alpha},$$

$$\cot\omega = \frac{r-p\cos\alpha'}{p\sin\alpha'}.$$

Setzen wir diese beiden Werthe für $\cot\omega$ gleich, entwickeln und berücksichtigen, dafs

$$\sin\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha'\cos\alpha = \sin(\alpha+\alpha') = \sin\alpha'',$$

so kommt:

$$3. \quad p\sin\alpha''-q\sin\alpha'-r\sin\alpha = 0,$$

oder:

$$4. \quad \varphi\sin\alpha'+\psi\sin\alpha = \sin\alpha''.$$

Wir wären gerade zu derselben Gleichung gekommen, wenn wir statt OT und $O'T'$ zwei andere durch O und O' gehende Parallelen genommen hätten,

die mit OO', statt ω, irgend einen andern Winkel bilden. Es stellen also die beiden letzten Gleichungen nur solche Puncte dar, die unendlich weit entfernt sind. Die lineare Form dieser Gleichung zeigt, dafs alle unendlich weit entfernten Puncte einer und derselben Ebene als in gerader Linie liegend zu betrachten sind*).

12. Nach der letzten Nummer ist offenbar, dafs wir durch Verbindung der Gleichungen irgend zweier parallelen geraden Linien zu den Gleichungen (3.) und (4.) kommen können. Wenn also

$$Ap = Bq + Cr$$

die Gleichung irgend einer gegebenen geraden Linie ist, so stellt, indem wir durch m irgend einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnen, folgende Gleichung:

$$(mA+\sin\alpha'')p = (mB+\sin\alpha')q+(mC+\sin\alpha)r$$

alle möglichen geraden Linien dar, die der gegebenen parallel sind.

Für die allgemeinen Gleichungen aller, den drei Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ parallelen geraden Linien, erhalten wir hiernach, indem m immer noch einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnet:

$$\begin{aligned} mp &= q\sin\alpha' + r\sin\alpha, \\ mq &= p\sin\alpha'' - r\sin\alpha, \\ mr &= p\sin\alpha'' - q\sin\alpha'. \end{aligned}$$

Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung.

13. Die allgemeine Gleichung der Linien dieser Ordnung sei folgende:

$$1. \quad Ap^2+2Bpq+2Cpr+Dq^2+2Eqr+Fr^2 = 0,$$

---

*) Denselben Satz leitet Herr Poncelet in seinem *Traité des propriétés projectives* aus der Theorie der Projection her.

„*Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement comme distribués sur une ligne droite unique, située elle même à l'infini sur ce plan.*“ (No. 107.)

Mir scheint es sehr bemerkenswerth, dafs dieser Satz sich in unserm neuen Coordinatensysteme direct ergiebt und wir zugleich durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Gröfsen und bestimmten Constanten jene (ideale) gerade Linie, die alle unendlich weit entfernten Puncte der Ebene enthält, darstellen können. Hr. Poncelet zieht aus jenem Satze wichtige Folgerungen: wir kommen unmittelbar zu denselben Folgerungen auf einem Wege, der gegen jeden Einwurf gesichert ist, indem wir auf die lineare Form der letzten Gleichung des Textes Rücksicht nehmen. Wir werden noch im Laufe dieses Aufsatzes hierauf zurückzukommen Veranlassung finden.

mit der, nach unserer Bezeichnung, folgende identisch sind:

$$2. \quad A+2B\varphi+2C\psi+D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2=0,$$

$$3. \quad A\mu^2\nu^2+2B\mu\nu^2+2C\mu^2\nu+D\nu^2+2E\mu\nu+F\mu^2=0.$$

Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs die Curve durch den Punct O gehe, so mufs die Gleichung (1.) befriedigt werden, wenn man zugleich $p=0$ und $q=0$ setzt, woraus ersichtlich ist, dafs alsdann $F=0$. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dafs $D=0$ wenn die Curve durch den Punct O', und dafs $A=0$, wenn sie durch den Punct A'' geht. In dem Falle also, dafs die Curve durch alle drei Puncte O, O' und O'' zugleich geht, erhalten wir statt (1.), (2.) und (3.) nun folgende Gleichungen:

$$4. \quad Bpq+Cpr+Eqr=0,$$

$$5. \quad B\varphi+C\psi+E\varphi\psi=0,$$

$$6. \quad Br+C\mu+E=0.$$

Die letzte dieser drei Gleichungen ist dadurch, dafs wir alle Glieder durch $\mu\nu$ dividirt haben, linear geworden. Wir können also jede Linie zweiter Ordnung durch eine Gleichung vom ersten Grade ausdrücken, wenn wir die drei Coordinatenpuncte auf dem Umfange derselben annehmen. Hiernach ergiebt sich auf die leichteste Weise die Discussion der Eigenschaften solcher Linien zweiter Ordnung, die durch dieselben drei Puncte gehen. Zwei solcher Linien können sich, was die lineare Form ihrer Gleichungen zeigt, nur noch in einem einzigen Puncte schneiden.

Da die Gleichung (6.) dieselbe Form hat, als die Gleichung der geraden Linie in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, so ist offenbar, dafs jedem Satze über die Durchschnitte von geraden Linien ein Satz über die vierten Durchschnitte von Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben drei Puncten schneiden, entspricht, und aus jeder analytischen Beweisführung eines jener Sätze ergiebt sich unmittelbar der Beweis des analogen Satzes, wenn wir den Constanten in der linearen Gleichung diejenige Bedeutung geben, welche sie in der Gleichung (6.) haben.

14. Indem wir

$$A+2B\varphi+2C\psi+D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2=0$$

für die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung nehmen und dieselbe differentiiren, kommt:

$$7. \quad (B+D\varphi+E\psi)d\varphi+(C+E\varphi+F\psi)d\psi=0.$$

Setzen wir nach einander $d\varphi=0$ und $d\psi=0$, so giebt diese Gleichung:

$$8.\quad C+E\varphi+F\psi = 0,$$
$$9.\quad B+D\varphi+E\psi = 0.$$

Die Gleichung $d\varphi = d\frac{q}{p} = 0$ giebt aber

$$\frac{p}{q} = \frac{dp}{dq} = \frac{p+dp}{q+dq},$$

und eben so giebt die Gleichung $d\psi = d\frac{r}{p} = 0$:

$$\frac{p}{r} = \frac{dp}{dr} = \frac{p+dp}{r+dr}.$$

Die vorletzte Gleichung zeigt, dafs wenn wir von einem Puncte der Curve, der zugleich auf der geraden Linie (8.) liegt, zu einem consecutiven Puncte der Curve fortgehen, die beiden Puncte mit dem Puncte O in gerader Linie liegen, oder mit andern Worten, dafs die Tangenten in den Durchschnitten der geraden Linie (8.) mit der Curve, durch den Punct O gehen, und also diese gerade Linie die Polare des Punctes O ist. Eben so ist (9.) die Polare des Punctes O', und für die Gleichung der Polaren des Punctes O'' erhalten wir, ohne weitere Rechnung, folgende:

$$10.\quad A+B\varphi+C\psi = 0.$$

Wir erhalten die Gleichungen (8.), (9.) und (10.) sogleich aus der Gleichung:

$$Ap^2+2Bpq+2Cpr+Dq^2+2Eqr+Fr^2 = 0;$$

denn bezeichnen wir den ersten Theil dieser Gleichung der Kürze halber durch u, so sind jene drei Gleichungen keine andern als:

$$\frac{du}{dr} = 0,\quad \frac{du}{dq} = 0,\quad \frac{du}{dp} = 0.$$

Indem wir die Durchschnitte der durch die Gleichungen (8.), (9.) und (10.) dargestellten geraden Linien mit den Coordinatenlinien betrachten, ergiebt sich eine einfache Bestimmung der Constanten in der allgemeinen Gleichung.

15. Den Gleichungen (4.) und (6.) der 13ten Nummer können wir folgende Form geben:

$$\alpha pq+\beta pr = \alpha\beta qr,$$
$$\alpha\nu+\beta\mu = \alpha\beta,$$

und wir erhalten alsdann, indem wir differentiiren, für die Polaren der Coordinaten-Puncte O, O' und O'', oder, was in diesem Falle dasselbe heifst, für die Tangenten in diesen drei Puncten, folgende Gleichungen:

$$\mu = \alpha,\quad \nu = \beta,\quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\alpha}{\beta};$$

so dafs also (Fig. 3.) für den Punct P'': $\mu=\alpha, \quad \nu=\beta$;

$\quad$ - - - P': $\mu=\alpha, \quad \nu=-\beta$;

$\quad$ - - - P $\quad \mu=-\alpha, \quad \nu=\beta$.

Hieraus ist zugleich ersichtlich, dafs die drei geraden Linien OP, $O'P'$ und $O''P''$ durch folgende drei Gleichungen dargestellt werden:

$$\mu=-\alpha, \quad \nu=-\beta, \quad \frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha}{\beta},$$

und also, wie bekannt, durch ein und denselben Punct Q gehen, dessen Coordinaten $\mu=-\alpha$ und $\nu=-\beta$ sind.

16. Um bei der Annahme eines beliebigen Coordinatendreiecks die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien $O''\omega''$, $O'\omega'$ und $O\omega$ zu erhalten, welche die Puncte O'', O' und O mit den Polen ω'', ω' und ω der gegenüberstehenden Coordinatenlinien OO', OO'' und $O'O''$ verbinden, brauchen wir nur **erstens** die Gleichung (8.) mit B und (9.) mit C, **zweitens** (8.) mit B und (10.) mit E, **drittens** (9.) mit C und (10.) mit E zu multipliciren und dann abzuziehen. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned}(BE-CD)\varphi+(BF+CE)\psi &= 0,\\ (BC-EA) \quad +(BF-CE)\psi &= 0,\\ (BC-EA) \quad -(BE-CD)\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Wenn wir irgend zwei dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so erhalten wir die dritte. Also:

Wenn in der Ebene irgend einer Linie zweiter Ordnung zwei Dreiecke sich befinden, von denen die Winkelpuncte des einen die Pole der Seiten des andern sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Winkelpuncte der beiden Dreiecke verbinden, durch ein- und denselben Punct, und also schneiden sich auch (nach dem Princip der Reciprocität) **die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in einer geraden Linie liegen, der Polaren jenes Durchschnittspunctes.**

Diese beiden Sätze können wir noch auf folgende Weise vervollständigen:

Diejenigen sechs übrigen geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte des einen Dreiecks mit den drei Winkelpuncten des andern Dreiecks verbinden, berühren eine und

dieselbe Linie zweiter Ordnung, und die sechs übrigen Durchschnitte der drei Seiten des einen und der drei Seiten des andern Dreiecks liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung*). Diese beiden Linien zweiter Ordnung sind *courbes polaires réciproques* in Beziehung auf die gegebene.

17. Tangenten-Theorie. Wir wollen wiederum folgende Gleichung:

$$A+2B\varphi+2C\psi+D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2 = 0$$

zu Grunde legen. Ist alsdann durch irgend einen Punct (ψ', φ') eine Tangente an die Curve gelegt, und bezeichnen wir den Berührungspunct durch (ψ'', φ''), so ist die Gleichung der Tangente:

$$\psi-\psi'' = \frac{\psi'-\psi''}{\varphi'-\varphi''}(\varphi-\varphi'').$$

Diese Gleichung mufs befriedigt werden wenn wir für die veränderlichen Gröfsen ψ und φ die Coordinaten des auf der Curve genommenen, consecutiven Punctes $(\psi''+d\psi'', \varphi''+d\varphi'')$ nehmen. Auf diese Weise kommt:

$$d\psi'' = \frac{\psi'-\psi''}{\varphi'-\varphi''}\,d\varphi''.$$

Wenn wir die Differential-Ausdrücke vermittelst folgender Gleichung (7.):

$$(B+D\varphi+E\psi)\,d\varphi+(C+E\varphi+F\psi)\,d\psi = 0$$

fortschaffen und zugleich auf folgende Gleichung:

$$A+2B\varphi''+2C\psi''+D\varphi''^2+2E\varphi''\psi''+F\psi''^2 = 0$$

Rücksicht nehmen, so erhalten wir endlich folgende, in Beziehung auf ψ'', φ'' und ψ', φ' symmetrische Gleichung:

$$11.\quad (C+E\varphi'+F\psi')\psi''+(B+D\varphi'+E\psi')\varphi''+C\psi'+D\varphi'+A = 0,$$

welche, wenn wir φ' und ψ' als veränderlich betrachten, die Tangente im Puncte (ψ'', φ'') darstellt, und wenn wir ψ'' und φ'' als veränderlich betrachten, die Polare des Punctes (ψ', φ').

---

*) Man hat nemlich folgende beiden Sätze, von denen einer aus dem andern nach dem Principe der Reciprocität folgt:

Wenn von den neun Durchschnitten zweier Systeme von drei geraden Linien drei in geraden Linien liegen, so liegen die übrigen sechs auf dem Umfange einer und derselben Linie zweiter Ordnung. (Entwickelungen S. 226.)

Wenn man zwei Systeme von drei Puncten durch neun gerade Linien verbindet, und drei dieser Linien durch denselben Punct gehen, so berühren die übrigen sechs ein und dieselbe Linie zweiter Ordnung.

Die Form der letzten Gleichung stimmt ganz mit der Form der entsprechenden Gleichung in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme überein. Diefs ergiebt sich leicht *a priori*. In dem Verlaufe dieses Aufsatzes werden wir noch eine elegantere Tangenten-Theorie entwickeln.

18. Wenn der Punct (ψ', φ') auf $O'O''$ liegt, so ist $\psi'=0$, und je weiter er sich auf dieser Linie entfernt, desto mehr nähert sich φ' dem Werthe $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$. Hiernach erhalten wir aus (11):

12. $(C\sin\alpha'+E\sin\alpha'')\psi+(B\sin\alpha'+D\sin\alpha'')\varphi+(A\sin\alpha'+B\sin\alpha'') = 0,$

für die Gleichung desjenigen Durchmessers, der alle mit $O'O''$ parallele Chorden halbirt. Eben so erhalten wir

13. $(C\sin\alpha+F\sin\alpha'')\psi+(B\sin\alpha+E\sin\alpha'')\varphi+(A\sin\alpha+C\sin\alpha'') = 0$

14. $(E\sin\alpha-F\sin\alpha')\psi+(D\sin\alpha-E\sin\alpha')\varphi+(B\sin\alpha-C\sin\alpha') = 0$

für die Gleichungen derjenigen beiden Durchmesser, die alle mit OO'' und OO' parallele Chorden halbiren.

Aus der Zusammenstellung irgend zweier der letzten drei Gleichungen erhalten wir die Coordinaten des Mittelpunctes der Curve. Wenn dieser Punct mit dem Punct O'' zusammenfallen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{C}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha'} = -\frac{A}{\sin\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn O' und O der Mittelpunct der Curve sein sollen:

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{E}{\sin\alpha'} = -\frac{C}{\sin\alpha''},$$

$$\frac{E}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin\alpha'} = -\frac{B}{\sin\alpha''}.$$

Nach der 12ten Nummer ist es leicht, auszudrücken, dafs zwei der drei Coordinatenlinien zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind. So erhalten wir z. B. für den Fall, dafs $O''O$ und $O''O'$ zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{A\sin\alpha+C\sin\alpha''}{B\sin\alpha+E\sin\alpha''} = -\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}$$

und wenn wir entwickeln,

$$A\sin\alpha\sin\alpha'+B\sin\alpha\sin\alpha''+C\sin\alpha'\sin\alpha''+E\sin^2\alpha'' = 0.$$

Nach der eben angezogenen 12ten Nummer können wir auch ausdrücken, dafs irgend zwei der drei Durchmesser (12.) (13.) (14.) parallel

sind, und also zu der Bedingungs-Gleichung kommen, die Statt finden mufs wenn die allgemeine Gleichung eine Parabel darstellen soll.

19. Sei wiederum:

$$15. \quad Ap^2+2Bpq+2Cpr+Dq^2+2Eqr+Fr^2 = 0$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung. Soll die Curve die Coordinatenlinie OO' berühren, so mufs diese Gleichung, wenn wir $p=o$ setzen, für $\frac{q}{r}$ zwei gleiche Werthe geben. Diefs führt zu folgender Bedingungs-Gleichung:

$$E^2 = DF.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn die Coordinatenlinien OO'' und OO' berührt werden sollen, folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$C^2 = AF, \quad B^2 = AD.$$

Wenn alle drei Coordinatenlinien von der Curve berührt werden, und wir $A=1$ setzen, wodurch der Allgemeinheit kein Abbruch geschieht, so können wir der Gleichung (15.), indem wir zugleich durch p^2 dividiren, folgende Form geben:

$$16. \quad 1+2B\varphi+2C\psi+B^2\varphi^2-2BC\psi\varphi+C^2\psi^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf B, C und φ, ψ symmetrisch. Wir müssen das vorletzte Glied derselben mit dem Zeichen — nehmen, weil wir, wenn wir das entgegengesetzte Zeichen nehmen, der Gleichung folgende Form geben können:

$$(A+B\varphi+C\psi)^2 = 0.$$

Alsdann erhalten wir also statt der Curve (16.) ein System zweier zusammenfallender gerader Linien, was ganz der Anlage der letzten Entwickelungen gemäfs ist.

Wenn wir nach einander in der Gleichung der Curve $p=o$, $q=o$ und $r=o$ setzen, so kommt:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{B}{C}, \quad \psi = -\frac{1}{C}, \quad \varphi = -\frac{1}{B}$$

für die Gleichungen derjenigen drei geraden Linien, welche die drei Coordinatenpuncte O'', O' und O mit den Berührungen auf den gegenüberstehenden Seiten verbinden. Hiernach erhalten wir eine einfache Constanten-Bestimmung der Gleichung (16.).

20. Wenn die durch die Gleichung:

$$A+2B\varphi+2C\psi+D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2 = 0,$$

dargestellte Curve eine Hyperbel ist, und wir auf einem Zweige derselben uns einen Punct immer weiter fortgerückt denken, so nähern sich die Werthe von φ und ψ immer mehr einer bestimmten Grenze, ohne, im Allgemeinen, unendlich oder Null zu werden. Diese Grenzenwerthe bestimmen zwei durch O und O' gehende geraden Linien, die, je weiter jener Punct sich entfernt, sich dem Parallelismus mit der Asymptote jenes Hyperbelzweiges immer mehr nähern. Hiernach ergiebt sich, wenn wir den Winkel, welchen jene Asymptote mit OO' bildet, ω nennen, für jene Grenzwerthe:

$$17.\qquad \varphi = -\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\omega}, \quad \psi = \frac{\sin(\alpha'+\omega)}{\sin\omega}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung der Curve, so kommt:

$$17'.\quad A\sin^2\omega - 2B\sin\omega\sin(\alpha-\omega) + 2C\sin\omega\sin(\alpha'+\omega) + D\sin^2(\alpha-\omega) \\ + 2E\sin(\alpha-\omega)(\sin\alpha'+\omega) + F\sin^2(\alpha'+\omega) = c.$$

Wenn wir entwickeln, so erhalten wir eine in Beziehung auf $\operatorname{tang}\omega$ quadratische Gleichung. Die Wurzeln dieser Gleichung bestimmen die Richtung der beiden Asymptoten der Hyperbel, oder wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleich sind, die Richtung der Durchmesser der Parabel. Werden die Wurzeln imaginär, so stellt die vorstehende Gleichung eine Ellipse dar. Wir gehen in die Entwickelung dieser verschiedenen Beziehungen, die bei gehöriger Annahme des Coordinatendreiecks sich sehr vereinfacht, nicht weiter ein.

Wenn die letzte Gleichung (17.) für $\operatorname{tang}\omega$ gleiche und entgegengesetzte Werthe giebt, so ist OO' parallel einer Axe der Curve. Für diesen Fall erhalten wir, wenn wir überdiefs annehmen, dafs die Curve durch die drei Coordinatenpuncte geht, und also $A = D = F = 0$ setzen:

$$B\sin\alpha - C\sin\alpha' + E\sin(\alpha-\alpha') = 0.$$

21. Wenn die Coordinatenlinie $O'O''$ einer Asymptote parallel ist, so erhalten wir für die Grenzwerthe (17.):

$$\psi = 0, \quad \varphi = \frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'} = \varphi',$$

und hiernach folgende in Beziehung auf A, B und D lineare Bedingungs-Gleichung:

$$A + 2B\varphi' + D\varphi'^2 = 0.$$

Soll $O'O''$ überdiefs selbst Asymptote sein, so mufs die letzte Gleichung, aufgelöset in Beziehung auf φ', gleiche Wurzeln geben, wonach:

$$\frac{B}{A} = -\frac{1}{\varphi'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}, \quad \frac{D}{A} = \frac{1}{\varphi'^2} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha''}.$$

Auf ähnliche Weise kommt, wenn OO'' der andern Asymptote parallel ist und wir $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha} = \psi'$ setzen:

$$A + 2C\psi' + F\psi'^2 = 0,$$

und wenn OO'' selbst Asymptote sein soll:

$$\frac{C}{A} = -\frac{1}{\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''}, \quad \frac{F}{A} = \frac{1}{\psi'^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha''}.$$

Hiernach erhalten wir, wenn wir zugleich $A = 1$ setzen, für die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten OO'' und $O'O''$ sind:

$$1 - 2\frac{\varphi}{\varphi'} - 2\frac{\psi}{\psi'} + \frac{\varphi^2}{\varphi'^2} + 2E\varphi\psi + \frac{\psi^2}{\psi'^2} = 0,$$

oder:

$$\sin^2\alpha'' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + \varphi^2\sin^2\alpha' + 2E\varphi\psi + \psi^2\sin^2\alpha = 0.$$

In diesen beiden Gleichungen ist E der einzige unbestimmte Coëfficient, und wir erhalten alle möglichen Hyperbeln, deren Asymptoten-System durch die Gleichung:

$$\varphi\psi = 0,$$

dargestellt wird, indem wir E alle möglichen Werthe beilegen. Durch eine einfache Verbindung zweier solcher Gleichungen, oder durch Verbindung einer solchen Gleichung und der Gleichung des Asymptoten-Systems, kommen wir zu folgender Gleichung:

$$(\sin\alpha'' - \varphi\sin\alpha' - \psi\sin\alpha)^2 = 0,$$

d. h. zu der Gleichung des Systems zweier zusammenfallender, unendlich weit entfernter gerader Linien.

Mit derselben Gleichung lassen sich auch die Gleichungen zweier ähnlicher und concentrischer Ellipsen verbinden, für deren allgemeine Gleichung wir, bei gehöriger Coordinaten-Bestimmung, die folgende, in welcher M einen unbestimmten Coëfficienten bedeutet, nehmen können:

$$\sin^2\alpha'' - 2\varphi\sin\alpha'\sin\alpha'' - 2\psi\sin\alpha\sin\alpha'' + M\varphi^2\sin^2\alpha' + 2\varphi\psi\sin\alpha\sin\alpha' \\ + M\psi^2\sin^2\alpha = 0.$$

Und somit können wir mit H. Poncelet (*Traité des propriétés projectives* No. 130) sagen, dafs zwei ähnliche, concentrische Linien zweiter Ordnung in unendlicher Entfernung einen doppelten Contact haben, der reell oder ideal ist, je nachdem die beiden Curven Hyperbeln oder Ellipsen sind, und zugleich haben wir die Gleichung der unend-

lich weit entfernten Berührungs-Chorde. In der analytischen Behandlungsweise der Linien zweiter Ordnung ist dieser Satz von keiner besondern Wichtigkeit, weil wir alle allgemeinen Beziehungen sich doppelt berührender Linien dieser Ordnung unmittelbar erhalten, indem wir die Gleichungen zweier derselben durch allgemeine Symbole bezeichnen, und berücksichtigen, dafs solche zwei Gleichungen sich immer zu einer Gleichung, deren erster Theil das vollständige Quadrat eines linearen Ausdruckes ist, verbinden lassen. Der Satz gewinnt aber in der Methode des H. Poncelet eine besondere Bedeutung, weil derselbe, vermittelst dieses Satzes, die allgemeinen Beziehungen zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Ordnung zu einander, aus den Eigenschaften eines Systems zweier concentrischen Kreise herleitet.

22. Theorie der Osculation. Wenn die durch:

$$p^2+2Bpq+2Cpr+Dq^2+2Eqr+Fr^2 = 0$$

dargestellte Curve die Coordinatenlinie OO'' im Puncte O berühren soll, so mufs, wenn wir $q=0$ setzen, die Gleichung

$$p^2+2Cpr+Fr^2 = 0,$$

für p zwei gleiche und verschwindende Werthe geben, so dafs also

$$C=0, \quad F=0.$$

Die Gleichungen zweier solcher Curven, die OO'' im Puncte O berühren, seien hernach folgende:

$$p^2+2Bpq+Dq^2+2Eqr = 0,$$
$$p^2+2B'pq+D'q^2+2E'qr = 0.$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, und vernachläfsigen den gemeinschaftlichen Factor q, so kommt:

$$2(B-B')p+(D-D')q+2(E-E')r = 0:$$

für die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde beider Curven. Soll diese Chorde durch den Punct O gehen, und sollen also die beiden Curven eine dreipunctige Osculation haben, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$E = E'.$$

Soll in diesem Falle der Durchschnittspunct beider Curven in die Coordinatenlinie OO' fallen, so erhalten wir, neben der letzten Bedingungs-Gleichung, noch folgende:

$$D = D'.$$

Für eine vierpunctige Osculation, wo die gemeinschaftliche Chorde mit der gemeinschaftlichen Tangente, der Coordinatenlinie OO'', zusammenfällt, erhält man endlich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$E = E', \quad B = B'.$$

23. Für die Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung, die OO'' zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, erhalten wir, (21.) indem wir $\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha} - \psi'$ setzen, Gleichungen von folgender Form:

$$p^2 + 2Bpq + 2\frac{1}{\psi'}pr + Dq^2 + 2Eqr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0,$$

$$p^2 + 2B'pq + 2\frac{1}{\psi'}pr + D'q^2 + 2E'qr + \frac{1}{\psi'^2}r^2 = 0.$$

Wenn wir abziehen, und den gemeinschaftlichen Factor p vernachläfsigen, so kommt:

$$18. \quad 2(B-B')p + (D-D')q + 2(E-E')r = 0,$$

für die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche die zwei übrigen Durchschnitte der beiden Curven verbindet. Diese Chorde fällt mit der Asymptote OO'' zusammen, und die beiden Curven haben in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact, wenn

$$B = B', \quad E = E'.$$

Soll dieser Contact blofs ein dreipunctiger sein, so ist die durch (18.) dargestellte gerade Linie der Asymptote nur parallel, und es mufs also diese Gleichung befriedigt werden, wenn wir zugleich $q = 0$ und $\frac{r}{p} = \psi' = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}$ setzen, wonach wir folgende Bedingungs-Gleichung erhalten:

$$\frac{B-B'}{E-E'} = -\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}.$$

24. Alle möglichen Curven, welche die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in denselben vier Puncten schneiden, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$p^2 + 2Bpq + 2Cqr + Dq^2 + 2Eqr = Fr^2 = 0,$$

indem wir B, C, D und F als ein für alle Mal gegeben betrachten, und E nach einander alle möglichen Werthe beilegen. Eben so stellt dieselbe Gleichung alle möglichen Curven zweiter Ordnung dar, welche OO'' und OO' und dann $O'O''$ und $O'O$ in denselben vier Puncten schneiden, wenn wir

einmal blofs C, das andere Mal blofs B als unbestimmten Coëfficienten betrachten.

25. Eine Linie zweiter Ordnung, welche die beiden Coordinatenlinien $O''O$ und $O''O'$ in den Puncten O und O' berührt, hat folgende einfache Form:

$$p^2+2Eqr = 0.$$

26. Folgende Gleichung:

$$p^2+Dq^2+Fr^2 = 0$$

stellt eine Linie zweiter Ordnung dar, in Beziehung auf welche jede der drei Coordinatenlinien die Polare des gegenüberstehenden Coordinatenpunctes ist. (14.) Sind D und F beide positiv, so ist die Curve imaginär; sind D und F beide negativ und gleich, und nehmen wir überdiefs an, der Coordinatenwinkel bei O'' sei ein rechter, so stellt die Gleichung

$$p^2+D(q^2+r^2) = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, deren einer Brennpunct O'' und deren Brennpuncts-Polare (Directrix) OO' ist; und diese Linie ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $(-D)<1$, $(-D)=1$, $(-D)>1$.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich unmittelbar mehrere bekannte Sätze.

27. Wenn die Gleichung:

$$p^2+2Bpq+2Cpr+Dq^2+2Eqr+Fr^2 = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung darstellen soll, von welcher die Coordinatenlinien OO' und $O'O''$ berührt werden, so erhalten wir folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$E^2=DF, \quad B^2=D,$$

und mithin:

$$\frac{E}{B} = \pm\sqrt{[F]}.$$

Wenn dieselbe Curve überdiefs OO'' in zwei festen Puncten schneiden soll, so ist C und F constant. Da F constant ist, so ist es auch $\frac{E}{B}$ und mithin schneidet die Polare von O', die durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$B+D\varphi+E\psi = 0$$

die Coordinatenlinie OO'' in einem von zwei festen Puncten. In diesen beiden Puncten und in den Puncten O und O'' wird OO'' harmonisch getheilt. Hiernach erhalten wir folgenden bekannten Satz.

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung durch dieselben beiden Puncte gehen, und dieselben beiden geraden Linien berühren, so gehen die Berührungs-Chorden durch einen von zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Chorde aller Curven.

28. Wenn

$$A+2B\varphi+2C\psi+D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2 = 0$$

irgend eine Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt:

$$D\varphi^2+2E\varphi\psi+F\psi^2 = 0$$

das System derjenigen beiden geraden Linien dar, die vom Puncte O'' nach den Durchschnitten der Curve mit OO' gezogen werden können, mithin stellt die Gleichung:

$$19. \quad A+2B\varphi+2C\psi = 0$$

diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden übrigen Durchschnitte jenes Linien-Systems und der Curve geht.

Die durch (19.) dargestellte gerade Linie und die Polare des Punctes O''

$$A+B\varphi+C\psi = 0,$$

schneiden sich, nach der 10ten Nummer, auf der Coordinatenlinie OO'. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dafs das Coordinaten-Dreieck ein durchaus beliebiges ist, so liegt hierin die allgemeine Theorie der Pole und Polaren.

29. Für die Gleichungen derjenigen beiden geraden Linien, die zu den beiden Puncten O' und O'' in derselben Beziehung stehen, als die gerade Linie (19.) zu dem Puncte O'' steht, erhalten wir

$$2B+D\varphi+2E\psi = 0,$$
$$2C+2E\varphi+F\psi = 0.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen und die Gleichung (19.) mit den drei Gleichungen (8.), (9.) und (10.) vergleichen, so sehen wir, auch ohne die Beweis-Art der 16ten Nummer zu wiederholen, dafs die drei geraden Linien, welche die gegenüberstehenden Winkelpuncte des von den drei erstgenannten geraden Linien gebildeten Dreiecks und des Coordinaten-Dreiecks verbinden, durch ein und denselben Punct gehen, und also auch die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Wenn wir den besondern Fall betrachten, dafs die

drei Coordinatenpuncte auf der Linie zweiter Ordnung liegen, so erhalten wir den Satz vom umschriebenen Dreieck. (No. 15.)

30. Wenn wir, der Kürze wegen, durch

$$20. \quad A=0, \quad A'=0, \quad A''=0,$$

die Gleichungen irgend dreier Linien zweiter Ordnung (homogene Gleichungen des zweiten Grades zwischen p, q und r) bezeichnen, die durch zwei feste Puncte gehen, und wir durch diese beiden Puncte die Coordinatenlinie OO' legen, so können wir die Coëfficienten von q^2, qr und r^2 in den drei Gleichungen gleich nehmen, so dafs

$$A-A'=0, \quad A-A''=0, \quad A'-A''=0,$$

drei Gleichungen darstellen, die linear sind und von denen zwei die dritte bedingen. Hierin liegt der Beweis des bekannten, an Corollarien reichen Satzes:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche Chorde haben, so gehen die zweiten gemeinschaftlichen Chorden je zwei derselben durch einen constanten Punct.

Wenn wir durchaus keine besondere Coordinaten-Bestimmung machen, und die gemeinschaftliche Chorde der drei Curven (20.) durch die Gleichung $e=0$, die drei zweiten Chorden durch die Gleichungen $a''=0$, $a'=0$, $a=0$, und endlich durch m, m' und m'' unbestimmte Coëfficienten bezeichnen, so kommt offenbar, (ähnlich wie Analyt. geom. Entw. No. 383):

$$A-m''A'=c.a''=0, \quad A-m'A''=c.a', \quad A'-mA''=c.a=0,$$

und die Form dieser drei Gleichungen zeigt, dafs die drei zweiten Chorden durch denselben Punct gehen. Hierin liegt also ein anderer Beweis des vorstehenden Satzes, und überdiefs, wenn wir, als besondern Fall,

$$c=p\sin\alpha''-q\sin\alpha'-r\sin\alpha$$

setzen, die Theorie der Chordalen (*axes radicaux*) ähnlicher und ähnlich liegender Linien zweiter Ordnung.

31. Wir wollen beispielsweise, in Beziehung auf einige der in dem Vorstehenden vorkommenden Gleichungen, einen allgemeinen Satz über die Variation der Constanten, den ich bei einer andern Gelegenheit gegeben habe, construiren; und werden auf diese Weise zu verschiedenartigen speciellen Sätzen kommen*).

---

*) Der im Texte erwähnte Satz ist folgender. Es sei:

$$a. \quad \varphi(y, x, b, a) = 0$$

irgend eine algebraische oder transcendente Gleichung zwischen zweien veränderlichen

Wir haben in der 15ten Nummer für die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, die durch die drei Coordinatenpuncte geht, folgende gefunden: (Taf. I. Fig. 3.)

$$1. \quad \frac{\nu}{\beta}+\frac{\mu}{\alpha} = 1.$$

Bezeichnen wir irgend einen Punct dieser Curve durch (ν', μ'), so ist

$$\frac{\nu'}{\beta}+\frac{\mu'}{\alpha} = 1;$$

betrachten wir ferner in dieser Gleichung β und α als veränderlich und setzen $\beta=\nu$, $\alpha=\mu$, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$2. \quad \nu'\mu+\mu'\nu = \mu\nu,$$

die eine gerade Linie darstellt, welche, wie auch der Punct (ν', μ') auf der Curve (1.) fortrücken mag, immer durch den festen Punct $(\nu=\beta, \mu=\alpha)$ oder durch P'', den Durchschnitt der beiden Tangenten in den Coordinatenpuncten O und O' geht.

Die Construction der geraden Linie, (2.), die durch die beiden Puncte (ν', o) oder V, und (o, μ') oder W geht, giebt folgenden bekannten Satz:

Wenn man in eine Linie zweiter Ordnung, über einer und derselben Chorde, als Basis, mehrere Dreiecke beschreibt, so geht diejenige gerade Linie, welche die Durchschnitte der Schenkel je zweier solcher Dreiecke verbindet, durch einen festen Punct, den Pol der gemeinschaftlichen Basis aller Dreiecke.

Wir erhalten andere Constructionen desselben Satzes, wenn wir nicht β und α, sondern $(-\beta)$ und α oder β und $(-\alpha)$ für die veränderlichen Gröfsen nehmen, und statt (2.) die Gleichungen

---

Gröfsen y und x und beliebigen Constanten, von denen wir zwei durch b und a bezeichnet haben. Diese Gleichung stellt, wenn y und x auf irgend ein Coordinatensystem bezogen werden, eine Curve dar; bezeichnen wir irgend einen Punct dieser Curve durch (y', x') und betrachten die beiden Constanten als Coordinaten und veränderlich, so stellt die Gleichung:

$$b. \quad \varphi(y', x', y, x) = 0$$

eine neue Curve dar, die sich ändert, wenn der Punct (y', x') auf der gegebenen Curve fortrückt, aber dabei nicht aufhört, durch den festen Punct $(y=b, x=a)$ zu gehen. Wenn die Gleichung (*a.*) eine Constante nur im Quadrate enthält, so geht die Curve (*b.*) durch zwei feste Puncte; sie geht durch vier feste Puncte, wenn jene Gleichung nur die Quadrate der beiden Constanten enthält. Nichts verhindert uns in der ursprünglichen Gleichung b und a Null zu setzen.

$$\nu'\mu - \mu'\nu = 1, \quad -\nu'\mu + \mu'\nu - 1$$

construiren, welche solche gerade Linien darstellen, die durch die beiden festen Puncte ($\nu = -\beta$, $\mu = \alpha$) oder P', und ($\nu = \beta$, $\mu = -\alpha$) oder P, gehen. Wir erhalten aber einen andern Satz, wenn wir $(-\beta)$ und $(-\alpha)$ für die beiden veränderlichen Gröfsen nehmen und also folgende Gleichung:

$$\nu'\mu + \mu'\nu + \mu\nu = 0,$$

oder

$$p + \mu' q + \nu' r = 0,$$

construiren. Die durch diese Gleichungen dargestellte gerade Linie geht durch den festen Punct ($\nu = -\beta$, $\mu = -\alpha$) d. h. durch Q, den Kreuzungspunct derjenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte des umschriebenen Dreiecks $PP'P''$ mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten O, O' und O'' verbinden.

Wenn wir von irgend einem Puncte (μ', ν') gerade Linien nach den Winkelpuncten des Coordinaten-Dreiecks ziehen, so bestimmen die Durchschnitte derselben mit den Seiten dieses Dreiecks ein neues Dreieck UVW. Die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke schneiden sich in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, und diese gerade Linie wird durch (3.) dargestellt. Wenn der Punct (ν', μ') auf irgend einer, durch die Winkelpuncte des Dreiecks $OO'O''$ gehenden Linie zweiter Ordnung fortrückt, so dreht sich diese gerade Linie um einen festen Punct. (Dieser Satz ist von Herrn Steiner in einem frühern Hefte dieses Journals zur Beweisführung vorgelegt worden. Ich bemerke beiläufig, dafs bei dem analogen Satze im Raum, an die Stelle der beliebigen dem Dreieck umschriebenen, Linie zweiter Ordnung irgend eine Fläche dritter Ordnung tritt, in welcher die sechs Kanten eines Tetraëders liegen.)

32. Wenn wir in der Gleichung (1.) der vorigen Nummer nicht β und α, sondern $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\alpha}$ als veränderliche Gröfsen construiren, so erhalten wir, nach derselben Verfahrungs-Weise, nun nicht mehr gerade Linien, die durch denselben Punct gehen, sondern Linien zweiter Ordnung, die, aufser in den drei Coordinatenpuncten, sich noch in einem vierten festen Puncte schneiden. Die Bestimmung dieser Curven hat keine Schwierigkeit.

33. Wir können auch von der Gleichung (2.):

$$\nu'\mu + \mu'\nu = \mu\nu,$$

als der Gleichung einer gegebenen geraden Linie, ausgehen, und indem wir $(\pm\nu')$ und $(\pm\mu')$ als veränderlich betrachten und irgend einen Punct dieser Linie durch $(\beta,\ d)$ bezeichnen, zu der Gleichung einer Linie zweiter Ordnung:

$$\pm\frac{\nu}{\beta} \pm \frac{\mu}{\alpha} = 1$$

zurückgehen. Alle Linien dieser Ordnung, die wir auf diese Weise erhalten, indem der Punct $(\beta,\ \alpha)$ auf der gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch den festen Punct $(\pm\nu',\ \pm\mu')$. Wenn (Taf. I. Fig. 4.) MN die gegebene gerade Linie ist, und die Coordinatenlinien OO'' und $O'O''$ in den beiden Puncten Q und R schneidet, so ist S, der Durchschnitt von OR und $O'Q$, der feste Punct $(\nu',\ \mu')$.

Also:

Alle Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben drei Puncte gehen, und in diesen drei Puncten die Seiten eines veränderlichen Dreiecks berühren, in welchen einer der drei Winkelpuncte oder der Kreuzungspunct der von diesen Winkelpuncten nach den gegenüberliegenden Berührungen gezogenen, geraden Linien auf einer gegebenen geraden Linie fortrückt, gehen durch noch einen vierten festen Punct.

Wenn ein Winkelpunct auf einer geraden Linie fortrückt, so rücken offenbar auch die beiden übrigen Winkelpuncte und der Kreuzungspunct auf geraden Linien fort, und wenn der Kreuzungspunct auf gerader Linie fortrückt, so thut es auch jeder Winkelpunct.

Nach der Theorie der Reciprocität (*des polaires réciproques*) erhalten wir aus dem Vorstehenden folgenden Satz:

Wenn man in ein gegebenes Dreieck beliebig viele Linien zweiter Ordnung beschreibt, so entsprechen jeder derselben drei Berührungs-Chorden, welche die drei Dreiecksseiten in solchen drei Puncten schneiden, die in derselben geraden Linie liegen. Wenn irgend eine jener drei Berührungs-Chorden durch einen festen Punct geht, so thun es auch die beiden andern und jene letztgenannte gerade Linie: *alsdann berühren alle Curven, aufser den drei Dreiecksseiten, noch eine constante vierte gerade Linie.*

34. Für die Gleichung einer die drei Coordinatenlinien berührenden Linie zweiter Ordnung erhalten wir, nach der 19ten Nummer, folgende:

$$1.\quad 1-2A\varphi-2B\psi+A^2\varphi^2-2AB\varphi\psi+B^2\psi^2 = 0;$$

wenn der Kreuzungspunct der drei von den Coordinatenpuncten nach den gegenüberstehenden Berührungen gezogenen geraden Linien der Punct $\left(\psi=\frac{1}{B},\ \varphi=\frac{1}{A}\right)$ ist. Bezeichnen wir irgend einen Punct der Curve durch (ψ', φ'), so stellt die Gleichung:

$$2.\quad 1-2\varphi'\varphi-2\psi'\psi+\varphi'^2\varphi^2-2\varphi'\psi'\varphi\psi+\psi'^2\psi^2 = 0$$

neun die drei Coordinatenlinien berührende Linien zweiter Ordnung dar, die alle durch den festen Punct $(\psi=B,\ \varphi=A)$ gehen und für welche der veränderliche Kreuzungspunct $\left(\psi=\frac{1}{\psi'},\ \varphi=\frac{1}{\varphi'}\right)$ ist.

Die Beziehung der Curve (1.) zu jeder Curve (2.) ist eine gegenseitige. Der Kreuzungspunct der einen hat zu Coordinaten die reciproken Werthe der Coordinaten eines Punctes der andern. Sind daher irgend zwei Puncte der Curve (1.) gegeben, so erhalten wir zwei Curven (2.); diese beiden Curven schneiden sich im Allgemeinen in vier Puncten, und die reciproken Coordinaten-Werthe dieser vier Puncte bestimmen die vier Kreuzungspuncte derjenigen vier Linien zweiter Ordnung, welche, im Allgemeinen, die drei Coordinatenlinien berühren und durch die beiden gegebenen Puncte gehen. Die hierdurch angezeigte Construction einer Linie zweiter Ordnung, die drei gegebene gerade Linien berührt und durch zwei gegebene Puncte geht, läſst sich, nach bekannten Sätzen, auf elementarem Wege ausführen. —

35. Wenn wir durch die Gleichung:

$$1.\quad F(\psi, \varphi) = 0$$

irgend eine algebraische oder transcendente Curve darstellen, so erhalten wir die Gleichung einer zweiten Curve, wenn wir für ψ und φ ihre reciproken Werthe nehmen:

$$2.\quad F\left(\frac{1}{\psi},\ \frac{1}{\varphi}\right)=F(\nu, \mu)=0.$$

Die Beziehung der beiden Gleichungen zu einander ist eine gegenseitige. Im Allgemeinen ist, wenn die eine derselben algebraisch und von irgend einem $m$ten Grade ist, die andere vom $2m$ten Grade. Beide Curven sind

durch gleichviele Puncte bestimmt. Wenn eine derselben gegeben ist, so können wir so viele Puncte der andern construiren, als wir wollen. Wenn (1.) irgend eine gerade Linie darstellt, so stellt (2.) eine durch die drei Coordinatenpuncte gehende Linie zweiter Ordnung dar. Wenn daher, aufser diesen drei Coordinatenpuncten, noch irgend zwei Puncte dieser Linie gegeben sind, so können wir zwei Puncte jener geraden Linie und dann wiederum so viele Puncte der Linie zweiter Ordnung construiren, als wir wollen (Nr. 7.). Wenn (1.) eine durch einen Coordinatenpunct gehende gerade Linie darstellt, so stellt (2.) eine zweite solche gerade Linie dar. Wenn (1.) eine durch zwei Coordinatenpuncte gehende Linie zweiter Ordnung darstellt, so stellt (2.) ebenfalls eine solche Linie zweiter Ordnung dar, und diese beiden Linien können auch identisch dieselben sein.

Durch drei Tangenten und einen der beiden Brennpuncte ist eine Linie zweiter Ordnung vollkommen bestimmt. Läfst man diese Linie sich so ändern, dafs der eine Brennpunct die Curve (1.) beschreibt, so beschreibt der andere Brennpunct die Curve (2.) (Nr. 8.). In dem Falle der Parabel liegt ein Brennpunct unendlich weit; wir können also für (1.) nach der 11ten Nummer folgende Gleichung nehmen:

$$\varphi\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}+\psi\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = 1,$$

und erhalten alsdann für (2.):

$$\mu\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha''}+\nu\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = 1:$$

eine Gleichung, in der wir ohne Mühe die Gleichung des, um das Coordinaten-Dreieck beschriebenen Kreises erkennen.

Theorie der Reciprocität.*)

36. Die Theorie der Reciprocität**) ist unstreitig eine der schönsten und bedeutendsten Erweiterungen der Geometrie in neuester Zeit. In die Ehre ihrer ersten Erfindung theilen sich die H. H. Gergonne und Poncelet.

---

*) Um kein neues Wort einzuführen, werde ich diesen Ausdruck als die Uebertragung des Poncelet'schen *„théorie des polaires réciproques“* gebrauchen.

**) Aus der im Texte entwickelten analytischen Theorie der Reciprocität springt sogleich in die Augen, dafs sich jeder Satz, der sich auf gerade Linien bezieht, und zur *„géométrie de situation“* gehört, unmittelbar auf alle solche algebraische oder transcendente Curven, deren Gleichungen, bezogen auf irgend ein Coordinatensystem, in Beziehung auf zwei ihrer Constanten linear sind, übertragen und also unendlich vervielfältigen läfst. Da unsere Entwicklungen auf der Variation der Constanten beruhen, so erscheint, wie ich schon anderswo angedeutet habe, wenn wir noch einen

Ich meinerseits bin später auf einem sehr verschiedenen, rein analytischen Wege und ohne eine *conique directrice* zu Hülfe zu nehmen, zu demselben Ziele gekommen, und habe, was immer der unschätzbare Vortheil der analytischen Methode ist, gleich von Anfang an der Sache eine viel allgemeinere Seite abgewonnen. Eine Entwicklung der analytischen Theorie der Reciprocität habe ich bereits im August 1828 an den verdienstvollen Redacteur der Annalen nach Montpellier eingesandt: ich kann hier nur ein paar Andeutungen geben, die in speciellerer Beziehung zu dem neuen Coordinatensysteme stehen.

37. Es sei:

$$b\psi+a\varphi = 1$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den leicht zu construirenden Punct ($\psi = b$, $\varphi = a$) den Pol dieser Linie nennen. Es sei ferner (ψ', φ') irgend ein Punct der geraden Linie; alsdann stellt:

$$\psi'\psi+\varphi'\varphi = 1$$

irgend eine gerade Linie dar, die durch den Punct (b, a) geht und deren Pol, der obigen Definition gemäfs, der Punct (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch einen gegebenen Punct gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol jener Punct ist.

Auf diesen Satz läfst sich unmittelbar die ganze Theorie der *polaires réciproques* gründen. Wir verweilen nicht hierbei, weil, aufser der Definition und der Construction des Poles, hier Alles gerade so sich verhält, wie bei dem gewöhnlichen Coordinatensysteme, und wollen nur ein Beispiel von der Verallgemeinerung dieser Theorie geben.

38. Es sei:

$$1.\quad \frac{\psi}{b}+\frac{\varphi}{a} = 1$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Wir wollen den Punct ($\psi = b$, $\varphi = a$) den Pol der geraden Linie nennen. Es sei ferner:

$$\frac{B}{\psi}+\frac{A}{\varphi} = 1$$

die Gleichung irgend einer, durch die drei Coordinatenpuncte gehenden, Linie zweiter Ordnung. Wir wollen den Punct ($\psi = B$, $\varphi = A$) den Pol dieser Linie zweiter Ordnung nennen. Bezeichnet nun (ψ', φ') irgend einen Punct

---

Schritt weiter gehen, die Reciprocität insbesondere auch mit der Theorie der Abwickelung (*théorie des développées et développantes*) unter einem allgemeinen Gesichtspuncte.

der geraden Linie (1.), so stellt

$$2.\quad \frac{\psi'}{\psi}+\frac{\varphi'}{\varphi}=1$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die durch den Punct (b, a), d. h. durch den Pol von (1.) geht, und deren Pol, gegenseitig, der auf (1.) liegende Punct (ψ', φ') ist. Also:

Der geometrische Ort für die Pole aller Linien zweiter Ordnung, die aufser durch die drei Coordinatenpuncte, noch durch einen vierten festen Punct gehen, ist eine gerade Linie, deren Pol dieser vierte feste Punct ist, und, gegenseitig, der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, die durch denselben festen Punct gehen, ist eine Linie zweiter Ordnung, deren Pol dieser feste Punct ist.

Die Pole der Seiten eines gegebenen Sechsecks z. B. bestimmen ein neues Sechseck, dessen Seiten Bogen von Linien zweiter Ordnung sind, und die Winkelpuncte des gegebenen Sechsecks zu Polen haben. Wenn sich eine Linie zweiter Ordnung in das gegebene Sechseck beschreiben läfst, so schneiden sich diejenigen Linien zweiter Ordnung, deren Bogen die gegenüberliegenden Seiten des zweiten Sechsecks sind, in solchen drei Puncten, die mit den drei Coordinatenpuncten auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen. Wenn sich um das gegebene Sechseck eine Linie zweiter Ordnung beschreiben läfst, so schneiden sich diejenigen drei Linien zweiter Ordnung, welche durch die drei Coordinatenpuncte und die drei Paare von gegenüberliegenden Winkelpuncten des zweiten Sechsecks gehen, in demselben Puncte u. s. w.

39. Von der Vervielfältigung bekannter Sätze, worin eigentlich die Theorie der Reciprocität besteht, wollen wir ein einziges Beispiel geben: Wenn die gegenüberliegenden Winkelpuncte zweier Dreiecke auf drei, durch denselben Punct gehenden geraden Linien liegen, so schneiden sich, wie bekannt, die gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen. Diesem Satze entspricht, nach der vorigen Nummer, folgender:

Drei Linien zweiter Ordnung, welche durch irgend drei feste (Coordinaten-)Puncte gehen, schneiden sich, paarweise genommen, noch in drei Puncten: legt man durch jeden dieser Durchschnitte, durch die drei Coordinatenpuncte und irgend

einen vierten festen Punct drei neue Linien derselben Ordnung, so schneiden diese die drei gegebenen, aufser in den drei Coordinatenpuncten, noch in drei Puncten, und diese sechs Puncte liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung.

40. Wenn irgend eine Curve gegeben ist, so giebt es eine zweite Curve, welche alle durch drei feste Puncte (Coordinatenpuncte) gehende Linien zweiter Ordnung, deren Pole auf der ersten Curve liegen, umhüllt, und deren Puncte wiederum die Pole der Tangenten der zweiten Curve sind. Der Grad der ersten Curve zeigt an, wie viele Linien zweiter Ordnung sich im Allgemeinen, durch die drei Coordinatenpuncte und einen vierten beliebigen Punct legen lassen, die die zweite Curve berühren; die Zahl der Durchschnittspuncte der zweiten Curve mit einer durch die drei Coordinatenpuncte gehenden Linie zweiter Ordnung zeigt an, wie viele Tangenten sich im Allgemeinen an die erste Curve legen lassen.

Wenn die Gleichung der ersten Curve gegeben ist, so können wir leicht die Gleichung der zweiten Curve finden; und umgekehrt. Wenn etwa eine zweite Curve durch die Gleichung:

$$3.\quad \psi = F(\varphi)$$

gegeben ist, so erhalten wir die ihr zugehörige erste Curve, wenn wir zwischen der vorstehenden Gleichung (3.) und der Gleichung:

$$\frac{B}{\psi}+\frac{A}{\varphi} = 1,$$

und den beiden Differential-Gleichungen derselben:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = F'(\varphi),\quad \frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{B-\psi}{A-\varphi},$$

ψ, φ und $\frac{d\psi}{d\varphi}$ eliminiren und in der resultirenden Gleichung ψ und φ für B und A schreiben.

Wenn insbesondere die Gleichung (3.) eine gerade Linie darstellt, und demnach folgende Form hat:

$$b\psi+a\varphi = 1,$$

so erhalten wir für die gesuchte Curve eine Linie zweiter Ordnung. Hieraus ist, nach den Bemerkungen zu Anfang dieser Nummer, ersichtlich, dafs durch vier Puncte sich im Allgemeinen zwei Linien zweiter Ordnung legen lassen. Zugleich ergiebt sich dafs, da zwei Linien zweiter Ordnung sich

im Allgemeinen in vier Puncten schneiden, es eben so viel Linien zweiter Ordnung giebt, die durch drei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene gerade Linien berühren. Wir müssen hier aus Mangel an Raum abbrechen.

Coordinaten-Verwandlung.

41. Die Verwandlung der Coordinaten hat in dem neuen Systeme eine viel gröfsere Ausdehnung, als in dem gewöhnlichen Systeme. Da wir aber von derselben in diesem Aufsatze keinen Gebrauch machen, so beschränken wir uns auch hier nur auf einige Andeutungen.

Die Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf irgend drei Coordinatenpuncte, ist, in Beziehung auf ψ und φ, vom ersten Grade und bleibt es, wie wir auch die drei Coordinatenpuncte anders annehmen mögen. Hiernach ist, wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes in dem einem Systeme ψ und φ, und die Coordinaten desselben Punctes in dem andern Systeme Ψ und Φ nennen:

$$1.\quad \Psi = a+b\psi+c\varphi,$$

$$2.\quad \Phi = d+e\psi+f\varphi.$$

a, b, c, d, e und f sind Constante, die nach der bekannten Methode bestimmt werden müssen. Wir wollen Beispielsweise den speciellen Fall nehmen, dafs sich blofs (Fig. 5.) die eine Coordinatenlinie $O''O'$ um den Punct O'' bis $O''\Omega'$ dreht, und den Winkel $OO''\Omega'$ durch γ' bezeichnen, während wir den Winkel $OO''O'$ wie gewöhnlich γ nennen. Bei dieser Annahme ist offenbar

$$3.\quad \Phi = \varphi,$$

so dafs: $d=e=0$, $f=1$. Da für den Punct O'' zugleich Ψ, ψ und φ verschwindet, so ist auch $a=0$. Dividiren wir die Gleichung (1.) durch $\Phi=\varphi$, so kommt also

$$\frac{\Psi}{\Phi} = b\frac{\psi}{\varphi}+c.$$

Für $O''O'$ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = -\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma}, \quad \frac{\psi}{\varphi}=0,$$

und für $O''\Omega'$ folgende Gleichungen:

$$\frac{\Psi}{\Phi}=0, \quad \frac{\psi}{\varphi}=\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma'};$$

und mithin ergeben sich zur Bestimmung der Coëfficienten b und c aus (4.) folgende beiden Gleichungen:

$$-\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma} = c,$$

$$0 = b\,\frac{\sin(\gamma-\gamma')}{\sin\gamma'}+c.$$

Hiernach erhalten wir:

$$c = \frac{\sin(\gamma'-\gamma)}{\sin\gamma},\quad b = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma},$$

und endlich:

$$5.\quad \Psi\sin\gamma = \psi\sin\gamma'+\varphi\sin(\gamma'-\gamma).$$

Allgemeinere Coordinaten-Bestimmung.

42. Wir haben in dem Bisherigen nur drei gerade Linien als Coordinatenlinien genommen. Wir können deren aber auch beliebig viele nehmen. Die Abstände irgend eines Punctes von solchen festen Coordinatenlinien wollen wir durch $p, q, r, s, t \ldots$ bezeichnen. Alsdann stellt die Gleichung:

$$F(p, q, r, s, t, \ldots) = 0$$

irgend eine Curve dar, deren Ordnung durch den Grad dieser Gleichung angezeigt wird. Zwischen irgend dreien der verschiedenen Abstände findet eine lineare Beziehung Statt, und einen vierten Abstand können wir hiernach auch ohne constantes Glied durch drei gegebene auf lineare Weise ausdrücken, so dafs also, wenn wir durch a, b, c, a', b', c', u. s. w. Constante bezeichnen, die von der gegenseitigen Lage der Coordinatenlinien abhängen:

$$\begin{aligned} s &= ap+bq+cr \\ t &= a'p+b'q+c'r \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir wollen, wie bisher, auch in dem Folgenden annehmen, die Gleichung (1.) sei in Beziehung auf die verschiedenen Abstände $p, q, r, s, t \ldots$, homogen.

43. Wir wollen, der Kürze halber, irgend eine homogene Function des $m$ten Grades von $p, q, r, s, t, \ldots$ durch U bezeichnen. Alsdann ist nach dem bekannten Theorem über die homogenen Functionen:

$$1.\quad \frac{dU}{dp}p+\frac{dU}{dq}q+\frac{dU}{dr}r+\frac{dU}{ds}s+\frac{dU}{dt}t\ldots = mU.$$

Der erste Theil dieser Gleichung, gleich Null gesetzt:

$$2.\quad \frac{dU}{dp}p+\frac{dU}{dq}q+\frac{dU}{dr}r+\frac{dU}{ds}s+\frac{dU}{dt}t\ldots = 0$$

ist also die Gleichung der Curve selbst, die auch durch $U=0$ dargestellt

wird. Beziehen wir aber in dieser letzten Gleichung die partiellen Differential-Coëfficienten auf einen gegebenen Punct der Curve, für welchen $p=p'$, $q=q'$, $r=r'$, $s=s'$, $t=t'$ u. s. w., und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt die letzte Gleichung, die wir der Kürze halber, bei dieser Voraussetzung, folgendergestalt schreiben wollen:

$$3.\quad V = 0,$$

eine gerade Linie dar. Diese Gleichung geht durch den gegebenen Punct der Curve, denn die letzte Gleichung wird nach dem oben erwähnten Theorem befriedigt, wenn wir $p=p'$, $q=q'$ . . setzen. Noch mehr, differentiiren wir die Gleichung (3.) und die Gleichung der gegebenen Curve, so ergiebt sich:

$$dV = dU,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Gröfsen die besondern Werthe, p', q', r', s', t', . . . substituiren. Die durch die Gleichung (3.) dargestellte gerade Linie ist also eine Tangente der Curve in dem gegebenen Puncte.

Beschränken wir uns auf drei Coordinatenlinien, wie in dem Frühern, so erhalten wir hiernach für die Tangente in irgend einem gegebenen Puncte folgende Gleichung:

$$\frac{dU}{dp}p+\frac{dU}{dq}q+\frac{dU}{dr}r = 0,$$

wobei wir nach der Differentiation in den partiellen Differential-Coëfficienten für p, q und r diejenigen Werthe substituiren müssen, die sich auf den gegebenen Berührungspunct beziehen. Hiernach erhalten wir z. B., wenn die Gleichung der Curve vom zweiten Grade ist, sogleich die allgemeine Gleichung der 17ten Nummer.

44. Wir können weiter gehen. Es führt uns das Theorem über die homogenen Functionen nicht nur zu der eben entwickelten, gewifs sehr zierlichen Tangenten-Methode, sondern auch zu der Theorie des Contactes höherer Ordnung. Wir haben nehmlich nach diesem Theorem auch:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p^2+2\frac{d^2U}{dp\,dq}pq+\frac{d^2U}{dq^2}q^2+2\frac{d^2U}{dp\,dr}pr+2\frac{d^2U}{dq\,dr}qr+\frac{d^2U}{dr^2}r^2+ \\ 2\frac{d^2U}{dp\,ds}ps+\cdots = m(m-1)\,U.$$

Der erste Theil dieser Gleichung, gleich Null gesetzt, ist also die Glei-

chung der gegebenen Curve. Beziehen wir die partiellen Differential-Coëfficienten wiederum auf einen gegebenen Punct, dessen Coordinaten p', q', r', s', t', ... sind, und betrachten mithin dieselben als constant, so stellt, wenn wir, bei dieser Voraussetzung, den ersten Theil der letzten Gleichung durch W bezeichnen, die Gleichung:

$$4. \quad W = 0$$

eine Linie zweiter Ordnung dar, die aus denselben Gründen, als in der vorigen Nummer die Tangente, durch den gegebenen Punct geht. Da auch diese Gleichung homogen und überdies vom zweiten Grade ist, so erhalten wir für die Gleichung der Tangente an die bezügliche Curve:

$$\frac{dW}{dp}p + \frac{dW}{dq}q + \frac{dW}{dr}r + \frac{dW}{ds}s \ldots = 0,$$

wobei wir die partiellen Differential-Coëfficienten auf den Berührungspunct beziehen. Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung (2.). Da nemlich auch $\frac{dU}{dp}$ eine homogene Function und vom $(m-1)$ten Grade ist, so kommt:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p + \frac{d^2U}{dp\,dq}q + \frac{d^2U}{dp\,dr}r + \frac{d^2U}{dp\,ds}s + \cdots = (m-1)\frac{dU}{dp}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nichts Anderes als $\frac{1}{2}\cdot\frac{dW}{dp}$, so dafs also:

$$\frac{dW}{dp} = 2(m-1)\frac{dU}{dp}.$$

Auf ganz analoge Weise ist auch:

$$\frac{dW}{dq} = 2(m-1)\frac{dU}{dq},$$

$$\frac{dW}{dr} = 2(m-1)\frac{dU}{dr},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Die gegebene Curve hat also mit der durch die Gleichung (4.) dargestellten Linie zweiter Ordnung in dem gemeinschaftlichen Puncte eine gemeinschaftliche Tangente.

Wenn wir die Gleichung (4.) und die Gleichung der gegebenen Curve zweimal differentiiren, so kommt offenbar:

$$d^2W = 2d^2U,$$

wenn wir nach der Differentiation für die veränderlichen Gröfsen die Coordinaten des Berührungspunctes substituiren. Die durch die Gleichung (4.)

dargestellte Linie zweiter Ordnung hat also mit der gegebenen Curve in dem auf derselben gegebenen Punct einen Contact zweiter Ordnung.

45. Es ist leicht einzusehen, dafs wir für jeden beliebigen auf der gegebenen Curve gegebenen Punct unmittelbar, nicht nur die Gleichung der Tangente, sondern auch die Gleichungen osculirender Curven erhalten. Wenn der Grad der gegebenen Curve eine Zahl ist, so kommen wir, indem wir den Grad der Osculation immer steigern, endlich zu der Gleichung der gegebenen Curve selbst; wenn hingegen jener Grad ein Bruch ist, so kommen wir auf dem angezeigten Wege zu Gleichungen nach allen Ordnungen osculirender Curven.

Hier würde es uns zu weit führen, wenn wir in ausführliche Entwicklungen über das neue Coordinatensystem eingehen wollten. Um schliefslich noch ein Beispiel der Behandlungsweise zu geben, wähle ich den Beweis eines allgemeinen Satzes.

Charakteristische Eigenschaft der Curven aller Grade.

46. Wenn irgend eine Curve des $m$ten Grades und irgend ein Punct gegeben sind, so lassen sich, wie bekannt, im Allgemeinen, von dem gegebenen Puncte an die gegebene Curve $m(m-1)$ Tangenten legen, und alle $m(m-1)$ Berührungspuncte liegen auf einer Curve des $(m-1)$ten Grades. Diese Curve hat man die Polarcurve des gegebenen Punctes in Beziehung auf die gegebene Curve genannt (*courbe polaire du point par rapport à la courbe directrice proposée*).*) Wenn wir diese Benennung beibehalten, so haben wir folgenden Satz:

Wenn irgend eine Curve des $m$ten Grades und irgend n Puncte, die auch beliebig zusammenfallen können, gegeben sind, und wir construiren die Polarcurve des ersten gegebenen Punctes in Beziehung auf die gegebene Curve, construiren, in Beziehung auf diese zweite Curve, die Polarcurve des zweiten gegebenen Punctes, dann, in Beziehung auf diese dritte Curve, die Polarcurve des dritten Punctes und so fort, bis wir endlich zu einer Polarcurve des $n$ten Punctes, die vom $(m-n)$ten Grade sein wird, gelangen: so ist diese Curve identisch dieselbe, in welcher Ordnung wir auch die gegebenen Puncte mögen auf einander folgen lassen.

---

*) *Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques. Par M. Bobillier.* Gerg. Ann. XIX, p. 110.

Die Polarcurve der $(m-n)$ten Ordnung können wir also auf $\frac{n(n+1)}{1.2}$ verschiedene Arten construiren und erhalten zuvor n verschiedene Curven der $(m-n+1)$ten Ordnung, in Beziehung auf welche die Polarcurven der n gegebenen Puncte dieselbe Curve sind. Wenn z. B. $m = n+1$, so erhalten wir n Linien zweiter Ordnung, in Beziehung auf welche die Polaren der n gegebenen Puncte dieselbe gerade Linie sind.

Um den vorstehenden Satz zu beweisen, wollen wir der Kürze halber die Gleichung der gegebenen Curve $m$ten Grades, bezogen auf drei Coordinatenlinien, durch

$$U = 0$$

bezeichnen. Alsdann ist:

$$\frac{dU}{dp}p + \frac{dU}{dq}q + \frac{dU}{dr}r = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangente, wenn wir die partiellen Differential-Coëfficienten auf den Berührungspunct beziehen und p, q und r als veränderlich betrachten. Bezeichnen wir hingegen die Coordinaten irgend eines Punctes durch p', q', r', und betrachten $\frac{dU}{dp}$, $\frac{dU}{dq}$, $\frac{dU}{dr}$ als Functionen $(m-1)$ten Grades der veränderlichen Gröfsen p, q und r, so erhält man:

$$1. \quad \frac{dU}{dp}p' + \frac{dU}{dq}q' + \frac{dU}{dr}r' = 0,$$

für die Polarcurve des Punctes $(r', q', p',)$ in Beziehung auf die gegebene Curve. Nehmen wir nach einander für den Punct (r', q', p') die drei Coordinatenpuncte $(r', 0, 0)$, $(0, q', 0)$ und $(0, 0, p')$, so verwandelt sich die letzte Gleichung nach einander in folgende drei:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad \frac{dU}{dq} = 0, \quad \frac{dU}{dp} = 0:$$

in die Gleichungen dreier Curven $(m-1)$ten Grades, der Polarcurven des ersten, zweiten und dritten Coordinatenpunctes. Hiernach erhalten wir ferner für die Polarcurven des zweiten und ersten Coordinatenpunctes, in Beziehung auf die erste und zweite dieser drei Curven, folgende Gleichungen:

$$\frac{d^2U}{dr\,dq} = 0, \quad \frac{d^2U}{dq\,dr} = 0.$$

Die ersten Theile dieser beiden Gleichungen sind nach den Grundregeln der Differentiation der Gleichungen mit mehreren veränderlichen Gröfsen

identisch dieselben. Hierin liegt der Beweis des obigen Satzes für den Fall, dafs $n=2$. Indem wir je zwei der drei gegebenen Puncte zusammenstellen, erhalten wir also folgende drei Polarcurven $(m-2)$ter Ordnung:

$$\frac{d^2U}{dr\,dq}=0,\quad \frac{d^2U}{dr\,dp}=0,\quad \frac{d^2U}{dq\,dp}=0:$$

Für die drei Polarcurven des dritten, zweiten und ersten Coordinatenpunctes, in Beziehung auf die erste, zweite und dritte dieser drei Curven, erhalten wir ferner nach dem Vorstehenden sogleich:

$$\frac{d^3U}{dr\,dq\,dp}=0,\quad \frac{d^3U}{dr\,dp\,dq}=0,\quad \frac{d^3U}{dq\,dp\,dr}=0:$$

Gleichungen des $(m-3)$ten Grades, die alle drei identisch sind. Hierin liegt der Beweis unseres Satzes für den Fall, dafs $n=3$.

Um weiter zu gehen, wollen wir lieber wieder von der allgemeinen Gleichung (1.), die wir, der Kürze halber, $U'=0$ schreiben, ausgehen. In Beziehung auf die bezügliche Curve erhalten wir alsdann für die Polarcurve irgend eines zweiten Punctes (r'', q'', p'') folgende Gleichung:

$$\frac{dU'}{dp}p''+\frac{dU'}{dq}q''+\frac{dU'}{dr}r'' = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$\frac{d^2U}{dp^2}p'p''+\frac{d^2U}{dp\,dq}(p'q''+p''q')+\frac{d^2U}{dp\,dr}(p'r''+p''r')+\frac{d^2U}{dq^2}q'q''$$
$$+\frac{d^2U}{dq\,dr}(q'r''+q''r')+\frac{d^2U}{dr^2}r'r'' = 0.$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in Beziehung auf p', q', r' und p'', q'', r''. Bezeichnen wir dieselbe, der Kürze halber, durch $U''=0$, so kommt:

$$\frac{dU''}{dp}p'''+\frac{dU''}{dq}q'''+\frac{dU''}{dr}r''' = 0,$$

für die Gleichung der Polarcurve eines dritten Punctes (r''', q''', p'''). Entwickeln wir die letzte Gleichung, so kommen wir zu einer Gleichung, die in Beziehung auf die Coordinaten der drei Puncte symmetrisch ist; und, wenn wir auf diese Weise bis zu n Puncten fortschreiten, so erhalten wir offenbar eine Gleichung des $(m-n)$ten Grades, die in Beziehung auf die Coordinaten aller n Puncte symmetrisch ist. Hierin liegt der allgemeine Beweis unseres Satzes.

Dieser Satz läfst sich nach der Theorie der Reciprocität verdoppeln und dann auch auf den Raum übertragen.

2.

Einige stereometrische Sätze,

mit Bezug auf die Aufgaben Bd. II. Hft. 3. S. 292. No. 66.

(Vom Herrn Professor Dr. *Grunert* zu Brandenburg.)

1.

Die erste der beiden a. a. O. vorgelegten Aufgaben:

> „Wenn beliebige Puncte in einer und derselben Ebene, in beliebiger Zahl n, zu zweien durch gerade Linien, so verbunden werden, dafs sich die verbindenden Linien nicht schneiden, so soll man finden, auf wie vielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien verschieden, und welche die gröfste, welche die kleinste Zahl sei,“

gestattet folgende einfache Behandlung.

2.

Durch die angegebene Construction erhält man ein Netz von Dreiecken, welches von einem gewissen convexen Polygon eingeschlossen wird. Die Zahl der Spitzen dieses Polygons sei $= k$, die Zahl der innerhalb desselben liegenden Linien $= x$, die Zahl aller Linien $= l$, die Anzahl der Dreiecke $= d$, so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$x = \frac{3d-k}{2}, \quad d = \frac{2x+k}{3}.$$

Setzt man nun den rechten Winkel $= 1$, so ist die Summe der Winkel aller Dreiecke des Netzes

$$= \frac{2(2x+k)}{3}.$$

Da aber die Summe der Winkel am Umfange des einschliefsenden Polygons $= 2k-4$ ist, und um jeden der $n-k$ innern Puncte vier rechte Winkel liegen, so ist obige Summe auch

$$= 2k-4+4(n-k) = 4n-2k-4.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, so erhält man:

$$x = 3(n-1)-2k.$$

Es ist aber offenbar $l = x + k$, also:

$$1.\quad l = 3(n-1)-k,$$

und, wie leicht aus dem Obigen folgt:

$$2.\quad d = 2(n-1)-k,$$

woraus durch Subtraction:

$$3.\quad l-d = n-1,$$

d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der verbindenden geraden Linien und der Anzahl der Dreiecke ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der gegebenen Puncte.

Die gefundenen Formeln würden übrigens, wie leicht in die Augen fällt, auch gelten, wenn das einschliefsende Vieleck nicht gerade ein convexes wäre.

3.

l und d erhalten also ihre $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Werthe, wenn k seinen $\left\{\begin{matrix}\text{kleinsten}\\ \text{gröfsten}\end{matrix}\right\}$ Werth erhält. Offenbar ist aber Min. $k = 3$, Max. $k = n$. Also

$$4.\quad \text{Max. } l = 3(n-2),\quad \text{Min. } l = 2n-3,$$
$$5.\quad \text{Max. } d = 2n-5,\quad \text{Min. } d = n-2.$$

4.

Eliminirt man n aus (1.) und (2.), so erhält man:

$$6.\quad 2l-3d = k,$$

d. h. die Differenz zwischen der doppelten Anzahl der verbindenden Linien und der dreifachen Anzahl der entstandenen Dreiecke ist immer der Anzahl der Seiten des einschliefsenden Polygons gleich.

5.

Ist in einem von lauter Dreiecken eingeschlossenen Polyëder die Anzahl der Kanten $= K$, die Anzahl der Ecken $= E$, die Anzahl der Seitenflächen $= F$, so läfst sich eine Seitenfläche als einschliefsendes Polygon der übrigen betrachten, und man erhält aus (1.) und (2.) für $k = 3$:

$$7.\quad K = 3(E-2),\quad F = 2(E-2),$$

wobei zu bemerken, dafs man zu dem aus (2.) erhaltenen Ausdrucke für F noch 1 für das als einschliefsendes Polygon betrachtete Dreieck addiren mufs.

Diese Resultate werden durch den Euler'schen Satz, nach welchem

$$E+F = K+2$$

ist, bestätigt. Sind nemlich die Seitenflächen lauter Dreiecke, so ist offenbar:

$$K=\frac{3F}{2},\quad F=\frac{2K}{3};$$

$$E+F=\frac{3F}{2}+2,\quad E+\frac{2K}{3}=K+2;$$

$$F=2(E-2),\quad K=3(E-2),$$

wie vorher.

6.

Als Maafs eines körperlichen Winkels wollen wir, uns nun näher zu der zweiten a. a. O. vorgelegten Aufgabe wendend, das zwischen den ihn begränzenden Ebenen enthaltene Segment einer aus seiner Spitze als Mittelpunct mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kugelfläche betrachten, und der sphärische Octant soll die Einheit der körperlichen Winkel, der Kreisquadrant für denselben Radius die Einheit der ebenen Winkel sein.

In einem beliebigen Tetraëder bezeichne man die den körperlichen Winkeln A, B, C, D gegenüber liegenden Seitenflächen durch a, b, c, d, und die von je zwei Seitenflächen eingeschlossenen Flächenwinkel durch die beiden diesen Seitenflächen entsprechenden Buchstaben, in Parenthesen eingeschlossen, so hat man nach einem sehr bekannten Satze vom sphärischen Dreieck:

$$\begin{aligned} A &= (bc)+(bd)+(cd)-2, \\ B &= (ac)+(ad)+(cd)-2, \\ C &= (ab)+(ad)+(bd)-2, \\ D &= (ab)+(ac)+(bc)-2; \end{aligned}$$

$$A+B+C+D=2\{(ab)+(ac)+(ad)+(bc)+(bd)+(cd)\}-8$$

folglich, wenn man die Summe der körperlichen Winkel durch S, die Summe der Flächenwinkel durch Σ bezeichnet:

$$8.\quad S = 2\Sigma-8,$$

d. h. in jedem Tetraëder ist die Summe der körperlichen Winkel um 8 kleiner als die doppelte Summe der Flächenwinkel, oder gleich der doppelten um vier verminderten Summe der Flächenwinkel, Alles in den obigen Maafsen ausgedrückt.

7.

Eine beliebige Pyramide von α Seiten kann immer in $\alpha-2$ Tetraëder zerlegt werden. Für diese einzelnen Tetraëder ist in leicht zuver-

stehenden, den obigen ähnlichen Zeichen:

$$S_1 = 2\Sigma_1 - 8,$$
$$S_2 = 2\Sigma_2 - 8,$$
$$S_3 = 2\Sigma_3 - 8,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$S_{\alpha-2} = 2\Sigma_{\alpha-2} - 8;$$
$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{\alpha-2} = 2\{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots + \Sigma_{\alpha-2}\} - 8(\alpha-2).$$

Sind nun S, Σ die Summen der körperlichen- und Flächenwinkel der Pyramide, so ist offenbar:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{\alpha-2},$$

und, weil in der Grundfläche $\alpha - 3$ Diagonalen gezogen sind, an deren jeder zwei Flächenwinkel der Tetraëder liegen, welche Nebenwinkel von einander, und folglich zusammen $= 2$ sind:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots + \Sigma_{\alpha-2} - 2(\alpha-3),$$

woraus:

$$S = 2\{\Sigma + 2(\alpha-3)\} - 8(\alpha-2),$$
$$9. \quad S = 2\Sigma - 4(\alpha-1),$$

d. h. in jeder Pyramide ist die Summe der körperlichen Winkel gleich der doppelten Summe der Flächenwinkel, weniger der vierfachen um Eins verminderten Seitenzahl der Pyramide.

8.

Ein beliebiges Polyëder werde von *a* Dreiecken, *b* Vierecken, *c* Fünfecken, *d* Sechsecken, u. s. f. eingeschlossen. Innerhalb desselben nehme man einen beliebigen Punct an, und ziehe von demselben nach allen Ecken gerade Linien, so wird das Polyëder in *a* dreiseitige, *b* vierseitige, *c* fünfseitige, *d* sechsseitige, u. s. f. Pyramiden zerlegt. Bezeichnet man nun die Winkelsummen in allen *a* dreiseitigen, *b* vierseitigen, *c* fünfseitigen, *d* sechsseitigen, u. s. f. Pyramiden durch:

$$(S_3), \quad (S_4), \quad (S_5), \quad (S_6), \; \ldots .;$$
$$(\Sigma_3), \quad (\Sigma_4), \quad (\Sigma_5), \quad (\Sigma_6), \; \ldots .;$$

so ergiebt sich aus dem Bewiesenen leicht:

$$(S_3) = 2(\Sigma_3) - 4.2a,$$
$$(S_4) = 2(\Sigma_4) - 4.3b,$$
$$(S_5) = 2(\Sigma_5) - 4.4c,$$
$$(S_6) = 2(\Sigma_6) - 4.5d,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)+\cdots$$
$$= 2\{(\Sigma_3)+(\Sigma_4)+(\Sigma_5)+(\Sigma_6)+\cdots\}-4(2a+3b+4c+5d+\cdots).$$

Sind aber S, Σ die Winkelsummen des Polyëders, E die Anzahl seiner Ecken, folglich auch die Anzahl der von dem innerhalb angenommenen Puncte an die Ecken gezogenen geraden Linien, um deren jede 4 rechte Winkel liegen; so erhellet leicht, dafs

$$S = (S_3)+(S_4)+(S_5)+(S_6)+\cdots-8,$$
$$\Sigma = (\Sigma_3)+(\Sigma_4)+(\Sigma_5)+(\Sigma_6)+\cdots-4E.$$

Also

$$S+8 = 2\{\Sigma+4E\}-4(2a+3b+4c+5d+\cdots),$$
$$S = 2\Sigma-4(2a+3b+4c+5d+\cdots-2E+2).$$

Nach einer bekannten Folgerung aus dem Euler'schen Satze (Crelle's „Lehrbuch der Elemente der Geometrie. II. Berlin 1826. §. 546. 4.") ist aber

$$2E = 4+a+2b+3c+4d+5e+\cdots$$

Also

$$S = 2\Sigma-4\left\{\begin{array}{l} 2a+3b+4c+5d+\cdots+2 \\ -a-2b-3c-4d-\cdots-4 \end{array}\right\}$$
$$= 2\Sigma-4(a+b+c+d+\cdots-2).$$

Die Anzahl der Seitenflächen, welche wir durch F bezeichnen wollen, ist aber offenbar $=a+b+c+d+\cdots$, und folglich:

$$10.\quad S = 2\Sigma-4(F-2),$$

d. h. in jedem Polyëder ist die Summe der körperlichen Winkel gleich der doppelten Summe der Flächenwinkel, weniger der vierfachen um 2 verminderten Anzahl der Seitenflächen.

Für die αseitige Pyramide ist $F=\alpha+1$, woraus $S=2\Sigma-4(\alpha-1)$, ganz wie oben (7.).

Man kann die Gleichung auch so schreiben:

$$11.\quad 2\Sigma-S = 4(F-2),$$

und es ist folglich, da immer $F>2$ ist, in jedem Polyëder:

$$12.\quad 2\Sigma>S,\quad \Sigma>\tfrac{1}{2}S.$$

Auch erhellet aus (11.), dafs $2\Sigma-S$ immer eine durch 4 theilbare ganze Zahl ist.

9.

Nach dem Euler'schen Satze ist $F-2=K-E$. Also auch

$$13.\quad 2\Sigma-S = 4(K-E),$$

so dafs also in jedem Polyëder der Unterschied zwischen der doppelten Summe der Flächenwinkel und einfachen Summe der körperlichen Winkel dem vierfachen Unterschiede der Kanten und Ecken gleich ist.

Ist das Polyëder von lauter α Ecken eingeschlossen, so ist $K=\frac{\alpha F}{2}$, woraus mittelst des Euler'schen Satzes sich leicht ergiebt:

$$14.\quad F-2=\frac{2(E-\alpha)}{\alpha-2},\quad S=2\Sigma-\frac{8(E-\alpha)}{\alpha-2}.$$

Also für $\alpha=3$, d. h. für Körper, welche von lauter Dreiecken begränzt sind:

$$15.\quad S = 2\Sigma-8(E-3).$$

10.

Ist das Polyëder regulär, so sei jeder Körperwinkel $= W$, jeder Flächenwinkel $= w$, so ist offenbar $S=EW$, $\Sigma=Kw$. Folglich nach (13.):

$$16.\quad 2Kw-EW=4(K-E)=4(F-2).$$

Also für das reguläre Tetraëder:

$$17.\quad 12w-4W=8,\quad 3w-W=2.$$

Für das Octaëder:

$$18.\quad 24w-6W=24,\quad 4w-W=4.$$

Für das Icosaëder:

$$19.\quad 60w-12W=72,\quad 5w-W=6.$$

Für das Hexaëder:

$$20.\quad 24w-8W=16,\quad 3w-W=2.$$

Für das Dodecaëder:

$$21.\quad 60w-20W=40,\quad 3w-W=2.$$

Das Tetraëder, Hexaëder und Dodecaëder haben also die gemeinschaftliche Eigenschaft, dafs $3w-W=2$, $3w=W+2$, d. h. dafs der dreifache Flächenwinkel dem um zwei vergröfserten körperlichen Winkel gleich ist.

11.

Bezeichnet $\mathfrak{S}$ die Summe aller ebenen Winkel der Seitenflächen des Polyëders, so ist (Crelle a. a. O. II. S. 679.):

$$\mathfrak{S}=4(E-2),\quad E=\tfrac{1}{4}\mathfrak{S}+2,$$

woraus sich mittelst (13.) leicht ergiebt:

$$22.\quad 2\Sigma+\mathfrak{S}-S=4(K-2);$$

folglich ist z. B. im Tetraëder, wo $K=6$ ist:

$$2\Sigma+\mathfrak{S}-S=16.$$

Ist das Polyëder von lauter α Ecken eingeschlossen, so ist $\mathfrak{S}=(2\alpha-4)F$, woraus mittelst (10.):

$$23.\quad S-2\Sigma+\frac{2\mathfrak{S}}{\alpha-2}=8,$$

folglich für von lauter Dreiecken eingeschlossene Körper:

$$S-2\Sigma+2\mathfrak{S}=8,\quad S-8=2(\Sigma-\mathfrak{S}).$$

12.

Erweitert man die Seitenflächen des Polyëders über die Ecken hinaus, so entsteht an jeder Ecke ein körperlicher Winkel, welcher als Scheitelwinkel dem entsprechenden innern Körperwinkel gleich ist. Jeder aufserhalb entstehende Körperwinkel hat eben so einen ihm gleichen Scheitelwinkel. Setzen wir die Summe der äufsern Körperwinkel $=S'$, so ist offenbar $2S'+2S=8E$, $S'+S=4E$; folglich nach (10.):

$$4E-S'=2\Sigma-4(F-2),$$

woraus leicht folgt:

$$24.\quad S'+2\Sigma=4(E+F)-8=4K,$$

d. h. in jedem Polyëder ist die Summe der äufsern Körperwinkel nebst der doppelten Summe der Flächenwinkel der vierfachen Anzahl der Kanten gleich, und also auch $S'+2\Sigma$ immer eine durch 4 theilbare ganze Zahl.

13.

Von diesen Sätzen läfst sich auf die zweite a. a. O. vorgelegte Aufgabe: „Beliebige Puncte im Raume, in beliebiger Zahl n, werden zu zweien durch geraden Linien, und zu dreien durch Ebenen immer so verbunden werden können, dafs sich die verbindenden Linien und Ebenen nicht schneiden. Es fragt sich, auf wie vielerlei Arten diese Verbindung möglich sei, ob die Zahl der verbindenden Linien und Ebenen verschieden, und welche die gröfste, und welche die kleinste Zahl sei,“ folgende Anwendung machen.

14.

Durch die angegebene Construction wird immer ein in mehrere Tetraëder zerlegtes convexes Polyëder erhalten. Die Anzahl seiner Ecken sei $=k$, die Anzahl der verbindenden Linien $=l$, die Anzahl der verbindenden Dreiecke $=d$, die Anzahl aller Tetraëder $=t$. Die Anzahl der auf der äufsern Oberfläche des Polyëders liegenden Linien und Dreiecke sei $=x$ und $=y$,

die Anzahl der innern Linien und Dreiecke aber $= x'$ und $= y'$, so ist offenbar

$$x + x' = l, \quad y + y' = d.$$

Da ferner jedes Tetraëder vier Dreiecke zu Seitenflächen hat, so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\frac{4t - y}{2} = y'.$$

Auch ist nach (7.)

$$x = 3k - 6, \quad y = 2k - 4.$$

Folglich

$$4t - 2k + 4 = 2y', \quad 2t - k + 2 = y' = d - 2k + 4,$$

$$25. \quad d - 2t = k - 2.$$

Ferner ist in den einzelnen Tetraëdern, wenn man sich einer ähnlichen Bezeichnung wie oben (8.) bedient:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\Sigma_1 - 8, \\ S_2 &= 2\Sigma_2 - 8, \\ S_3 &= 2\Sigma_3 - 8, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_t &= 2\Sigma_t - 8; \end{aligned}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_t = 2\{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots + \Sigma_t\} - 8t.$$

Da nun $n - k$ Puncte innerhalb des Polyëders liegen, und die Summe der körperlichen Winkel an jedem dieser innern Puncte $= 8$ ist, so erhellt sogleich, dafs, wenn S, Σ die Summen der Körper- und Flächenwinkel des Polyëders sind:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S = S + 8(n - k),$$

und eben so leicht, dafs

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots + \Sigma_t &= \Sigma + 4x' \\ &= \Sigma + 4(l - x) = \Sigma + 4(l - 3k + 6) \end{aligned}$$

ist. Folglich hat man:

$$S + 8(n - k) = 2\Sigma + 8(l - 3k + 6) - 8t.$$

Da aber die Anzahl der Seitenflächen $= y = 2k - 4$ ist, so ist nach (10.)

$$S = 2\Sigma - 4(2k - 6),$$

welches, für S in obige Gleichung gesetzt, nach einigen leichten Reductionen giebt:

$$26. \quad l - t = n + k - 3.$$

Eliminirt man t aus (25.) und (26.), so erhält man

$$27. \quad 2l - d = 2n + k - 4,$$

und, wenn man aus derselben Gleichung, oder auch aus den beiden letzten, k eliminirt:

28. $l+t-d = n-1$,

d. h. die Summe aller verbindenden Linien und Tetraëder weniger der Anzahl der Dreiecke ist immer um Eins kleiner als die Anzahl der gegebenen Puncte.

15.

Mittelst vorhergehender Analysis ergeben sich also nur zwei Gleichungen, [(25.) und (26.)], zwischen den drei Gröfsen l, d, t; und diese Gröfsen können folglich blofs durch n und k nicht bestimmt werden, vielmehr mufs immer noch eine dieser drei Gröfsen gegeben sein, wenn man die beiden andern finden soll. Da hier offenbar Min $k=4$, Max $k=n$ ist, so ergiebt sich aus den gefundenen Gleichungen leicht:

29. $\text{Max } (d-2t) = n-2, \quad \text{Min } (d-2t) = 2,$

30. $\text{Max } (l-t) = 2n-3, \quad \text{Min } (l-t) = n+1,$

31. $\text{Max } (2l-d) = 3n-4, \quad \text{Min } (2l-d) = 2n,$

und die $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Werthe dieser Differenzen treten ein, wenn die Anzahl der Ecken des einschliefsenden Polyëders am $\left\{\begin{matrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ ist.

Auch folgt hieraus leicht:

$$32.\quad \left\{\begin{matrix} \text{Max } (d-2t)-\text{Min } (d-2t) \\ = \text{Max } (l-t)-\text{Min } (l-t) \\ = \text{Max } (2l-d)-\text{Min } (2l-d) \end{matrix}\right\} = n-4,$$

so dafs also die Unterschiede zwischen diesen Maximis und Minimis alle einander gleich, nemlich alle $=n-4$ sind.

Eben so construirt man mittelst der gefundenen Formeln leicht folgende Tafel.

Wenn gegeben:	so ist die Gröfse	$\geqq$	$\leqq$
t	d	$2(t+1)$	$2t+n-2$
	l	$t+n+1$	$t+2n-3$
l	d	$2l-3n+4$	$2(l-n)$
	t	$l-2n+3$	$l-n-1$
d	t	$\frac{1}{2}(d-n+2)$	$\frac{1}{2}(d-2)$
	l	$\frac{1}{2}(d+2n)$	$\frac{1}{2}(d+3n-4)$

16.

Die Zahl der Puncte, in welchen 3, 4, 5, 6, u. s. f. verbindende Linien zusammenstofsen, sei a_1, b_1, c_1, d_1, u. s. w., so erhellet leicht, dafs

$$33.\quad l = \frac{3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \cdots}{2}$$

ist, woraus sich mittelst (26.) und (25.) leicht ergiebt:

$$34.\quad t = \frac{a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \cdots}{2} - k + 3,$$

$$35.\quad d = a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \cdots - k + 4,$$

so dafs also immer sowohl $3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \cdots$, als auch $a_1 + 2b_1 + 3c_1 + 4d_1 + \cdots$ eine gerade Zahl, und die Anzahl der Dreiecke gerade oder ungerade ist, je nachdem die Anzahl der Ecken des einschliefsenden Polyëders gerade oder ungerade ist.

Da

$$l = a_1 + 2b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 3e_1 + \cdots + \frac{a_1 + c_1 + e_1 + g_1 + \cdots}{2}$$

ist, so ist auch immer $a_1 + c_1 + e_1 + g_1 + \cdots$, d. i. die Gesammtzahl aller der Puncte, in welchen verbindende Linien in ungerader Anzahl zusammenstofsen, eine gerade Zahl.

17.

Bezeichnet man ferner durch a', b', c', d', u. s. w. die Zahl der Verbindungslinien, in denen 2, 3, 4, 5, u. s. w. Dreiecks-Ebenen zusammenstofsen, so erhellet leicht, dafs

$$36.\quad d = \frac{2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \cdots}{3},$$

also immer $2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \cdots$ eine durch 3 theilbare Zahl ist.

18.

Da

$$\begin{aligned} 2l &= 3a_1 + 4b_1 + 5c_1 + 6d_1 + \cdots, \\ 3d &= 2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \cdots, \\ 6l &= 9a_1 + 12b_1 + 15c_1 + 18d_1 + \cdots, \end{aligned}$$

ist, so erhält man nach (27.):

$$\begin{aligned} & 9a_1 + 12b_1 + 15c_1 + 18d_1 + \cdots \\ &= 2a' + 3b' + 4c' + 5d' + \cdots + 6n + 3k - 12 \\ &= 3a_1 + 6b_1 + 9c_1 + 12d_1 + \cdots + 6(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \cdots) \\ &= 3a_1 + 6b_1 + 9c_1 + 12d_1 + \cdots + 6n. \end{aligned}$$

Folglich ist immer

$$37.\quad \left.\begin{array}{l} 3(a_1+2b_1+3c_1+4d_1+\cdots) \\ -(2a'+3b'+4c'+5d'+\cdots) \end{array}\right\} = 3(k-4)$$

eine durch 3 theilbare Zahl.

19.

Da offenbar

$$\begin{aligned} l &= a'+b'+c'+d'+\cdots, \\ 6l &= 6a'+6b'+6c'+6d'+\cdots, \\ 3d &= 2a'+3b'+4c'+5d'+\cdots \end{aligned}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} 6l-3d &= 4a'+3b'+2c'+d'-f'-2g'-3h'-\cdots \\ &= 6n+3k-12 \;[\text{M. v. } (27.)]; \end{aligned}$$

folglich immer

$$38.\quad 4a'+3b'+2c'+d' = 6n+3k-12+f'+2g'+3h'+\cdots$$

oder auch:

$$39.\quad f'+2g'+3h'+4i'+\cdots = 4a'+3b'+2c'+d'-6n-3k+12.$$

20.

Aus dem Vorhergehenden hat man:

$$\begin{aligned} l &= \tfrac{3}{2}(a_1+b_1+c_1+d_1+\cdots)+\frac{b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\cdots}{2}, \\ d &= \tfrac{2}{3}(a'+b'+c'+d'+\cdots)+\frac{b'+2c'+3d'+4e'+\cdots}{3}; \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} l &> \tfrac{3}{2}n, & d &> \tfrac{2}{3}l, \\ &= \tfrac{3}{2}n+\lambda, & &= \tfrac{2}{3}l+\delta. \end{aligned}$$

Also

$$2l = 3n+2\lambda, \quad d = n+\tfrac{2}{3}\lambda+\delta;$$

$$2l-d = 2n+\tfrac{4}{3}\lambda-\delta = 2n+k-4 \;[\text{S. } (27.)];$$

$$40.\quad \tfrac{4}{3}\lambda-\delta = k-4, \quad 4\lambda-3\delta = 3(k-4).$$

Also ist $4\lambda-3\delta$ immer eine durch 3 theilbare Zahl, die, von n völlig unabhängig, blofs durch k bestimmt wird.

$$41.\quad \text{Min } (4\lambda-3\delta) = 0, \quad \text{Max } (4\lambda-3\delta) = 3(n-4).$$

Im Tetraëder ist $k=4$; also im Tetraëder immer $4\lambda = 3\delta$, oder $2(b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\cdots) = b'+2c'+3d'+4e'+\cdots$

Ueberhaupt ist immer

$$2(b_1+2c_1+3d_1+4e_1+\cdots)-(b'+2c'+3d'+4e'+\cdots) = 3(k-4),$$

$$42.\quad 2b_1-b'+2(2c_1-c')+3(d_1-d')+4(2e_1+e')+\cdots = 3(k-4)$$

auch immer eine durch 3 theilbare Zahl.

21.

Mittelst (25.), (26.), (27.), (40.) erhält man ohne Schwierigkeit:

$$43.\quad \begin{cases} l = \tfrac{3}{2}n + \lambda = \tfrac{3}{2}n + 3(\tfrac{1}{4}k - 1) + \tfrac{3}{4}\delta, \\ d = n - k + 4 + 2\lambda = n + 2(\tfrac{1}{4}k - 1) + \tfrac{3}{2}\delta, \\ t = n - k + 3 + \lambda = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4}k + \tfrac{3}{4}\delta. \end{cases}$$

22.

Zwischen den drei Gröfsen l, d, t haben wir die beiden Gleichungen:

$$d = 2l - 2n - k + 4, \quad t = l - n - k + 3 \ (27.\ 26.),$$

wodurch also diese Gröfsen nicht völlig bestimmt werden. Übrigens fällt leicht in die Augen, dafs die Lage der gegebenen Puncte im Raume so unendlich verschieden sein kann, dafs auch diese Gröfsen unendlich viele Werthe haben können. Die eine derselben mufs gegeben sein, wenn die Bestimmung der beiden andern möglich sein soll. Indessen erhellet aus obigen Gleichungen, dafs d, t am $\begin{Bmatrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{Bmatrix}$ werden, wenn l am $\begin{Bmatrix}\text{gröfsten}\\\text{kleinsten}\end{Bmatrix}$ und zugleich k am $\begin{Bmatrix}\text{kleinsten}\\\text{gröfsten}\end{Bmatrix}$ wird. Es wird aber offenbar l am kleinsten werden, wenn die gegebenen n Puncte eine solche Lage im Raume haben, dafs sie alle in einer Ebene liegen, und wenn sie ferner in dieser Ebene so liegen, dafs l ein Minimum in derselben wird. Nimmt man nun hierzu, dafs in diesem Falle offenbar $t=0$ ist, so erhält man nach (4.) und (5.):

$$44.\quad \text{Min } l = 2n - 3, \quad \text{Min } d = n - 2, \quad \text{Min } t = 0.$$

Setzt man in den obigen Gleichungen für d, t den gröfsten Werth von k, $= n$, und $l = 2n - 3$, so wird $d = 4n - 6 - 2n - n + 4 = n - 2$, $t = 2n - 3 - n - n + 3 = 0$, wie vorher.

23.

Auf der andern Seite erhellet eben so leicht, dafs n gegebene Puncte im Raume gewifs immer eine solche Lage gegen einander haben können, dafs wenn sie je zwei durch gerade Linien verbunden werden, diese geraden Linien sich nicht schneiden, wenn sie sich auch gegenseitig durchkreuzen können. Die Anzahl dieser Linien ist $= \tfrac{1}{2}n(n-1)$, und gröfser kann die Anzahl der verbindenden Linien nie werden.

24.

Es entsteht nun die Frage, ob, wenn n Puncte überhaupt zu zweien so verbunden sind, dafs die verbindenden Linien sich nicht schneiden, diese Puncte dann auch immer zu dreien durch sich nicht schneidende Ebenen verbunden werden können. Wir wollen einmal annehmen, dafs dies für jede $n-1$, durch sich nicht schneidende Linien zu zweien verbundene Puncte gelte, und man habe nun n Puncte, die ebenfalls durch sich nicht schneidende Linien zu zweien verbunden sind. Man denke sich einen dieser Puncte A, also auch alle von demselben ausgehende gerade Linien AB, AC, AD, AE u. s. w., hinweg, so sind die übrigbleibenden $n-1$ Puncte offenbar noch durch sich nicht schneidende gerade Linien zu zweien verbunden, und können folglich nach der Annahme auch durch sich nicht schneidende Ebenen zu dreien verbunden werden. Nun setze man A nebst den Linien AB, AC, AD, AE, u. s. f. wieder, und lasse von jenen Ebenen alle die hinweg, von welchen diese Linien geschnitten werden, so wird ein Polyëder zurückbleiben, dessen Oberfläche entweder einen concaven Theil hat, in welchem die Puncte B, C, D, E, u. s. f. liegen, oder aus welchem innerhalb gewissermafsen ein Polyëder, dessen Ecken dieselben Puncte sind und in dessen innerem Raume der Punct A liegt, herausgeschnitten ist. Legt man nun durch den Punct A und die sich nicht schneidenden Linien, welche die Puncte B, C, D, E, u. s. f. verbinden, Ebenen: so werden nun offenbar auch die im Raume gegebenen, durch sich nicht schneidende gerade Linien verbundenen n Puncte, durch sich nicht schneidende Ebenen zu dreien verbunden sein, so dafs also unser zu beweisender Satz für n Puncte gilt, wenn er für $n-1$ Puncte gilt. Für vier Puncte im Raume gilt er aber offenbar immer, und ist demnach allgemein. Für fünf Puncte A, B, C, D, E (Taf. I. Fig. 6.) sei z. B. die Zahl der sich nicht schneidenden verbindenden Linien $=10$, so sind die sich nicht schneidenden verbindenden Ebenen ABC, ABD, ABE, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE an der Zahl $=9$, wie es nach unsern Formeln auch sein mufs, da $d=2l-2n-k+4=2.10-2.5-5+4=9$.

25.

Da nun die möglichst gröfste Anzahl von $l=\frac{1}{2}n(n-1)$ war (23.), da diesen sich nicht schneidenden Verbindungslinien immer eine gewisse

Anzahl sich nicht schneidender Verbindungs-Ebenen (24.) und dadurch gebildeter Tetraëder entspricht, und da aus dem Maximo von l und Minimo von k das Maximum von d und t resultirt (22.), das Minimum von k aber offenbar $= 4$ ist, so ist nach (22.):

$$\text{Max}\, d = n(n-1) - 2n - 4 + 4,$$
$$\text{Max}\, t = \tfrac{1}{2}n(n-1) - n - 4 + 3,$$

woraus sich leicht ergiebt:

45. $\text{Max}\, l = \frac{1}{2}n(n-1)$, $\text{Max}\, d = n(n-3)$, $\text{Max}\, t = \frac{1}{2}n(n-3) - 1$.

Für $n = 5$ z. B. ist $\text{Max}\, l = 10$, $\text{Max}\, d = 10$, $\text{Max}\, t = 4$, und man findet diese Resultate leicht bestätigt, wenn man sich fünf Puncte denkt, von denen einer innerhalb des durch die vier andern gebildeten Tetraëders liegt.

3.

Allgemeine und vollständige Berechnung aller beim Gleichgewichte mit Rücksicht auf Zapfenreibung vorkommenden Bestimmungsstücke.

(Von dem Herrn Dr. *G. S. Ohm* zu Berlin.)

Schon vor längerer Zeit wurde ich durch eine äufsere Veranlassung bewogen, die Probleme der Zapfenreibung in einer gröfseren Ausführlichkeit zu behandeln, als diefs gewöhnlich zu geschehen pflegt; dadurch gelangte ich zu nachstehenden Resultaten, die mir einer öffentlichen Mittheilung nicht unwerth schienen. Die Behandlung solcher Aufgaben wird eine andere, je nachdem an der zu berechnenden Maschine Zapfen und Zapfenlager beide, oder nur die einen von beiden beweglich sind. Daher werde ich zunächst den Fall behandeln, wo die Zapfenlager unverrückbar fest angenommen werden, und erst später den andern Fall, wo, wie in der losen Rolle, nicht blofs die Zapfen, sondern auch die Zapfenlager als beweglich angesehen werden müssen, noch besonders berücksichtigen. Jedesmal aber ist zum leichten Überblick des Ganzen erforderlich, dafs ich in gedrängter Kürze einige allgemeine Eigenthümlichkeiten der Reibung der jedesmaligen Untersuchung voran gehen lasse.

1) Wenn ein beweglicher Körper A mit einem ebenen Theile seiner Oberfläche auf der ebenen Fläche eines andern Körpers B, den wir uns zunächst unbeweglich denken wollen, ruhet, und nun auf den beweglichen Körper A Kräfte einwirken, die sich auf 2 andere R und S zurückführen, von denen die erste R den Körper A in senkrechter Richtung gegen die Ebene, auf der er ruhet, antreibt, die zweite S aber den Körper A in einer mit der gedachten Ebene parallelen Richtung zu bewegen strebt, so müfste, wenn aufser den genannten Kräften keine andern zwischen beiden Körpern thätig wären, und die Kraft R in Folge des Widerstandes der Ebene, gegen welche sie gerichtet ist, nicht fähig wäre, den Körper A in Bewegung zu setzen, dieser Körper doch noch vermöge der Kraft S längs der Ebene, gegen die er angedrückt wird, hingleiten, und es müfste, um dieses Verschieben des Körpers A an dem

Körper B zu verhüten, jenem eine der S völlig gleiche und ihr gerade entgegengesetzt wirkende Kraft mitgetheilt werden. Die Erfahrung zeigt nun zwar, daſs der bewegliche Körper A durch eine der S gerade entgegengesetzte Kraft P in Ruhe erhalten wird, wenn $P=S$, zugleich aber auch, daſs diese Ruhe nicht jedesmal unterbrochen wird, sobald man die Kraft P kleiner oder gröſser als S nimmt, sondern nur dann, wenn diese Verminderung oder Vermehrung einen gewissen, dem Drucke R proportionalen Werth μR übersteigt. Das Gleichgewicht erhält sich nemlich in dem Körper A so lange, als die Kraft P ihrer Gröſse nach nicht über die beiden Grenzen $S-\mu R$ und $S+\mu R$ hinaus fällt. Dabei bleibt die Zahl μ stets dieselbe, wie auch die Kräfte R und S sich ändern mögen, wenn nur die an einander gepreſsten Ebenen der Körper A und B ihrer physischen Natur nach fortwährend dieselben bleiben; denn selbst die geometrische Form und Gröſse der an einander gedrückten Ebenen hat, wenn man von dem aus der Adhäsion der Theile hervorgehenden Widerstand absieht, auf den Werth von μ keinen Einfluſs. Aus dem Vorgebrachten erhellet sonach, daſs durch das Aneinanderdrücken zweier Körper eine Kraft an der Berührungsstelle beider erzeugt wird, die einer relativen Änderung dieser Berührungsstellen in der Richtung der Berührungs-Ebene nach allen Seiten hin in dem Maaſse, als sie dazu aufgefordert wird, bis zu einer gewissen Stärke sich zu widersetzen im Stande ist. Diese den Charakter eines Widerstandes besitzende Kraft nennen wir die Reibung, und die von der physischen Natur der an einander gedrückten Flächen abhängige Zahl μ, wodurch das Maximum μR der Reibung angezeigt wird, den Reibungscoëfficienten. Der Werth des Reibungscoëfficienten ist für jeden in der Anwendung vorkommenden Fall zunächst aus Beobachtungen abzuleiten; dann aber ist diese Zahl μ in jeder spätern Rechnung als eine völlig bekannte Zahl stets anzusehen.

2) Aufgabe 1. Eine horizontale Achse ruht mit ihren beiden Zapfen vom Halbmesser ϱ in festen Zapfenlagern, und es wirken, in einer senkrecht auf diese Achse gestellten Ebene, Kräfte P, P', P'', u. s. f., deren Richtungen mit einer zu dieser Ebene gehörigen Horizontallinie *)

*) Es fällt in die Augen, daſs statt der Horizontallinie jede andere Linie von unveränderlicher Richtung in der Ebene genommen werden könnte; aber die horizontale oder die verticale führt

respective die Winkel α, α', α'', u. s. f. bilden, und deren Entfernungen von der Umdrehungs-Achse beziehlich r, r', r'', u. s. f. sind; man soll die beim Gleichgewicht ohne Mitwirkung der Reibung vorhandenen Umstände angeben.

Auflösung. Nennt man S den Druck, welchen die beiden Zapfenlager zusammen gerechnet beim Gleichgewichte ohne Reibung zu ertragen haben (wobei es bekanntlich gestattet ist, sich diesen Druck bloſs in der Ebene, worin die Kräfte wirken, auf einen in der Verlängerung der wirklichen liegenden, aber dort nur gedachten Zapfen vorzustellen), und φ den Winkel, welchen die Richtung dieses Druckes mit der angezeigten Horizontallinie macht, so geben die bekanntesten Gesetze der Statik für die Auflösung obiger Aufgabe sogleich nachstehende Gleichungen:

$$(A.)\quad \begin{cases} 0 = Pr \pm P'r' \pm P''r'' \pm \ldots. \\ S\sin\varphi = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots. \\ S\cos\varphi = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots. \end{cases}$$

Von den doppelten Zeichen in der ersten Gleichung ist das obere zu nehmen, wenn die Kraft, zu welcher es gehört, die Ebene in demselben Sinne als die Kraft P zu drehen strebt; im Gegenfalle ist das untere Zeichen zu setzen. Aus der ersten dieser Gleichungen läſst sich eine der Gröſsen P, P', P'', ..., r, r', r'', ... durch alle übrigen bestimmen, und die zweite und dritte der obigen Gleichungen dienen dann dazu, die Gröſse des durch die Achse gehenden Druckes S sowohl, als den Winkel φ, unter welchem er gegen die Zapfenlager ausgeübt wird, zu bestimmen. Quadrirt und addirt man nemlich die beiden letzten der Gleichungen ($A.$), so findet man:

$$S^2 = (P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots.)^2 + (P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots.)^2;$$

dividirt man aber die zweite durch die dritte, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots.}{P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots.}.$$

3) Aufgabe 2. Es bleibe alles noch ganz so, wie in der vorigen Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daſs jetzt zu den Kräften P, P', P'', ..., welche unter sich im Gleichgewichte stehen, noch eine

---

immer zu der leichtesten Ausdrucksweise, weshalb eine von diesen beiden in allen hier vorkommenden Aufgaben jedesmal zur Bestimmung der Lage aller übrigen Linien gewählt werden wird.

neue Kraft p hinzukommt, welche mit der Horizontallinie den Winkel η macht, und in der Entfernung d von der Umdrehungs-Achse wirkt; man soll die Umstände aufsuchen, unter denen die im Maximo auftretende Reibung der Kraft p das Gleichgewicht hält *).

Auflösung. Wir denken uns, um diesen Fall an den vorigen eng anschliefsen zu können, die in den Entfernungen r, r', r'', ... wirkenden Kräfte P, P', P'', ... auch jetzt noch als solche, die ohne Rücksicht auf Reibung unter sich im Gleichgewichte sich befinden, und nennen noch immer S den aus ihnen hervorgehenden Druck, so wie φ den Winkel, unter welchem dieser Druck geschieht, so dafs also zwischen den Gröfsen P, P', P'', ..., r, r', r'', ..., α, α', α'', ..., S und φ noch immer die vorhin gefundenen Gleichungen (A.) Statt finden. Dagegen wollen wir hier noch aufserdem durch S' den Druck bezeichnen, welcher bei dem Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung im Maximo auf die Zapfenlager ausgeübt wird, so wie durch φ' den Winkel, unter welchem es geschieht. Dies vorausgesetzt, so ist aus der Natur der Reibung, wie sie oben beschrieben worden ist, leicht zu entnehmen, dafs sie nur am Umfange der Zapfen an der Stelle, wo sich der Druck S' äufsert, und in dem Maafse, als sie dazu aufgefordert wird, hervorgerufen, und in einer Richtung, die senkrecht auf der des Druckes S' steht, thätig werden, dabei aber die Gröfse $\mu S'$ nie übersteigen kann. Es wird also alles noch ganz so wie bei der vorigen Aufgabe bleiben, nur mit dem Unterschiede, dafs zu den dortigen Kräften jetzt noch die Kraft p, welche unter dem Winkel η in der Entfernung d von der Umdrehungs-Achse thätig ist, hinzukommt, und noch überdies die Reibung in der Entfernung des Zapfenhalbmessers ϱ, deren Richtung senkrecht auf der Richtung des Druckes S' steht, und die jedesmal nach der Seite hin strebt, wodurch sie einem durch die Kraft p beabsichtigtem Verschieben der Zapfen auf ihren Lagern gerade entgegenwirkt. Der Winkel, welchen die Richtung der Reibung mit der Horizontallinie macht, ist daher $\varphi' - 90°$

*) Gerade die Allgemeinheit, in welcher obige Aufgabe gestellt ist, bringt in ihre Behandlung eine bedeutende Erleichterung. Wollte man aber die Gröfse p wissen, um welche eine der Kräfte P, P', P'', ..., z. B. P, vermehrt oder vermindert werden kann, ohne dafs unter dem Zutritte der Reibung im Maximo das Gleichgewicht zu bestehen aufhört, so darf man nur r statt d setzen, und α statt η, wenn die Kraft P um p vermehrt werden soll, dagegen $\alpha \pm 180°$ statt η, wenn die Kraft P um p vermindert werden soll.

oder $\varphi' + 90°$, je nachdem die Kraft p eine Ortsveränderung der Zapfenpuncte in demselben oder in entgegengesetztem Sinne hervorzurufen strebt, in welchem man das Wachsen der Winkel festgestellt hat. Um jedoch eine daraus entspringende doppelte Betrachtung zu vermeiden, wollen wir darin übereinkommen, daſs gleich von vorn herein alle Winkel α, α', α'', ..., φ und φ' jederzeit nach der Seite hin gezählt werden, welche der, wohin die Zapfenpuncte von der Kraft p im Falle einer Bewegung getrieben werden, entgegengesetzt ist, was sich aus der Lage und Richtung der Kraft p in jedem besondern Falle zum Voraus leicht bestimmen läſst, so daſs der Winkel, den die Reibung mit der Horizontallinie macht, allemal $\varphi' + 90°$ wird. Beschränken wir uns demnach hier auf den Fall, wo die Reibung ihren gröſsten Werth $\mu S'$ annimmt *), so erhalten wir ganz wie in der vorigen Auflösung zur Bestimmung der Umstände, welche das Gleichgewicht unter Mitwirkung der Reibung begleiten, folgende Gleichungen:

$$(B.)\ \begin{cases} 0 = \pm p d \mp \mu S' \varrho + P r \pm P' r' \pm P'' r'' \pm \ldots \\ S' \sin\varphi' = p \sin\eta + \mu S' \cos\varphi' + P \sin\alpha + P' \sin\alpha' + P'' \sin\alpha'' + \ldots \\ S' \cos\varphi' = p \cos\eta - \mu S' \sin\varphi' + P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots \end{cases}$$

Was die doppelten Vorzeichen in der ersten dieser Gleichungen betrifft, so gilt für sie nicht nur alles das, was schon bei den Gleichungen (*A.*) erwähnt worden ist, sondern es ist hier noch auſserdem zu bemerken, daſs von den vor p stehenden doppelten Zeichen das obere oder das untere genommen werden müsse, je nachdem p die Ebene, worin alle Kräfte liegen, in demselben oder in entgegengesetztem Sinne zu drehen bemüht ist, als die Kraft P, und daſs von den zu dem Gliede $\mu S' \varrho$ gehörigen Vorzeichen stets das entgegengesetzte von dem zu nehmen ist, welches vor p gesetzt wird.

Mit Zuziehung der Gleichungen (*A.*) gehen aber die Gleichungen (*B.*) in folgende einfachere über:

---

*) Wenn die Reibung nicht mit ihrem vollen Werthe $\mu S'$, sondern nur mit einem Theile $\mu' S'$ jenes Werthes auftreten soll, wobei natürlicherweise immer $\mu' < \mu$ sein muſs, so bringt dies keinen andern Unterschied hervor, als daſs in den kommenden Gleichungen (*B.*) überall μ' statt μ gesetzt werden muſs. Man überzeugt sich so ganz einfach, daſs durch die angezeigte Aenderung alle folgenden Resultate auch noch für den Fall brauchbar werden, wo nur ein aliquoter Theil der vollen Reibung bei der Bildung des Gleichgewichts geweckt werden soll.

$$(C.)\quad\begin{cases} pd = \mu\varrho S', \\ S'(\sin\varphi' - \mu\cos\varphi') = S\sin\varphi + p\sin\eta, \\ S'(\cos\varphi' + \mu\sin\varphi') = S\cos\varphi + p\cos\eta. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten der Gleichungen ($C.$) erhält man nun, wenn man sie quadrirt und addirt, folgende neue Gleichung:

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2 + 2pS\cos(\varphi-\eta) + p^2,$$

welche, wenn man in sie für p seinen Werth aus der ersten von den Gleichungen ($C.$) setzt, übergeht in:

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2 + 2\mu\frac{\varrho}{d}SS'\cos(\varphi-\eta) + \mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}S'^2,$$

und aus dieser erhält man, durch Auflösung derselben, für S' folgenden Werth:

$$S' = \frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}{1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}}.S,$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch

$$\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \mp \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}$$

multiplicirt:

$$S' = \frac{S}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Setzt man nun

$$(\mathfrak{d}.)\quad \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}} = f,$$

so daſs also f eine bloſs von μ, $\frac{\varrho}{d}$ und $\varphi-\eta$ abhängige und eben deswegen als bekannt anzusehende Zahl vorstellt, so folgt:

$$(a.)\quad S' = f.S,$$

und nun aus der ersten der Gleichungen ($C.$) sogleich auch:

$$(b.)\quad p = \mu\frac{\varrho}{d}.f.S.$$

Ferner läſst sich mit Hülfe der gefundenen Werthe jetzt auch noch der Winkel φ', unter welchem beim Zutritte der Reibung der Druck S' auf die Zapfenlager geschieht, aus den beiden letzten von den Gleichungen ($C.$) berechnen. Die genannten Gleichungen gehen nemlich mit Berücksichtigung der eben für S' und p gefundenen Werthe über in:

$$\sin\varphi' - \mu\cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{f} + \mu\frac{\varrho}{d}\sin\eta,$$

$$\cos\varphi' + \mu\sin\varphi' = \frac{\cos\varphi}{f} + \mu\frac{\varrho}{d}\cos\eta.$$

Führt man daher einen positiven hohlen Winkel ν von der Beschaffenheit ein, dafs $\tan\nu = {}_{,}\mu$ ist, welcher Winkel ν stets spitz und kleiner als 45^0 sein wird, weil die Zahl ${}_{,}\mu$ ihrer Natur nach immer positiv und kleiner als 1 ist, und setzt man in vorstehenden Gleichungen statt ${}_{,}\mu$ überall $\tan\nu$, so gehen sie auf bekannte Weise in diese über:

$$(\Theta.)\quad \begin{cases} \sin(\varphi'-\nu) = \dfrac{\cos\nu.\sin\varphi}{f} + \dfrac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin\eta, \\ \cos(\varphi'-\nu) = \dfrac{\cos\nu.\cos\varphi}{f} + \dfrac{\varrho}{d}\sin\nu.\cos\eta. \end{cases}$$

Da durch die Gleichungen $(\Theta.)$ sowohl der Sinus als der Cosinus von $\varphi'-\nu$ bestimmt wird, so erhält man in jedem Falle den Winkel φ' ohne die geringste Zweideutigkeit. Uebrigens wiederhole ich hier noch ein für allemal die Bemerkung, dafs die bisher aufgestellten Gleichungen und die daraus abgeleiteten, welche noch folgen werden, nur unter der Voraussetzung allgemein wahr sind, dass man alle in ihnen erscheinenden Winkel nach der Seite hinauf fafst, die der, nach welcher die Zapfen von der Kraft p zu einer Drehung angereizt werden, gerade entgegengesetzt ist, welche Bestimmung stets in der Willkühr dessen liegt, der die Aufgabe behandelt.

4) Die Gleichungen $(a.)$, $(b.)$ und $(\Theta.)$ in Verbindung mit der Gleichung (♁.) genügen zur Bestimmung aller beim Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung eintretenden Umstände, und sind völlig genau. Der leichte Gebrauch dieser Gleichungen in der Ausübung hängt ganz allein davon ab, dafs die Gleichung (♁.) sowohl als die Gleichungen $(\Theta.)$ eine für die Rechnung bequemere Form erhalten. Wir werden weiter unten zusehen, was sich in dieser Hinsicht noch thun läfst; zuvor aber wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die in No. 3. erhaltenen Ausdrücke und deren Bedeutung machen. Vor Allem mache ich darauf aufmerksam, dafs der Werth f, wie ihn die Gleichung (♁.) giebt, seiner Natur nach nur positiv sein kann, weil ein negativer Werth von f zu negativen Kräften führen würde, die unzulässig sind, da für jede Kraft alle möglichen Richtungen in die Rechnung aufgenommen worden sind, und deswegen das Zeichen — nicht sowohl einen Gegensatz in der Richtung, als einen Gegensatz in dem Wesen der Kraft anzudeuten hätte, der nicht denkbar ist. Aus diesem Grunde darf von den doppelten Zeichen vor dem Wurzelwerthe stets nur dasjenige genommen werden, welches zu einem positiven Werthe von f führt. Dies geschieht

zwar in der Regel nur durch das obere Zeichen, aber in manchen Fällen auch, wie wir finden werden, durch das untere. Aufser den für f sich ergebenden negativen Werthen, welche stets zu verwerfen sind, können für f unter Umständen auch imaginäre Ausdrücke entstehen. Dies geschieht, wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Werth negativ wird. In diesem Falle läfst sich für f überhaupt kein reeller Werth, weder ein positiver noch ein negativer, angeben, worin sich eine absolute Unmöglichkeit der Aufgabe ausspricht, die jedoch von einer ganz andern Art ist, als da, wo sich für f negative Werthe herausstellen, und die wir weiter unten näher kennen lernen werden. Uebrigens versteht sich schon von selbst, dafs wenn ein Werth von f von der Auflösung ausgeschlossen werden mufs, auch der dazu gehörige Werth von φ', selbst wenn er möglich wäre, von ihr ausgeschlossen bleiben müsse, weil beide nicht von einander getrennt aufgefafst werden können.

Die allgemeine Untersuchung der Natur des für f gefundenen Ausdruckes läfst sich durch nachstehende Betrachtung blofs auf einen Theil des ganzen Bezirkes zurückführen. Da nemlich in dem für f gefundenen Ausdrucke nur $\cos(\varphi-\eta)$ und $\sin(\varphi-\eta)$, und zwar letzterer nur im Quadrate vorkommt, so erhält man für f, man mag dabei die obern oder die untern Zeichen gebrauchen, immer noch denselben Werth, wenn man $-(\varphi-\eta)$ oder $360^0-(\varphi-\eta)$ statt $\varphi-\eta$ in den Ausdruck für f setzt, weil nicht nur

$$\cos x = \cos(-x) \quad \text{und} \quad \sin^2 x = \sin^2(-x),$$

sondern auch

$$\cos x = \cos(360^0-x) \quad \text{und} \quad \sin^2 x = \sin^2(360^0-x).$$

Hieraus folgt, dafs der Werth von f derselbe ist, wenn nur die Richtung von p mit der Richtung von S denselben Winkel, gleichgültig ob nach der einen oder nach der andern Seite hin, bildet, und dabei ist es völlig einerlei welcher von den beiden Winkeln φ und η der gröfsere oder der kleinere sei. Man kann sich also bei der Untersuchung der zu den möglichen Werthen von $\varphi-\eta$ gehörigen Werthe von f auf den einen Fall beschränken, wo $\varphi-\eta$ einen positiven Winkel x zwischen 0^0 und 180^0 vorstellt; denn verlangt man den Werth von f zu wissen, wenn $\varphi-\eta$ von der Form 360^0-x, oder von der Form $-x$, oder endlich von der Form $-(360^0-x)$ ist, so hat man jedesmal blofs den Werth von f zu nehmen, wo $\varphi-\eta = x$ ist, wobei x jedesmal einen nicht über 0^0 und 180^0 hinaus fallenden positiven Winkel bezeichnet. Es ist einleuchtend, dafs durch diese vorausgeschickte

Betrachtung die Untersuchung des für f gefundenen Ausdruckes gar sehr erleichtert wird.

Endlich wollen wir noch die Umstände kennen lernen, unter welchen der für f erhaltene Ausdruck ein Maximum oder Minimum wird, in Bezug auf die als unabhängig angesehene veränderliche Gröfse $\varphi-\eta$.

Es ist bekannt, dafs man die zum Maximum oder Minimum erforderlichen Bedingungen des Ausdruckes f erhält, wenn man ihn nach $\varphi-\eta$ differentiirt und den Differentialquotienten gleich Null oder einem unendlich grofsen Werthe gleich setzt. Der genannte Differentialquotient erscheint aber in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler:

$$-\mu\frac{\varrho}{d}\sin(\varphi-\eta)\pm\frac{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta)}{\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

und dessen Nenner:

$$\left[-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}\right]^2$$

ist; man kann demnach den Differentialquotienten auch so schreiben:

$$f^2\left[-\mu\frac{\varrho}{d}\sin(\varphi-\eta)\pm\frac{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta)}{\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}\right],$$

und aus dieser Form lassen sich leicht folgende Bedingungen für das Maximum oder Minimum des Werthes f, in Beziehung auf den Winkel $\varphi-\eta$, herleiten:

I. Der hier gegebene Differentialquotient wird mit f zugleich Null und unendlich. Da jedoch f im Sinne unserer Aufgabe den Werth Null nie annehmen kann, und ein an sich unendliches f eben so wenig statthaft ist, so hat man diese Bedingung, als eine in jetziger Betrachtung bedeutungslose, nicht weiter zu berücksichtigen.

II. Der obige Differentialquotient wird Null, wenn $\sin(\varphi-\eta)=0$ ist, d. h. wenn entweder $\varphi-\eta=0$, oder $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist.

III. Der gedachte Differentialquotient wird Null, wenn

$$-1+\frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}{\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}=0,$$

d. h. wenn $1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}=0$ und zugleich der Werth

$$\frac{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}{\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}$$

positiv ist, welches Letztere nichts Anderes sagt, als dafs $\cos(\varphi-\eta)$ bei dem positiven Wurzelwerthe positiv, und bei dem negativen Wurzelwerthe negativ sein müsse.

IV. Endlich wird der Differentialquotient unendlich grofs, wenn

$$1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta) = 0$$

ist, ohne dafs zu gleicher Zeit

$$\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin(\varphi-\eta)\cos(\varphi-\eta) = 0$$

ist, welches Letztere im Sinne unserer Aufgabe nichts Anderes sagen will, als dafs dabei der Winkel $\varphi-\eta$ weder ein positives noch ein negatives Vielfache von einem rechten Winkel sein darf, oder dafs von diesem Falle die beiden vorigen ausgeschlossen bleiben.

Es wäre nun auf demselben Wege noch weiter zu untersuchen, ob die in II., III. und IV. ausgesprochenen Bedingungen in der That zu einem Maximum oder Minimum führen, und an welcher Stelle jedesmal das Maximum oder Minimum eintrete; aber wir werden in diese Betrachtungen nicht weiter eingehen, indem wir uns begnügen, obige Bedingungen hier aufgestellt zu haben, und ihre Bedeutung in der Folge auf einem andern nicht minder directem Wege nachweisen zu können.

5) Um den in der Gleichung (𝔡.) für f gegebenen Ausdruck in eine zur Rechnung bequemere Gestalt zu bringen, wollen wir Zähler und Nenner des erwähnten Ausdrucks durch $\sqrt{(1+\mu^2)}$ dividiren; dann erhalten wir:

$$f=\frac{\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}}{-\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}\cdot\cos(\varphi-\eta)\pm\sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\cdot\frac{\mu^2}{\sqrt{(1+\mu^2)}}\cdot\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Erwägen wir nun, dafs der zu Ende von No. 4. eingeführte Winkel ν die Eigenschaft besitzt, dafs $\sin\nu=\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ und $\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ ist, so verwandelt sich vorstehende Gleichung durch Substitution dieser Werthe in folgende:

$$f = \frac{\cos\nu}{-\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\cos(\varphi-\eta) \pm \sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Führen wir nun noch einen zweiten, nicht über die Grenzen 0^0 und $\pm 90^0$ hinaus liegenden Winkel λ von der Beschaffenheit ein, dafs

$$\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta) = \sin^2\lambda$$

ist, so wird

$$\frac{\varrho}{d}\sin\nu = \pm\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)},$$

und da $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ stets positiv ist, so können wir dem doppelten Vorzeichen dadurch entgehen, dafs wir λ positiv oder negativ nehmen, je nachdem $\sin(\varphi-\eta)$ positiv oder negativ ist; d. h. λ so, dafs

$$\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$$

wird. Setzen wir nun dem gemäfs $\cos\lambda$ statt $\sqrt{\left(1-\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu.\sin^2(\varphi-\eta)\right)}$ und $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)}$ statt $\varrho\sin\nu$, so geht der letzte für f erhaltene Ausdruck nach einer leichten Reduction über in:

$$(\text{♀}.)\qquad f = \pm\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)},$$

wobei entweder nur die obern oder nur die untern Zeichen zu nehmen sind, und für λ der positive oder negative Winkel, dessen Sinus $=\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)$ ist. Die obern Zeichen in diesem Ausdrucke für f entsprechen fortwährend den obern Zeichen in der Gleichung (♉.), so dafs also $+\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}$ einerlei Bedeutung hat mit dem aus der Gleichung (♉.) genommenen Ausdrucke:

$$\frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},\quad\text{und}\quad -\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)}$$

einerlei Bedeutung mit dem aus der Gleichung (♉.) genommenen Ausdrucke:

$$\frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)-\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

in so fern in diesen beiden Ausdrücken der Wurzelwerth jedesmal absolut genommen wird. Die zuletzt für f gegebene Form ist für die Rechnung ungleich bequemer, als der in der Gleichung (♉.) für f gegebene Ausdruck, aber sie wird nichtssagend, wenn $\sin(\varphi-\eta) = 0$, d. h. wenn

$\varphi-\eta=0$, oder $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist; denn in diesem Falle giebt die Gleichung $\frac{\varrho}{r}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)=\sin\lambda$ auch $\sin\lambda=0$, d. h. $\lambda=0$, weshalb die erwähnten Formen unter solchen Umständen jedesmal die Gestalt $\frac{0}{0}$ annehmen, aus der sich kein Werth für f erkennen läfst. Man könnte zwar auch in diesem Falle die Bedeutung von f aus der letztern Form entweder dadurch herholen, dafs man in ihr statt $\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)$ setzt:

$$\sin(\varphi-\eta)\mp\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\cos(\varphi-\eta)\sin(\varphi-\eta),$$

und dann Zähler und Nenner derselben durch $\sin(\varphi-\eta)$ dividirt, oder dadurch, dafs man nach Anleitung der Differentialrechnung ihren Werth für den Fall bestimmt, wo sie die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt, und dabei nicht aufser Acht läfst, dafs λ eine Function von $\varphi-\eta$ ist. Am einfachsten ist es indessen, wenn man in diesem Falle auf den durch die Gleichung (♁.) gegebenen Ausdruck zurück geht, aus welchem man sogleich erhält, für den Fall wo $\varphi-\eta=0$ ist:

$$(♄.)\qquad f=\frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\pm\sqrt{(1+\mu^2)}},$$

und für den Fall wo $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist:

$$(♂.)\qquad f=\frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d}\pm\sqrt{(1+\mu^2)}}.$$

Diesen besondern an sich sehr einfachen Ausdrücken von f kann man, da wo es zweckmäfsig scheint, auf mehrfache Weise eine für die genaue Rechnung noch bequemere Gestalt geben*).

6) Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch die in den verschiedenen für f mitgetheilten Ausdrücken enthaltenen doppelten Gestalten, welche aus

---

*) Wenn man z. B. in dieselben den Winkel ν einführt, so erhält man, wenn $\varphi-\eta=0$ ist:

$$f=\pm\frac{\cos\nu}{1\mp\frac{\varrho}{d}\sin\nu},$$

wenn $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist:

$$f=\pm\frac{\cos\nu}{1\pm\frac{\varrho}{d}\sin\nu}.$$

Setzt man nun $\frac{\varrho}{d}\sin\nu=\text{tang}^2\gamma$, so wird in jedem Falle:

$$\frac{\cos\nu}{1+\frac{\varrho}{d}\sin\nu}=\cos\nu.\cos^2\gamma,$$

dem doppelten Zeichen des Wurzelwerthes in der Gleichung (♁.) hervorgegangen sind, näher in's Auge fassen, und untersuchen, unter welchen Umständen die einen oder die andern zu nehmen sind. Dabei ist im Allgemeinen zu erwägen, dafs der Werth von f imaginär wird, wenn

$$\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta) > 1+\mu^2,$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu\,.\sin^2(\varphi-\eta) > 1$$

wird, in welchem Falle aber auch kein durch die Gleichung

$$\frac{\varrho}{d}\sin\nu\,.\sin(\varphi-\eta)=\sin\lambda$$

zu bestimmender Winkel λ möglich ist, und zwar nur in diesem Falle. Da wo also in den Umformungen von f der Winkel λ sich unmöglich zeigt, deutet dies auf die absolute Unmöglichkeit von f eben so gut hin, wie die Bestimmung

$$\mu\,\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta) > 1+\mu^2$$

in dem ursprünglichen, durch die Gleichung (♁.) gegebenen Ausdrucke von f. Aber selbst wenn λ möglich ist, so ist darum nicht auch nothwendigerweise f möglich; denn da, wie schon in No. 4. angezeigt worden ist, f seiner Natur nach immer nur positiv, nie negativ sein kann, so sind von den verschiedenen Formen des Ausdruckes f immer nur diejenigen beizubehalten, welche zu positiven Werthen von f führen, die übrigen, welche zu negativen oder imaginären Werthen von f führen, aber jederzeit zu verwerfen. Weil aber in den verschiedenen für f gefundenen Ausdrücken eben so gut diejenigen Formen genommen werden können, welche dem additiven Wurzel-

---

setzt man ferner $\frac{\varrho}{d}\sin\nu=\cos^2\gamma'$, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu<1$, und $\frac{\varrho}{d}\sin\nu=\frac{1}{\cos^2\gamma''}$, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu>1$ ist, so findet man

wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu<1$ ist:

$$\frac{\cos\nu}{1-\frac{\varrho}{d}\sin\nu}=\frac{\cos\nu}{\sin^2\gamma'},$$

wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu>1$ ist:

$$\frac{\cos\nu}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu-1}=\frac{\cos\nu}{\operatorname{tang}^2\gamma''}.$$

werthe entsprechen, als die, welche dem subtractiven Wurzelwerthe angehören, so können für f möglicherweise aus jenen Formen zwei brauchbare Werthe hervorgehen, oder nur einer, oder gar keiner, je nachdem beide Formen, oder nur die eine, oder keine von beiden positive Werthe für f liefern. Diese verschiedenen möglichen Fälle sind es eben, welche wir nun näher kennen lernen wollen. Dabei haben wir blofs solche Werthe von $\varphi-\eta$ in's Auge zu fassen, welche nicht über die Grenzen 0^0 und 180^0 hinaus fallen, weil, wie ebenfalls schon in No. 4. gezeigt worden ist, alle übrigen Fälle sich auf diesen einen leicht zurückführen lassen. Die Natur des Werthes f hängt aber insbesondere von der Gröfse des Werthes $\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$ oder $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ ab; daher wollen wir nach einander die drei verschiedenen Fälle abhandeln, wo entweder $\frac{\varrho}{d}\sin\nu < 1$, oder $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$, oder $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist, wobei wir jedoch blofs solche Werthe von $\varphi-\eta$ berücksichtigen werden, die $> 0^0$ und $< 180^0$ sind, weil die besondern Fälle, wo $\varphi-\eta=0$ oder $\varphi-\eta=180^0$ ist, sich ohne alle Schwierigkeit durch den blofsen Anblick der Gleichungen (♑.) und (♂.) sogleich entscheiden lassen.

Erster Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu < 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)=\sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} < 1$. Daraus folgt, weil $(\varphi-\eta)$ nicht über die Grenzen 0^0 und 180^0 hinauskommt, und eben deshalb λ die Grenzen 0^0 und 90^0 nicht überspringen kann, wie aus dessen in No. 5. gegebener Bestimmung unmittelbar hervorgehet, dafs $\lambda < \varphi-\eta$ sein werde, so lange $\varphi-\eta$ nicht stumpf ist, und dafs $\lambda < 180^0-(\varphi-\eta)$, sobald $\varphi-\eta$ stumpf wird. In jedem Falle aber fällt sowohl $\varphi-\eta-\lambda$ als $\varphi-\eta+\lambda$ nicht über die Grenzen 0^0 und 180^0 hinaus, so dafs also nicht nur $\sin(\varphi-\eta)$, sondern auch $\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)$ fortwährend positiv bleibt. Daher geben die obern Zeichen in dem Ausdrucke (♀.) ununterbrochen für f einen positiven Werth, die untern immer einen negativen. In diesem Falle ist folglich, ohne Ausnahme, aus der Gleichung (♀.):

$$f=\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}$$

zu nehmen, welcher Werth dem

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}$$

aus der Gleichung (♉.) entspricht.

Zweiter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} = 1$. Daraus folgt, weil $\varphi-\eta$ nicht über die Grenzen 0^0 und 180^0, und als Folge λ nicht über die Grenzen 0^0 und 90^0 hinaus kommt, dafs $\lambda=\varphi-\eta$ wird, so lange $\varphi-\eta$ nicht stumpf ist, und dafs $\lambda = 180^0-(\varphi-\eta)$ wird, sobald $\varphi-\eta$ stumpf ist. Ist nun $\varphi-\eta$ nicht stumpf und also $\lambda=\varphi-\eta$, so ist jedesmal $\varphi-\eta-\lambda = 0$. Die obern Zeichen in der Gleichung (♀.) geben sonach fortwährend einen unendlich grofsen Werth für f; $\varphi-\eta+\lambda$ hingegen fällt nie über die Grenzen 0^0 und 180^0 hinaus, $\sin(\varphi-\eta+\lambda)$ wird mithin nie negativ, folglich geben die untern Zeichen der Gleichung (♀.) fortwährend negative Werthe für f. Ist aber $\varphi-\eta$ stumpf und also $\lambda = 180^0-(\varphi-\eta)$, so ist $\varphi-\eta-\lambda = 180^0-2\lambda$ und fällt mithin fortwährend zwischen 0^0 und 180^0, daher geben die obern Zeichen der Gleichung (♀.) stets positive Werthe für f; hingegen ist dann immer $\varphi-\eta+\lambda = 180^0$, und dies führt zu einem unendlich grofsen Werth von f. Man ersieht hieraus, dafs in diesem Falle f ununterbrochen einen unendlich grofsen Werth annimmt, bis $\varphi-\eta$ stumpf wird; dann aber erhält f einen endlichen positiven Werth, nemlich:

$$f = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)},$$

wobei jedoch $\lambda = 180^0-(\varphi-\eta)$ ist, so dafs

$$f = -\frac{\cos\nu}{2\cos(\varphi-\eta)}$$

wird. Dieser Werth von f entspricht in der Gleichung (♉.) dem:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

in welchem $\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}.\frac{\varrho}{d} = 1$, oder $\mu\frac{\varrho}{d} = \sqrt{(1+\mu^2)}$ gesetzt wird. Dadurch aber verwandelt sich der vorstehende Ausdruck in folgenden:

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)}.$$

Dritter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist.

Aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu \,.\, \sin(\varphi-\eta) = \sin\lambda$ ergiebt sich für diesen Fall allgemein $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$. Zunächst hat man sich aber zu erinnern, dafs nur so lange ein reeller Werth von f bestehen kann, als der Winkel λ möglich ist, d. h. so lange als $\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu \,.\, \sin^2(\varphi-\eta) \leqq 1$, oder, weil $\varphi-\eta$ nur zwischen den Grenzen 0^0 und 180^0 betrachtet wird, so lange $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\varrho}$ ist; so lange also $\sin(\varphi-\eta) > \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ ist, giebt es für f keinen reellen, weder positiven noch negativen Werth. Ist nun $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ und $\varphi-\eta$ nicht stumpf, so folgt aus $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$, dafs $\lambda > \varphi-\eta$ ist, mithin ist $\varphi-\eta-\lambda$ stets negativ und spitz; $\varphi-\eta+\lambda$ hingegen liegt fortwährend zwischen 0^0 und 180^0, daher erhält man aus der Gleichung (♀.) für f jedesmal nur einen negativen Werth, man mag in ihr die obern oder die untern Zeichen nehmen. Ist aber $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ und $\varphi-\eta$ stumpf, so folgt aus $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)} > 1$, dafs $\lambda > 180^0 - (\varphi-\eta)$, mithin liegt $\varphi-\eta-\lambda$ stets zwischen 0^0 und 180^0, und $\varphi-\eta+\lambda$ stets zwischen 180^0 und 360^0, daher erhält man aus der Gleichung (♀.) für f einen positiven Werth, man mag in ihr die obern oder die untern Zeichen nehmen. Man ersieht hieraus, dafs in diesem Falle kein positiver, also überhaupt kein brauchbarer Werth für f, nicht einmal ein unendlich grofser, gefunden wird, so lange $\varphi-\eta$ nicht stumpf ist, und selbst, wenn $\varphi-\eta$ stumpf ist, so lange nicht $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ wird; ist aber $\varphi-\eta$ stumpf und zugleich $\sin(\varphi-\eta) \leqq \frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$, so giebt es fortwährend für f zwei positive Werthe, von denen der eine den obern, der andere den untern Zeichen in der Gleichung (♀.) entspricht.

Jener ist

$$f = \frac{\cos\nu \,.\, \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}, \quad \text{dieser } f = -\frac{\cos\nu \,.\, \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)},$$

und es entspricht jener dem zur Gleichung (♂.) gehörigen Ausdrucke:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

dieser hingegen entspricht dem zur Gleichung (♂.) gehörigen Ausdrucke:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)-\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

wobei jedesmal die absoluten Wurzelwerthe zu nehmen sind, wie in allen vorigen, ähnlichen Ausdrücken. In dem besondern Falle, wo $\sin(\varphi-\eta)=\frac{1}{\frac{\varrho}{d}\sin\nu}$ ist, wird $\sin\lambda=1$, d. h. $\lambda=90°$; dann gehen die beiden Werthe von f in den einen über:

$$f = -\cos\nu.\tang(\varphi-\eta),$$

welcher in der Gleichung (♀.) dem Ausdrucke:

$$f = -\frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}$$

entspricht, oder, weil $\cos(\varphi-\eta)=-\sqrt{[1-\sin^2(\varphi-\eta)]}$ ist, dem:

$$f = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}-(1+\mu^2)\right)}}.$$

7) Nachdem wir so gefunden haben, welche Formen der verschiedenen Ausdrücke von f jedesmal die brauchbaren Werthe für f liefern, bleibt uns nun nichts mehr übrig, als die diesen Formen entsprechenden Werthe von φ', wie sie aus den Gleichungen (Θ.) hervorgehen, näher kennen zu lernen.

Setzen wir zu diesem Ende in die Gleichungen (Θ.) statt $\frac{\cos\nu}{f}$ seinen Werth $\pm\frac{\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)}$ aus der Gleichung (♀.), und statt $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ den Werth $\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi-\eta)}$, wie man ihn aus der in No. 5. gegebenen Bestimmung des Winkels λ erhält, so verwandeln sich dadurch die Gleichungen (Θ.) in diese:

$$\sin(\varphi'-\nu) = \frac{\pm\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\sin\varphi+\sin\lambda\sin\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\cos(\varphi'-\nu) = \frac{\pm\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\cos\varphi+\sin\lambda\cos\eta}{\sin(\varphi-\eta)}.$$

Schreibt man in diesen Gleichungen statt der Producte

$$\sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\sin\varphi \text{ und } \sin(\varphi-\eta\mp\lambda)\cos\varphi$$

respective die Differenzen

$$\tfrac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)-\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda) \text{ und } \tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)-\tfrac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda),$$

so gehen sie über in:

$$\sin(\varphi'-\nu) = \frac{\mp\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda)\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\sin\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\cos(\varphi'-\nu) = \frac{\pm\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\cos\eta}{\sin(\varphi-\eta)},$$

oder, wenn man $\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda)$ für $\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\sin\eta$, und $\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda)$ für $\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\pm\lambda)+\sin\lambda.\cos\eta$ schreibt, in folgende:

$$\sin(\varphi'-\nu) = \frac{\mp\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda)\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)},$$

$$\sin(\varphi'-\nu) = \frac{\pm\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda)}{\sin(\varphi-\eta)}.$$

Es ist aber $\mp\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi-\eta\mp\lambda)\pm\tfrac{1}{2}\cos(\eta\mp\lambda) = \pm\sin(\varphi-\eta)\sin(\varphi\mp\lambda)$ und $\pm\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi-\eta\mp\lambda)\mp\tfrac{1}{2}\sin(\eta\mp\lambda) = \pm\cos(\varphi\mp\lambda)\sin(\varphi-\eta)$. Durch Substitution dieser Werthe in die zuletzt erhaltenen Gleichungen wird endlich:

$$\sin(\varphi'-\nu) = \pm\sin(\varphi\mp\lambda), \quad \cos(\varphi'-\nu) = \pm\cos(\varphi\mp\lambda),$$

wo die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, je nachdem in dem Ausdrucke für f die obern oder untern Zeichen genommen werden, und λ stellt, wie schon bekannt ist, entweder einen positiven oder negativen, nicht stumpfen Winkel vor, je nachdem $\sin(\varphi-\eta)$ positiv oder negativ ist. Werden daher in dem Ausdrucke für f die obern Zeichen genommen, so ist jedesmal

$$(c.) \quad \varphi'-\nu = \varphi-\lambda,$$

und λ stellt einen positiven Winkel vor, wenn $\varphi-\eta$ entweder positiv und hohl, oder negativ und erhaben ist; dagegen stellt λ einen negativen Winkel vor, wenn $\varphi-\eta$ entweder positiv und erhaben, oder negativ und hohl ist. Werden aber in dem Ausdrucke für f die untern Zeichen genommen, so ist jedesmal

$$(c.) \quad \varphi'-\nu = 180^\circ+\varphi+\lambda,$$

und λ hat wiederum einen positiven Werth, wenn $\varphi-\eta$ positiv hohl, oder negativ erhaben ist; dagegen einen negativen, wenn $\varphi-\eta$ positiv erhaben, oder negativ hohl ist. Es verdient hierbei der Umstand eine besondere Erwähnung, dafs ν derselbe Winkel ist, um welchen, bei horizontaler Lage der Reibungs-Ebene, diese geneigt werden kann bis ein Abgleiten erfolgt, so

dafs also in der Regel der Winkel ν unmittelbar durch die Beobachtung gegeben ist, wenn man nicht gleitende Reibung und Zapfenreibung als der Art nach von einander verschieden hält, wozu die bisher im Versuche gefundenen Unterschiede noch keineswegs zu berechtigen scheinen. Übrigens erhellet, dafs die Gleichungen (*c.*) selbst dann noch gültig sind, wenn $\varphi-\eta=0$ oder $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist; denn der Factor $\sin(\varphi-\eta)$, welcher im Zähler und Nenner des in (♀.) gegebenen Ausdruckes von f sich befand, und daher bei den hier erwähnten Werthen von $\varphi-\eta$ jenen Ausdruck unter die Form $\frac{0}{0}$ brachte, ist während der Bildung der Gleichungen (*c.*) wieder aus Zähler und Nenner verschwunden.

8. Wir sind nunmehr in den Stand gesetzt, die beim Eintritte der Reibung, im Maximo vorfallenden Modificationen des Gleichgewichts unter allen Umständen genau und zugleich sehr einfach anzugeben. Um die mannigfaltigen zu f und φ' gehörigen Formen bei verschiedenen Werthen von $\varphi-\eta$ mit einem Blicke überschauen zu können, wollen wir sie hier für jeden der in No. 6. behandelten drei Fälle besonders zusammen stellen, und dabei den absoluten Werth von λ, das bald positiv, bald negativ erscheint, mit $[\lambda]$ bezeichnen.

Erster Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu<1$, d. h. $\frac{\varrho}{d}\mu<\sqrt{(1+\mu^2)}$ ist.

1. Wenn $\varphi-\eta=0^0$ und daher auch $\lambda=0$ ist, so ist ein Gleichgewichtszustand vorhandeu, für welchen

$$f=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}-\mu\frac{\varrho}{d}} \quad \text{und} \quad \varphi'=\varphi+\nu$$

ist. Statt des hier für f gegebenen Ausdruckes kann auch, wo es Vortheil bringt, eine der Rechnung sich besser anschmiegende Form genommen werden, wie schon in Nr. 5. angemerkt worden ist.

2. Wenn $\varphi-\eta=\pm 180^0$ und daher $\lambda=0$ ist, so ist ein Gleichgewichtszustand möglich, für welchen

$$f=\frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}+\mu\frac{\varrho}{d}} \quad \text{und} \quad \varphi'=\varphi+\nu$$

ist, wo wieder für den zu f gehörigen Ausdruck die eben schon gemachte Bemerkung gilt.

3. So lange $\varphi-\eta$ positiv und hohl, oder negativ und erhaben, also

λ positiv ist, ist e i n Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-[\lambda])}$$

und

$$\varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu-[\lambda]$$

ist. Der hier gegebene Ausdruck von f ist mit dem aus der Gleichung (♁.) entnommenen:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

dem Wesen nach völlig einerlei.

4. So lange $\varphi-\eta$ negativ und hohl, oder positiv und erhaben, also λ negativ ist, ist e i n Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+[\lambda])}$$

und

$$\varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu+[\lambda])$$

ist. Der hier für f gegebene Ausdruck entspricht noch immer, aus der Gleichung (♁.), dem:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Z w e i t e r F a l l, w e n n $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$, d. h. $\mu\frac{\varrho}{d} = \sqrt{(1+\mu^2)}$ i s t.

1. Wenn $\varphi-\eta = 0^0$, also $\lambda = 0$ ist, ist ein Gleichgewichtszustand möglich, nur wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu$$

ist.

2. Wenn $\varphi-\eta = \pm 180^0$, also $\lambda = 0$ ist, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = \tfrac{1}{2}\cos\nu = \frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu$$

ist.

3. So lange $\varphi-\eta$ hohlspitz und positiv, oder erhabenspitz und negativ ist, ist e i n Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu-[\nu]$$

ist, wobei $[\lambda] = \varphi-\eta$ zu setzen ist, so lange $\varphi-\eta$ positiv und hohlspitz ist, dagegen $[\lambda] = 360^0+\varphi-\eta$, wenn $\varphi-\eta$ negativ und erhabenspitz ist.

So wie aber $\varphi-\eta$ hohlstumpf und positiv, oder erhabenstumpf und negativ wird, ist e i n Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = -\frac{\frac{1}{2}\cos\nu}{\cos(\varphi-\eta)} \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu-[\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = 180^0-(\varphi-\eta)$ zu setzen ist, so lange $\varphi-\eta$ positiv und hohlstumpf ist, dagegen $[\lambda] = -(\varphi-\eta)-180^0$, wenn $\varphi-\eta$ negativ und erhabenstumpf ist. Die hier für f gegebene endliche Form ist eins mit folgendem aus der Gleichung (ð.) abgeleiteten Ausdrucke:

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)} = -\frac{1}{2\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}.$$

4. So lange $\varphi-\eta$ hohlspitz und negativ, oder erhabenspitz und positiv ist, ist **ein** Gleichgewichtszustand nur dann möglich, wenn

$$f = \infty \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi-\nu+[\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = -(\varphi-\eta)$ zu setzen ist, so lange $\varphi-\eta$ negativ und hohlspitz ist, dagegen $[\lambda] = 360^0-(\varphi-\eta)$, wenn $\varphi-\eta$ positiv und erhabenspitz ist.

So wie aber $\varphi-\eta$ hohlstumpf und negativ, oder erhabenstumpf und positiv wird, ist ein Gleichgewichtszustand vorhanden, für welchen

$$f = -\frac{\frac{1}{2}\cos\nu}{\cos(\varphi-\eta)} \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu+[\lambda]$$

ist, wobei $[\lambda] = 180^0+(\varphi-\eta)$, so lange $\varphi-\eta$ negativ und hohlstumpf ist, dagegen $[\lambda] = \varphi-\eta-180^0$, wenn $\varphi-\eta$ positiv und erhabenstumpf ist. Der aus der Gleichung (ð.) abgeleitete endliche Ausdruck von f ist in diesem Falle wieder

$$f = -\frac{1}{2\sqrt{(1+\mu^2)}\cos(\varphi-\eta)} = -\frac{1}{2\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)}.$$

Dritter Fall, wenn $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$, **d. h.** $\mu\frac{\varrho}{d} > \sqrt{(1+\mu^2)}$ **ist.**

1. Wenn $\varphi-\eta = 0^0$, also $\lambda = 0$ ist, ist **kein** Gleichgewichtszustand möglich.

2. Wenn $\varphi-\eta = \pm 180^0$, also $\lambda = 0$ ist, sind **zwei** Gleichgewichtszustände vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d}+\sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi+\nu;$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{1}{\mu\frac{\varrho}{d}-\sqrt{(1+\mu^2)}} \quad \text{und} \quad \varphi' = 180^0+\varphi+\nu.$$

In Bezug auf die unter α. und β. für f gegebenen Ausdrücke gilt auch hier wieder die schon beim ersten Falle unter 1. und 2. aufgestellte Bemerkung.

3. So lange $\varphi-\eta$ hohlspitz und positiv, oder erhabenspitz und negativ ist, ist **kein** Gleichgewichtszustand möglich. Ja selbst wenn $\varphi-\eta$ hohlstumpf und positiv, oder erhabenstumpf und negativ ist, ist noch so lange kein Gleichgewichtszustand möglich, als $\sin^2(\varphi-\eta) > \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$; wenn aber $\sin^2(\varphi-\eta) \overline{\overline{<}} \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$, so sind **zwei** Gleichgewichtszustände mit positivem λ vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f=\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)}=\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\cos(\varphi-\eta-[\lambda])}$$

und

$$\varphi'=\varphi+\nu-\lambda=\varphi+\nu-[\lambda];$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f=-\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)}=-\frac{\cos\nu.\sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+[\lambda])}$$

und

$$\varphi'=180^\circ+\varphi+\nu+\lambda=180^\circ+\varphi+\nu+[\lambda].$$

An der Stelle, wo $\sin^2(\varphi-\eta)=\frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, wird $[\lambda]=90^\circ$; an dieser Stelle hat man daher

α') für den Gleichgewichtszustand, der den obern Zeichen entspricht:

$$f=-\cos\nu.\operatorname{tang}(\varphi-\eta) \text{ und } \varphi'=\varphi+\nu-90^\circ,$$

β') für den Gleichgewichtszustand, der den untern Zeichen entspricht:

$$f=-\cos\nu.\operatorname{tang}(\varphi-\eta) \text{ und } \varphi'=270^\circ+\varphi+\nu=\varphi+\nu-90^\circ.$$

4. So lange $\varphi-\eta$ hohlspitz und negativ, oder erhabenspitz und positiv ist, ist **kein** Gleichgewichtszustand möglich. Ja selbst wenn $\varphi-\eta$ hohlstumpf und negativ, oder erhabenstumpf und positiv ist, ist noch so lange **kein** Gleichgewichtszustand möglich, als $\sin^2(\varphi-\eta) > \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist; wenn aber $\sin^2(\varphi-\eta) \overline{\overline{<}} \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, so sind **zwei** Gleichgewichtszustände mit negativem λ vorhanden:

α) für den einen, der den obern Zeichen entspricht, ist

$$f = \frac{\cos\nu . \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta-\lambda)} = \frac{\cos\nu . \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta)+[\lambda]}$$

und

$$\varphi' = \varphi+\nu-\lambda = \varphi+\nu+[\lambda];$$

β) für den andern, der den untern Zeichen entspricht, ist

$$f = -\frac{\cos\nu . \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta+\lambda)} = -\frac{\cos\nu . \sin(\varphi-\eta)}{\sin(\varphi-\eta)-[\lambda]}$$

und

$$\varphi' = 180^0+\varphi+\nu+\lambda = 180^0+\varphi+\nu-[\lambda].$$

An der Stelle, wo $\sin^2(\varphi-\eta) = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, wird $[\lambda] = 90^0$; an dieser Stelle hat man daher

α') für den Gleichgewichtszustand, der den obern Zeichen entspricht:

$$f = \cos\nu . \operatorname{tang}(\varphi-\eta) \text{ und } \varphi' = \varphi+\nu+90^0;$$

β') für den Gleichgewichtszustand, der den untern Zeichen entspricht:

$$f = \cos\nu . \operatorname{tang}(\varphi-\eta) \text{ und } \varphi' = \varphi+\nu+90^0.$$

Die hier in 3. und 4. unter α. und β. für f gegebenen Formen entsprechen in der Gleichung (♁.) den + und − Zeichen vor dem stets positiv genommenen Wurzelwerthe; die unter α. stehenden sind nämlich einerlei mit

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)+\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}},$$

und die unter β. stehenden sind einerlei mit

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)-\sqrt{\left(1+\mu^2-\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2(\varphi-\eta)\right)}}.$$

Eben so erhält man aus der Gleichung (♁.) die Ausdrücke, welche den hier in 3. und 4. unter α'. und β'. für den besondern Fall, wo $\sin^2(\varphi-\eta) = \frac{1}{\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu}$ ist, gegebenen Formen entsprechen, wenn man in der Gleichung (♁.) $\sin^2(\varphi-\eta) = \frac{1+\mu^2}{\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}}$ setzt; sie geht dadurch in beiden Fällen über in:

$$f = \frac{1}{-\mu\frac{\varrho}{d}\cos(\varphi-\eta)} = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu^2\frac{\varrho^2}{d^2}-(1+\mu^2)\right)}}.$$

9) Fügt man zu den Angaben der vorigen Nummer noch hinzu, dafs der absolute Werth von λ in jedem Falle an der Stelle verschwindet, wo $\varphi-\eta$ von der Form $2m.90^0$ ist, wenn m jede ganze positive oder negative Zahl und auch Null vorstellt; dafs der absolute Werth von λ immer derselbe ist, wenn $\varphi-\eta$ sich von einer solchen Stelle gleichweit diesseits oder jenseits entfernt; dafs der absolute Werth von λ in beiden Fällen so lange fort wächst, bis $\varphi-\eta$ von der Form $(2m+1)90^0$ geworden ist, dann aber wieder in derselben Weise abnimmt, in der er zugenommen hat, bis $\varphi-\eta$ wieder von der Form $2m.90^0$ geworden ist, was für jedes mögliche λ aus der Gleichung $\frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)=\sin\lambda$ unmittelbar hervor gehet; und vergifst man nie, dafs die Winkel φ', φ, η, durch welche die Richtung der Kräfte bestimmt wird, stets auf der Seite, welche einer beabsichtigten Drehung durch die Kraft p entgegenläuft, genommen werden müssen, so lange sie positiv sind, und auf der andern Seite, wenn sie negativ werden, so ist man im Besitze aller Erfordernisse, um in jedem Falle mit Leichtigkeit, mit Zuziehung der Gleichungen (*a.*) und (*b.*) alle das Gleichgewicht, unter Mitwirkung der Reibung, im Maximo begleitenden Umstände ableiten zu können. In Hinsicht auf allgemeine Werthbestimmungen habe ich daher zu Obigem nichts weiter hinzuzufügen, aber ich werde noch einen Augenblick bei der Vergleichung der verschiedenen Werthe von f unter einander und bei der Deutung unmöglicher oder doppelter Werthe von f verweilen.

Es erhält f an den Stellen, wo $\varphi-\eta=0^0$ ist, so wie an den Stellen, wo $\varphi-\eta=\pm180^0$ ist, immer einen gröfsten oder kleinsten Werth, falls er möglich ist, und zwar:

1. wird der Werth von f, wenn er aus den obern Zeichen hervorgegangen ist, da ein Gröfstes, wo $\varphi-\eta=0^0$ ist, und da ein Kleinstes, wo $\varphi-\eta=\pm180^0$ ist;
2. wird der Werth von f, wenn er aus den untern Zeichen hervorgegangen ist, da ein Gröfstes, wo $\varphi-\eta=\pm180^0$ ist; da wo $\varphi-\eta=0^0$ wird, ist er, in diesem Falle unmöglich im Sinne unserer Aufgabe, ein Kleinstes als negativer Werth betrachtet.

Diese Maxima und Minima werden in No. 4 durch die unter II. stehende Bedingung ausgesprochen. Von der Realität dieser Maxima und Minima überzeugt man sich schon durch eine etwas aufmerksame Betrachtung der Gleichung (♁.). Aufser diesen gröfsten und kleinsten Werthen von f haben

sich im zweiten Falle, da wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu = 1$ ist, eine Reihe von unendlich grofsen Werthen von f ergeben, die einen Unterschied von vollen zwei rechten Winkeln in dem Werthe von $\varphi - \eta$ einnehmen; dieser Umstand wird durch die in No. 4 unter III. stehende Bedingung angedeutet. Endlich haben sich im dritten Falle, da wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist, an der Stelle, wo $\frac{\varrho^2}{d^2}\sin^2\nu \,.\, \sin^2(\varphi - \eta) = 1$ ist, reelle Werthe von f vorgefunden, welche die letzten ihrer Art sind, weil darüber hinaus imaginäre Werthe von f gebildet werden; diese Grenzwerthe von f sind in der unter IV. in derselben Nummer stehenden Bedingung enthalten.

Insbesondere zeichnet sich der dritte Fall, wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu > 1$ ist, dadurch vor den beiden übrigen aus, dafs in ihm bald gar kein Werth für f möglich ist, bald aber zwei zugleich. Da wo gar kein Werth für f gefunden wird, ist kein Gleichgewicht möglich. Diese Unmöglichkeit ist jedoch nicht absolut, denn sie bezieht sich blofs auf die in die Gleichungen (*B.*) eingeführte Voraussetzung, dafs nämlich beim Gleichgewichte die Reibung in ihrem Maximo thätig sein soll, und es ist leicht einzusehen, dafs in allen solchen Fällen das Gleichgewicht dadurch sich herstellen wird, dafs die Reibung nicht in ihrer vollen Stärke daran Antheil nimmt; denn indem die Reibung nur auf einen Theil ihrer ganzen Wirkung hingewiesen wird, geschieht dasselbe, als wenn in allen unsern Formeln statt der Zahl μ eine in demselben Verhältnisse kleinere Zahl μ' gesetzt würde, und da das kleinere μ' auch die aus μ abgeleiteten Gröfsen ν und $\sin\nu$ in entsprechende kleinere ν' und $\sin\nu'$ verwandeln würde, so müfste auch das Product $\frac{\varrho}{d}\sin\nu$ in ein kleineres $\frac{\varrho}{d}\sin\nu'$ übergehen, und es läfst sich offenbar jederzeit die Zahl μ' so klein wählen, dafs $\frac{\varrho}{d}\sin\nu' < 1$ wird, d. h. dafs das zuvor unmögliche Gleichgewicht jetzt möglich wird. Will man wissen, in welcher Stärke die Reibung in einem solchen Falle bei einem gegebenen Kraft-Ueberschusse p auftritt, so hat man nur zunächst aus der Gleichung (*b.*) den Werth f, und mit dessen Hülfe hierauf aus der Gleichung ($\mathfrak{d}$.) den Werth μ, welcher jetzt durch μ' zu bezeichnen ist, zu bestimmen. — Was endlich in diesem dritten Falle die doppelten Werthe von f für einerlei $\varphi - \eta$, und die daraus hervorgehenden zweierlei Gleichgewichtszustände betrifft, so ist deshalb zu bemerken,

dafs in beiden Arten des Gleichgewichts der dabei auf die Zapfenlager ausgeübte Druck stets in entgegengesetzte Hälften ihres Umkreises fällt. Bei dem Gleichgewichtszustande nämlich, welcher aus den obern Zeichen entspringt, macht nach No. 8. die Richtung des Druckes S' mit der Richtung des Druckes S, wenn $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist, den Winkel ν und zieht sich von da, während $\varphi-\eta$ alle übrigen zu möglichen Werthen von f führende Werthe annimmt, um 90^0 nach beiden Seiten hin; bei dem Gleichgewichtszustande hingegen, der aus den untern Zeichen hervorgeht, macht nach derselben Nummer die Richtung des fraglichen Druckes S' mit der bekannten Richtung des Druckes S, wenn $\varphi-\eta=\pm 180^0$ ist, den Winkel $180^0+\nu$, welche Richtung der vorigen, unter dem Winkel ν erscheinenden, gerade entgegengesetzt ist, und weicht von da, während $\varphi-\eta$ seine noch übrigen zum Gleichgewicht führenden Werthe durchläuft, ebenfalls um 90^0 nach beiden Seiten hin ab. Die verschiedenen Richtungen des Druckes S' beim Gleichgewichte nehmen sonach den ganzen Umkreis ein, dessen eine Hälfte die Richtungen des Druckes S' beim Gleichgewichte der einen Art, und dessen andere Hälfte die Richtung desselben Druckes beim Gleichgewichte der andern Art in sich aufnimmt. Denkt man sich also die Zapfenlager in der Richtung der Achse beliebig in zwei gleiche Hälften getheilt, so giebt es für einen und denselben Winkel $\varphi-\eta$ immer zwei Gleichgewichtszustände, von denen der eine den Druck auf die Zapfenlager in deren eine Hälfte, der andern hingegen in deren andere Hälfte wirft. Aus dieser Betrachtung geht hervor, dafs in dem dritten Fall stets ein Gleichgewichtszustand für jedes zuzulassende $\varphi-\eta$ herbei geführt werden kann, wenn gleich nur die eine Hälfte der cylinderförmigen Zapfenlager, und zwar in beliebiger Stellung, vorhanden ist, indem man die Art des Gleichgewichts jedesmal so wählen kann, dafs der Druck der Zapfen auf die Zapfenlager nach der Seite hin fällt, wo die gebliebene Hälfte der Zapfenlager dem Drucke zu widerstehen vermag. Gerade dadurch unterscheidet sich aber der dritte Fall von dem ersten und zweiten, in welchen beiden die Richtung des Druckes S' Aenderungen erleidet, die sich in der Regel nur auf einen kleinen Theil des Umkreises beschränken, und selbst da, wo $\frac{\varrho}{d}\sin\nu=1$ ist, erst einen halben Umkreis einnehmen.

10) So einfach die hier mitgetheilten Resultate auch sind, so will ich doch noch aus ihnen zu Gunsten der Ausübung Näherungs-Ausdrücke

ableiten, die noch einfacher sind, und in den meisten Fällen der Anwendung hinreichende Genauigkeit geben *). So lange nämlich μ und $\frac{\varrho}{d}$ kleine Brüche sind, von denen der erstere die Zahl $\frac{1}{10}$ und der andere die Zahl $\frac{1}{12}$ nicht übersteigt, erreicht λ in keinem Falle einen halben Grad, wie man sich überzeugt, wenn man in der Gleichung $\sin\lambda = \frac{\varrho}{d}\sin\nu.\sin(\varphi-\eta)$ setzt: $\sin(\varphi-\eta)=\pm 1$, wobei λ seinen möglich gröfsten absoluten Werth erreicht. Ferner wird man finden, dafs bei den angezeigten Werthen von μ und $\frac{\varrho}{d}$ die Zahl f, da wo sie am gröfsten und am kleinsten ist, von der Einheit nicht mehr als höchstens um ein Hunderttheil sich unterscheide. Bei noch geringern Werthen von μ und $\frac{\varrho}{d}$ wird, wie man sogleich einsieht, diese gröfste Abweichung nur noch geringer. Hat man also bei der Bestimmung der Kräfte auf ein Procent derselben nicht zu achten, und sieht man bei Winkelbestimmungen nicht auf einen möglichen Irrthum von weniger als einem halben Grade, so ist es, so lange μ nicht gröfser als $\frac{1}{10}$ und $\frac{\varrho}{d}$ nicht gröfser als $\frac{1}{12}$ wird, wie fast in allen Fällen der Anwendung geschieht, gestattet, für die Gleichungen (*a.*), (*b.*) und (*c.*) folgende noch weit bequemere zu setzen:

$$(\alpha.)\quad S' = S,$$

$$(\beta.)\quad p = \mu\frac{\varrho}{d}S,$$

$$(\gamma.)\quad \varphi' = \varphi+\nu.$$

Die Gleichung (γ.) ist, wie wir gesehen haben, völlig genau, wenn $\varphi=0$ oder $\varphi=\pm 180^0$ ist, und die Gleichungen (α.) und (β.) werden an der Stelle völlig genau, wo $f=1$ wird. Dies geschieht, wie wir bald finden werden, jedesmal wenn $\pm\cos(\varphi-\eta) = \frac{1}{2}\mu\frac{d^2-\varrho^2}{\varrho.d}$ ist, und ist also nur dann möglich wenn $\frac{1}{2}\mu.(d+\varrho)(d-\varrho) \overline{\overline{<}}\ \varrho.d$ ist. Bei dem Gebrauche der Gleichungen

---

*) Man erhält eine sehr genaue Näherungsformel für f, wenn man in der Gleichung ($\mathfrak{d}$.) das Glied unter dem Wurzelzeichen, welches von der vierten Dimension in Bezug auf μ und $\frac{\varrho}{d}$ ist, wegläfst. Eine solche Näherungsformel ist aber völlig überflüssig, weil die völlig genaue Berechnung von f nach den hier mitgetheilten Formeln wenigstens nicht mehr Umstände macht, als ein solcher Nothbehelf.

(α.), (β.) und (γ.) darf man jedoch nie vergessen, dafs sie nur in dem angezeigten Umfange der Werth μ und $\frac{\varrho}{d}$ den genannten Grad der Genauigkeit behalten, dafs aber da, wo μ oder $\frac{\varrho}{d}$ Werthe annehmen, die der Einheit sich beträchtlich mehr nähern, oder sie wohl gar noch übertreffen, wie dies in aufsergewöhnlichen Fällen bei dem $\frac{\varrho}{d}$ allerdings geschehen kann, durchaus die Gleichungen (a.), (b.) und (c.) in Verbindung mit den Gleichungen (♀.) und (♁.) zur Untersuchung der beim Gleichgewichte unter Mitwirkung der Reibung Statt findenden Umstände zugezogen werden müssen, wenn man nicht Gefahr laufen will, von der Wahrheit ganz und gar abweichende Resultate zu erhalten. Häufig hat die Maschinenlehre bei ihren Bestimmungen blofs den Kraftzuwachs p zu wissen nöthig, und dann ist der aus der Gleichung (β.) hervorgehende mögliche Irrthum um so weniger zu fürchten, da seine absolute Gröfse, wegen des in dieser Gleichung vorhandenen Factors $\mu\frac{\varrho}{d}$, nie mehr als den 10000ten Theil des Druckes S ausmachen kann, vorausgesetzt dafs μ und $\frac{\varrho}{d}$ die ihnen hier angewiesenen Schranken nicht überschreiten.

11) Schon Euler in seiner *Theoria motus corp. solid. Suppl. Cap. III.* ist bei der Bahandlung der Zapfenreibung von Gleichungen ausgegangen, welche im Wesentlichen mit den Gleichungen (B.), aus denen die ganze vorstehende Entwicklung hervorgegangen ist, übereinstimmen; aber die von mir erzielte Form der daraus abgeleiteten Resultate ist von der gewöhnlichen so abweichend, dafs ich gerade deshalb vorstehende Untersuchung einer öffentlichen Bekanntmachung nicht unwerth gehalten habe. Jene Form macht es nicht nur leicht, aus den allgemein gültigen Gleichungen (a.), (b.) und (c.) die abgekürzten, aber demungeachtet noch in einem sehr grofsen Umfange brauchbaren Gleichungen (α.), (β.) und (γ.) abzuleiten, die da, wo die Kürze der Rechnung vorzugsweise beabsichtigt wird, mit Vortheil eintreten können; sondern, was noch wichtiger ist, sie deutet auf die Möglichkeit hin, dafs man bei der Berechnung von zusammengesetzten Maschinen die allgemeinen Formeln beibehalten könne, ohne dafs dadurch der Bau der Ausdrücke bedeutend vergröfsert, oder der Sinn ihrer Bestandtheile durch Einführung willkürlicher

Abkürzungszeichen verhüllt würde. In manchen Lehrbüchern der Maschinenlehre findet man Formeln unter nicht völlig genauen Voraussetzungen (vgl. Eitelwein's Statik. B. 1. S. 295. Anmerk. und §. 238.) entwickelt, welche in Hinsicht auf Annäherung an die volle Wahrheit mit den abgekürzten (α.), (β.) und (γ.) auf gleicher Stufe stehen, und ein Element mehr als diese in sich aufnehmen. Das Unbefriedigende in der Annahme, welche sich dergleichen Lehrbücher gestatten, besteht aber darin, dafs sie die Resultate der thätigen Kräfte $p, P, P', P'', \ldots.$ für die Gröfse des die Reibung erzeugenden Druckes nehmen; aber dieser Druck, der seiner Natur nach nothwendigerweise senkrecht gegen die Ebene, in welcher sich die Zapfen und Zapfenlager berühren, gerichtet sein mufs, kann nur aus Kräften hervorgehen, die unter sich im Gleichgewichte stehen, welches nicht bei den Kräften $P, P', P'', \ldots.$, aber wohl bei den Kräften $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{P}'', \ldots.$ der Fall ist. Nimmt man blofs diese letztern zur Bestimmung des Druckes und der daraus hervorgehenden Reibung, so hat man dabei allerdings die Reibung selbst und den Kraftzuwachs p vernachläfsigt, aber man erhält doch die Näherungsformeln (α.) und (β.), welche der Natur der Sache angemessener sind, und der Wahrheit im Allgemeinen noch eben so nahe, oft noch näher liegen, als die unter jener Voraussetzung sich ergebenden Gleichungen. Ein solches Schwanken in der Bedeutung des Wortes Druck scheint auch Poisson in seinem *Traité de Mécanique* (T. I. p. 182.), dessen Darstellung übrigens ganz auf denselben Grundlagen, wie die hier gegebenen, ruht, zu der Aeufserung verleitet zu haben: „dafs die Reibung stets dazu beitrage, den Druck, welchen die Achse auszuhalten hat, zu vermindern.“ Poisson zieht nämlich diesen Schlufs aus der oben erhaltenen Gleichung

$$(1+\mu^2)S'^2 = S^2+2pS\cos(\varphi-\eta)+p^2,$$

deren rechte Seite nichts anders ist, als das Quadrat der aus den Kräften S und p, oder, was dasselbe ist, aus den Kräften $p, P, P', P'', \ldots.$ hervorgehenden Totalkraft. Bezeichnet man daher diese Resultante mit R, so verwandelt sich jene Gleichung in diese:

$$S' = \frac{R}{\sqrt{(1+\mu^2)}},$$

welche allerdings zu erkennen giebt, dafs S' stets kleiner als R ist, aber zu der von Poisson daraus gezogenen Folgerung nicht berechtigt, weil R nicht der Druck auf die Achse ist. Der aus der Kraft R ohne Zutritt der

Reibung hervorgehende Druck auf die Achse ist vielmehr S, derselbe nämlich welcher aus den Kräften $P, P', P'', \ldots$ ohne p hervorgeht, weil die Kraft p ohne Zutritt der Reibung in der That blofs auf Bewegung und nicht auf Druck verwendet werden wird; und der Annahme, dafs jederzeit $S' < S$ sein werde, wird durch die Gleichung (a.) in Verbindung mit der (♀.) oder (♂.) geradezu widersprochen, weil der Werth von f nach Umständen bald gröfser und bald kleiner als 1 werden kann.

12) Ehe ich nun zur Behandlung der losen Rolle übergehe, mufs ich zuvor eines Umstandes gedenken, der bei der Bestimmung der Reibung zweier Körper an einander, wenn jeder an sich beweglich ist, eine specielle Berücksichtigung verdient, und Ursache eines von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Verfahrens bei solchen Bestimmungen wird.

Aus den in der ersten Nummer angeführten Beobachtungen und Schlüssen hat sich nämlich blofs ergeben, dafs zwei mit der Kraft S gegen einander gedrückte Körper einem gegenseitigen Verschieben derselben in der Richtung der Berührungs-Ebene widerstehen, und dafs, im Falle der eine von beiden Körpern unbeweglich ist, die Reibung jedes Bestreben zu einem solchen Verschieben des beweglichen Körpers auf dem unbeweglichen aufzuheben im Stande ist, so lange dieses Bestreben eine bestimmte, dem Drucke S proportionale Gröfse μS nicht übersteigt. Denken wir uns nun zwei durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte von der Gröfse S an einander geprefste Körper, von denen aber keiner durch irgend Widerstände anderer Art in seiner Fähigkeit, sich zu bewegen, noch neue Beschränkungen erleidet, und bringen wir an diese Körper in der Richtung der Reibungs-Ebene zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte, jede von der Gröfse Y, an, so werden diese Kräfte ein Verschieben der beiden Körper an einander beabsichtigen und auch in der That bewirken, wenn sie den Widerstand, welchen die Reibung einem solchen Verschieben entgegensetzt, zu überwinden im Stande sind.

Zuvörderst ist nun nicht schwer einzusehen, dafs der gröfste Werth von Y, bei welchem eben noch ein Auseinandergehen der beiden Körper verhindert wird, μS ist, derselbe nämlich, welcher in dem einen Körper wahrgenommen wird, wenn der andere unbeweglich ist; denn die hier thätig wirksame, gleich grofse Gegenkraft in dem zweiten beweglichen Körper, wird dort durch eine der Action an Stärke gleich kommende Reaction in der festen Unterlage vertreten. Die Summe der

durch die Reibung in beiden Körpern aufgehobenen Gegenkräfte kann also jedesmal bis zu dem Werthe $2\mu S$ ansteigen, aber diesen Werth nicht übersteigen.

Dieselbe Bestimmung des gesammten Reibungswiderstandes scheint zum Andern auch dann noch beibehalten werden zu müssen, wenn die beiden Körper, statt wie eben durch gleiche, jetzt durch ungleiche, aber der Richtung nach noch immer entgegengesetzte Kräfte X und Y zu einer Bewegung in der Richtung der Reibungs-Ebene nach entgegengesetzten Seiten angetrieben werden*). So lange nämlich die Summe der beiden Kräfte X und Y den Werth $2\mu S$ nicht übersteigt, wird auch kein Verschieben der beiden Körper an einander eintreten, sondern es wird eine bloſse Vertheilung der Kräfte X und Y über beide Körper, auf ähnliche Weise, als wenn beide nur Theile eines und desselben festen Körpers wären, geschehen, welche eine, beiden Körpern gemeinsame Bewegung von solcher Gröſse, wie sie der zwischen beiden Kräften X und Y statt findende Unterschied nach sich zieht, zur Folge hat.

Die hier versuchte Behandlung der losen Rolle unterscheidet sich von der, so viel ich weiſs, bisher allgemein üblichen gerade darin, daſs sie, der eben geschehenen Betrachtung gemäſs, als Bedingung des Nichtverschiebens zweier an sich beweglichen Körper an einander fordert, daſs die Summe der in beiden nach entgegengesetzten Seiten thätigen Kräfte X und Y den Werth $2\mu S$ nicht übersteige, aber über die Gröſse der einzelnen Kräfte X und Y selbst zum Voraus nicht verfügt, sondern diese Entscheidung lediglich der Rechnung überläſst. Es ist übrigens leicht einzusehen, daſs die Bedingung des Nichtverschiebens in einer noch allgemeinern, zu unserm Zwecke jedoch unnöthigen Form gegeben werden kann.

Der Kürze wegen wollen wir obige allgemeinere Bedingung des Nichtverschiebens zweier beweglicher Körper an einander immer dadurch bezeichnen, daſs wir sagen: das Maximum der Reibung $2\mu S$ kann mit einem beliebigen Theile in dem einen Körper auftreten, sich in ihn werfen und mit dem übrigen Theile in den andern Körper.

---

*) Dieses Gesetz, so wahrscheinlich man es auch finden mag, stelle ich doch nur problematisch hin, weil es in der That eine besondere Bestätigung durch Versuche verlangt, da zu ihm die noch wenig bekannten Gesetze der Vertheilung von Kräften aus einem Körper in den andern mittelst der Reibung sich gesellen.

13) Aufgabe 3. Über eine lose Rolle, deren Wände in verticaler Richtung schweben, ist ein Seil gezogen, dessen eines Ende an einer Stelle unverrückbar fest gemacht worden ist, und an diese Stelle ist mittelst Zapfen vom Halbmesser ϱ und Zapfenlagern*) eine vertical abwärts wirkende Last Q geknüpft, beide Enden des Seils aber wirken vertical aufwärts; man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts unter Mitwirkung der Reibung im Maximo.

Auflösung. Da bei der in dieser Aufgabe vorkommenden Anordnung zwei verschiedene Theile auftreten, wovon jeder an sich beweglich ist, und in seiner Bewegung durch den andern nur vermöge des Zusammenhanges zwischen Zapfen und Zapfenlager gehemmt wird, so kann nach den allgemeinsten Regeln der Statik in der hier zu behandelnden Verbindung nur dann das Gleichgewicht vorhanden sein, wenn jeder Theil für sich in Folge der in ihm thätigen Kräfte und des Widerstandes, welcher ihm aus der Art seiner Verknüpfung mit dem andern Theile erwächst, im Gleichgewichte sich befindet. Nennen wir nun S den im Falle des Gleichgewichts zwischen Zapfen und Zapfenlagern sich bildenden, senkrecht gegen ihre gemeinschaftliche Berührungs-Ebene gestellten, und deshalb, weil wir hier cylinderförmige Zapfen und Zapfenlager voraussetzen, durch die Umdrehungs-Achse laufenden, gegenseitigen Druck, und φ den Winkel, welchen die Richtung dieses Druckes in der Rolle mit der Verticallinie macht, so ist $2\mu S$ der gröfste Werth für die zwischen Zapfen und Zapfenlagern sich bildende Reibung. Wäre einer von den beiden Theilen der hier behandelten Vorrichtung fest, so wäre die Hälfte μS der ganzen Reibung als widerstehende Kraft unbedenklich in den andern Theil zu legen; da aber hier beide Theile beweglich sind, so läfst sich nicht im Voraus schon angeben, ob die Reibung als widerstehende Kraft blofs in dem einen, oder blofs in dem andern, oder theils in dem einen und theils in dem andern Theile thätig sein werde; vielmehr mufs die Beantwortung dieser Frage eben erst aus der Natur unserer Aufgabe selbst hergeholt werden. Wir wollen daher den in der Rolle sich bildenden Theil der Reibung mit x bezeichnen, so ist nach dem, was schon oben in Nr. 12. auseinander gesetzt worden ist, $2\mu S - x$

*) Es ist für die Rechnung ganz gleichgültig, ob die Zapfen an der Rolle fest sind und sich in den mit der Last vereinten Zapfenlagern drehen, oder ob die Zapfenlager an der Rolle fest sind und sich um die mit der Last vereinten Zapfen drehen.

derjenige Theil der Reibung, welcher in dem mit der Rolle verknüpften Theile der Vorrichtung, an welchem die Last befestigt ist, wirksam, und dessen Richtung der des Theiles x gerade entgegen gesetzt ist, vorausgesetzt, dafs wir fortwährend nur den Fall, wo die Reibung in ihrem Maximo auftritt, vor Augen behalten. Nennen wir nun noch r den Halbmesser der Rolle, P und P' die auf beiden Seiten des um die Rolle geschlungenen Seils in diesem Seile thätigen Kräfte, von denen P die gröfsere sein soll, so wirken offenbar in dem Theile der ganzen Vorrichtung, welcher die Rolle ausmacht, erstlich die Kräfte P und P' vertical aufwärts und in der Entfernung r von der Umdrehungs-Achse, zweitens der durch die Umdrehungs-Achse gerichtete Druck S unter dem Winkel φ gegen die lothrechte Richtung, und endlich drittens noch die aus der Reibung hervorgehende Kraft x in der Entfernung des Zapfenhalbmessers ϱ von der Umdrehungs-Achse und in einer Richtung, die senkrecht auf der des Druckes S steht, und einem beabsichtigten Verschieben der Zapfen und Zapfenlager an einander gerade entgegenläuft. Das Gleichgewicht dieses Theils der Vorrichtung wird mithin, den bekanntesten Sätzen der Statik gemäfs, durch nachstehende Gleichungen bedingt:*)

$$1.\quad r(P-P') = \varrho x,$$
$$2.\quad S.\cos\varphi = P+P'-x\sin\varphi,$$
$$3.\quad S.\sin\varphi = x\cos\varphi,$$

wobei der Angriffspunct sowohl als der Winkel φ auf der Seite von der Verticalen liegend gedacht worden ist, auf welcher die überwiegende Kraft P liegt. Diese Annahme entspricht der Wirklichkeit. Die entgegengesetzte Annahme würde eine Änderung in den darauf Bezug nehmenden Vorzeichen veranlassen, dann aber die Rechnung selbst das Irrige der Annahme wieder gut machen.

In dem andern Theile der Vorrichtung, an der Stelle wo der Druck zwischen den Zapfen und ihren Lagern sich bildet, wirkt erstlich die Last Q, zweitens der Druck S, und endlich drittens der Theil $2\mu S-x$ der Reibung, in Richtungen, welche beziehlich denen der Kräfte

*) Man wird ohne mein Erinnern sogleich gewahr werden, dafs das Gewicht der Rolle blofs der Einfachheit halber aufser Acht gelassen worden ist; eben so ist blofs der Kürze halber r Halbmesser der Rolle genannt worden, obgleich dieser Buchstabe in der Rechnung die Entfernung der Kräfte P und P' von der Umdrehungs-Achse, d. h. den um die halbe Seildicke vergröfserten Halbmesser der Rolle vorzustellen hat.

P und P', des Druckes S und der Reibung x im vorigen Theile entgegengesetzt sind. Das Gleichgewicht in diesem andern Theile der Vorrichtung wird mithin, wenn man sich alle Kräfte an der gedachten Stelle in gerade entgegengesetzter Richtung genommen vorstellt, wodurch in der Sache nichts geändert wird, den Elementen der Statik gemäfs, durch nachstehende Gleichungen bedingt:

$$4.\quad S\cos\varphi = Q-(\mu S - x)\sin\varphi,$$
$$5.\quad S\sin\varphi = (2\mu - x)\cos\varphi,$$

wobei noch dieselbe Lage des Angriffspunctes, wie vorhin, vorausgesetzt worden ist.

Aus der 3ten und 5ten Gleichung erhält man sogleich

$$x = \mu S,$$

und nun aus der 2ten und 4ten

$$P+P' = Q$$

und aus der dritten

$$\operatorname{tang}\varphi = \mu;$$

ferner folgt nun aus der 2ten, mit Zuziehung der für x und $P+P'$ gefundenen Werthe,

$$S = \frac{Q}{\cos\varphi+\mu\sin\varphi},$$

oder, wenn man für μ den Werth $\operatorname{tang}\varphi$ setzt und zusammenzieht,

$$S = Q\cos\varphi.$$

Dadurch verwandelt sich der vorhin für x gefundene Werth in folgenden:

$$x = \mu Q\cos\varphi,$$

und mittelst dieses Werthes erhält man aus der 1sten Gleichung:

$$P-P' = \mu\frac{\varrho}{r}Q\cos\varphi.$$

Aus den für $P+P'$ und $P-P'$ gefundenen Werthen fliefst nun:

$$P = \tfrac{1}{2}Q\left(1+\mu\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right),\quad P' = \tfrac{1}{2}Q\left(1-\mu\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right).$$

Da übrigens $\operatorname{tang}\varphi=\mu$, so wird $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$; setzt man daher den bekannten Werth $\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}=f$, so gehen obige, für φ, S, x, P und P' gefundenen Werthe über in:

$$\operatorname{tang}\varphi=\mu,\quad S=fQ,\quad x=\mu f.Q,$$
$$P=\tfrac{1}{2}Q\left(1+\mu f\frac{\varrho}{r}\right),\quad P'=\tfrac{1}{2}Q\left(1-\mu f\frac{\varrho}{r}\right),$$

welche alle einzelnen Fragepuncte der vorgelegten Aufgabe beantworten.

Die gesuchten Bestimmungsstücke hängen hier von der Zahl f auf ähnliche Weise ab; wie die in Aufgabe 2. gefundenen von der dortigen Zahl f, und eine ganz einfache Betrachtung giebt auch hier zu erkennen, dafs wenn μ den Werth $\frac{1}{10}$ nicht übersteigt, wie dies unter den gewöhnlichen Umständen stets der Fall ist, so kann man $f=1$ setzen, ohne dafs daraus in den einzelnen Angaben ein Fehler hervorgehen könnte, der mehr als 1 Procent betrüge. Eine Unrichtigkeit von so geringer Gröfse ist aber kaum in irgend einem Falle der Anwendung in Anschlag zu bringen, weshalb fast ohne Ausnahme obige Formeln noch dadurch verkürzt werden können, dafs man die Zahl f aus ihnen ganz wegläfst.

14) Da beim Gleichgewichte ohne Reibung $P=P'=\frac{1}{2}Q$ ist, so drückt $\frac{1}{2}\mu\frac{\varrho}{r}fQ$ offenbar die durch die Reibung veranlafste Änderung in jeder der Kräfte P und P' aus, welche in der einen eine Vermehrung, in der andern dagegen eine Verminderung bewirkt. Eine weitere Zergliederung zeigt, wie dieses und alle übrigen Resultate unter sich vollkommen übereinstimmen. So ist in Folge unserer Behandlung nicht blofs der gegenseitige Druck, sondern auch die Reibung in beiden Theilen der Vorrichtung der Gröfse nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt; wenn man sich daher, was schon bei existirendem Gleichgewichte stets erlaubt ist, alle einzelnen Theile des Systems zu einem festen Ganzen verbunden vorstellt, so mufs dieses Ganze nothwendigerweise blofs durch die unter sich parallelen Kräfte P, P' und Q im Gleichgewichte erhalten werden, es mufs also sein $P+P'=Q$, wie in der That der Fall ist, und die Momente aus den Kräften P und P' in ihre Entfernungen vom Unterstützungspuncte müssen noch aufserdem einander gleich sein. Dies letztere läfst sich aber so zeigen. Weil nämlich r die Entfernung der Kräfte P und P' von der Umdrehungs-Achse bezeichnet, und der durch den Angriffspunct gezogene Radius mit der Verticallinie auf der Seite der überwiegenden Kraft P den Winkel φ bildet, so ist $\varrho\sin\varphi$ die Entfernung des Angriffspunctes von der Verticallinie auf derselben Seite, und als Folge $r-\varrho\sin\varphi$ die Entfernung der Kraft P, so wie $r+\varrho\sin\varphi$ die Entfernung der Kraft P' von dem Angriffspuncte; die vorhin erwähnten Momente sind also:

$$P(r-\varrho\sin\varphi) \text{ und } P'(r+\varrho\sin\varphi).$$

Aus $\tang\varphi=\mu$ erhält man aber $\sin\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$, oder $\sin\varphi=uf$. Setzt

man diesen Werth für $\sin\varphi$ in die eben erhaltenen Ausdrücke der beiden Momente, so werden diese:

$$rP\left(1-\mu\frac{\varrho}{r}f\right) \text{ und } rP'\left(1+\mu\frac{\varrho}{r}f\right),$$

und es zeigt sich nun auf der Stelle, dafs diese Momente einander gleich sind, und dafs sonach alle Bedingungen des Gleichgewichts in der als ein festes Ganze betrachteten Vorrichtung erfüllt sind, wenn man nur noch für P und P' ihre vorhin gefundenen Werthe setzt.

Die hier erhaltenen Resultate weichen von den auf gewöhnlichem Wege erhaltenen nicht ab, weil die in ihnen vorkommenden Bedingungen eine gleiche Vertheilung der Reibung über beide Theile der Vorrichtung nach sich ziehen; um daher über die eigentliche, bei ungleicher Vertheilung sich erst recht hervorhebende Function der Reibung in der losen Rolle noch gröfseres Licht zu verbreiten, und zugleich um den Grund einer bei dem Gebrauche dieser Vorrichtung stets wahrzunehmenden Seitenbewegung klar nachzuweisen, will ich an die vorige Aufgabe noch folgende damit verwandte anreihen.

15) Aufgabe 4. Es bleibe alles noch ganz so wie in der vorigen Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, dafs die beiden Enden des Seils jetzt nicht mehr vertical aufwärts, sondern, zwar noch unter sich parallel, aber in einer Richtung wirken sollen, die mit der Verticallinie einen gegebenen Winkel α bildet; man soll in diesem Falle die Bedingungen des Gleichgewichts mit Zuziehung der Reibung im Maximo angeben.

Auflösung. Stellt man bei dieser Auflösung dieselben Betrachtungen an, wie in der vorhergehenden, und behält man alle dortigen Bezeichnungen auch hier noch in demselben Sinne bei, so erhält man auf eine ganz ähnliche Weise, als Bedingungen des Gleichgewichts für den Theil der Vorrichtung, welcher die eigentliche Rolle ausmacht, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1.\ (P-P')r = \varrho x,\\ &2.\quad S\cos\varphi = (P+P')\cos\alpha - x\sin\varphi,\\ &3.\quad S\sin\varphi = (P+P')\sin\alpha + x\cos\varphi, \end{aligned}$$

und für den andern Theil der Vorrichtung folgende:

$$\begin{aligned} &4.\quad S\cos\varphi = Q-(2\mu S-x)\sin\varphi,\\ &5.\quad S\sin\varphi = (2\mu S-x)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Um in den Gliedern, worin Theilkräfte der Reibung vorkommen, ein doppeltes Vorzeichen zu vermeiden, ist festgesetzt worden, dafs die Reibung stets unter dem Winkel $\varphi+90^0$ auftritt, welches darauf hinausläuft, alle Winkel nach der Seite hin zu zählen, nach welcher die Rolle von der Reibung zu einer Drehung angereizt wird. Diese Anordnung in der Art die Winkel zu beziehen, ist dieselbe, welche schon in Aufgabe 2. gebraucht worden ist, und läfst sich hier wie dort jedesmal aus den unmittelbaren Angaben der Aufgabe noch vor aller Rechnung leicht ins Werk setzen.

Aus der 2ten und 3ten dieser Gleichungen erhält man durch Elimination der Gröfse x:

$$S = (P+P')\cos(\alpha-\varphi),$$

und aus der 4ten und 5ten durch Elimination von $\mu S - x$:

$$\text{I.} \quad S = Q\cos\varphi,$$

woraus ferner folgt:

$$\text{II.} \quad P+P' = Q\frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)};$$

sodann erhält man aus der 5ten Gleichung, mit Zuziehung des für S gefundenen Werthes,

$$\text{III.} \quad x = Q(2\mu\cos\varphi - \sin\varphi),$$

und aus der ersten Gleichung, mit Berücksichtigung des eben für x gefundenen Werthes:

$$\text{IV.} \quad P-P' = \frac{\varrho}{r}Q(2\mu\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Durch Addition der 3ten und 5ten Gleichung erhält man

$$2S\sin\varphi = (P+P')\sin\alpha + 2\mu S\cos\varphi;$$

setzt man aber in diese Gleichung für S und $P+P'$ ihre eben erhaltenen Werthe, so ergiebt sich

$$2(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)\cos(\alpha-\varphi) = \sin\alpha,$$

aus der der Winkel φ in folgender Weise sich bestimmen läfst. Führt man nämlich einen Winkel ν von der Beschaffenheit ein, dafs $\operatorname{tang}\nu = \mu$, so verwandelt sich vorstehende Gleichung in folgende:

$$2\sin(\varphi-\nu)\cos(\alpha-\varphi) = \sin\alpha\,.\cos\nu,$$

und diese geht, nach einer bekannten trigonometrischen Formel, über in:

$$\sin(\alpha-\nu) + \sin(2\varphi-\alpha-\nu) = \sin\alpha\cos\nu,$$

woraus sich nun, nachdem $\sin(\alpha-\nu)$ entwickelt worden ist, sofort ergiebt:

$$\text{V.} \quad \sin(2\varphi-\alpha-\nu) = \cos\alpha\sin\nu.$$

Hat man nun erst aus der letzten Gleichung (V.) den Winkel φ gefunden, so dienen dann die Gleichungen (I.), (II.), (III.) und (IV.) zur Bestimmung aller noch übrigen unbekannten Stücke der Aufgabe. Die Gleichung (V.) geht, was auch die Natur der Sache verlangt, für $\alpha = 0$ in die entsprechende Gleichung der vorigen Aufgabe, nämlich in die Gleichung $\tang \varphi = \mu$ über; denn für $\alpha = 0$ verwandelt sich die Gleichung (V.) in $\sin(2\varphi - \nu) = \sin \nu$, woraus erstlich $\varphi = \nu$ und dann auch $\tang \varphi = \tang \nu = \mu$ folgt. Nachdem man diesen Übergang erkannt hat, hält es nicht mehr schwer, einzusehen, dafs unter derselben Voraussetzung auch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) und (IV.) in die analogen der vorigen Aufgabe übergehen.

16) Aus den hier erhaltenen Resultaten lassen sich einige nicht uninteressante Folgerungen ziehen, die wir nicht aufser Acht lassen wollen. Da nämlich der Werth x seiner Natur nach nicht über die Grenzen 0 und $2\mu S$ hinaus fallen kann, so folgt aus der Gleichung (III.) in Verbindung mit der (I.), dafs $2\mu - \tang \varphi$ nicht über die Grenzen 0 und 2μ, oder $\tang \varphi$ über die Grenzen 2μ und 0 hinaus fallen können. Da wo $\tang \varphi = 2\mu$, ist $x = 0$, und wo $\tang \varphi = 0$, da ist $x = 2\mu S$; im erstern Falle liegt also von der Reibung gar nichts in der Rolle, sondern alle in dem mit der Last vereinten Theile, im andern Falle hingegen liegt die ganze Reibung in der Rolle und nichts davon in jenem Theile der Vorrichtung. Um nun die Werthe zu finden, welche an jenen Grenzen dem Winkel α im Zustande des Gleichgewichts entsprechen, müssen wir die Gleichung (V.) nach α auflösen. Dadurch erhält man:

$$\tang \alpha = \frac{2 \tang \varphi - 2 \tang \nu}{1 - \tang \varphi (\tang \varphi - 2 \tang \nu)},$$

oder, wenn man für $\tang \nu$ ihren Werth μ setzt:

$$\tang \alpha = \frac{2 \tang \varphi - 2\mu}{1 - \tang \varphi (\tang \varphi - 2\mu)}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung findet man nun, dafs an der Grenze, wo $\tang \varphi = 2\mu$ ist, $\tang \alpha = 2\mu$ werde, und dafs an der Grenze, wo $\tang \varphi = 0$ ist, $\tang \alpha = -2\mu$ sei. Es erhellet aus dieser Betrachtung, dafs an der losen Rolle die Last Q mit den Kräften P und P', bei gar verschiedener Lage der Enden des Seils gegen die Verticallinie, unter sich im Gleichgewichte sich befinden könne; jedesmal nämlich, so lange der Winkel α, welchen die Richtung des Seils diesseits oder jenseits der Verticallinie

mit dieser macht, nicht so grofs wird, dafs seine Tangente den Werth 2μ übersteigt. Der Unterschied in diesen verschiedenen Gleichgewichtszuständen ist blofs darin begründet, dafs die Reibung $2\mu S$ in jedem auf eine andere Weise sich über die Zapfen und Zapfenlager vertheilt, und an den Grenzen, wo $\tang\alpha = \pm 2\mu$ wird, liegt die Reibung entweder ganz in den Zapfen, oder ganz in den Zapfenlagern. Eine genaue Berücksichtigung der Art und Weise, wie die Beziehung der Winkel in dieser Auflösung festgesetzt worden ist, giebt zu erkennen, dafs wenn man sich so vor die Ebene, worin die wirkenden Kräfte liegen, sich hingestellt denkt, dafs die überwiegende Kraft P der schwächer wirkenden P' zur Rechten liegt, und nun den Gleichgewichtszustand in's Auge fafst, wobei die beiden Enden des Seils zur Linken von der durch ihren obersten Punct gehenden Verticallinie abweichen, und mit dieser einen Winkel machen, dessen Tangente $= 2\mu$ ist, so ist auch $\tang\varphi = 2\mu$, d. h. der Druck S erzeugt sich in einer mit den Enden des Seils parallelen Richtung, und die Reibung $2\mu S$ liegt dann ganz und gar in dem Theile der Vorrichtung, durch den die Last Q mit der Rolle zusammenhängt; fafst man dagegen den Gleichgewichtszustand in's Auge, wo die Enden des Seils zur Rechten von der durch ihren obersten Endpunct laufenden Verticallinie abweichen und mit dieser einen Winkel bilden, dessen Tangente $= 2\mu$ ist, so ist in diesem Falle $\tang\varphi = 0$, d. h. der Druck S zwischen den Zapfen und ihren Lagern bildet sich in verticaler Richtung, und die dann horizontal wirkende Reibung $2\mu S$ hat jetzt ganz und gar ihren Sitz in der Rolle. Beziehen wir daher die jedesmalige Gleichgewichtslage der Vorrichtung auf die durch den Aufhängepunct der Enden des Seiles gehende Verticallinie und nennen Lage A jede nicht lothrechte, wobei das Ende des Seils, woran die gröfsere Kraft P wirket, nach aufsen gekehrt ist, Lage B dagegen diejenige, wobei dasselbe Ende des Seils nach innen gekehrt ist, so hat sich aus der bisherigen Untersuchung ergeben:

1. dafs mit der äufsersten Lage A ein verticaler Druck S und der Sitz der vollen Reibung $2\mu S$ in der Rolle, verknüpft sei;
2. dafs mit der äufsersten Lage B ein mit den Enden des Seils paralleler Druck S, und der Sitz der vollen Reibung $2\mu S$ in dem mit der Rolle verbundenen Theile, woran die Last wirkt, verknüpft sei;
3. endlich dafs, was bereits in der vorigen Aufgabe erwiesen worden ist, bei einer Lage, welche zwischen den äufsersten Lagen A und B

gerade das Mittel hält (d. h. wobei die Enden des Seils vertical herabhängen), der Druck S sich in einer Richtung erzeugt, die mit der Verticallinie einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \mu$ ist, und daſs in diesem Falle die Reibung $2\mu S$ sich in gleichen Theilen auf die Zapfen und deren Lager vertheilt.

17) Aus Vorstehendem läſst sich nun leicht der Umfang angeben, innerhalb welches Veränderungen im Gleichgewichtszustande der losen Rolle eintreten können, und zugleich die Function nachweisen, welche dabei jedesmal die Reibung auf sich nimmt. Stellen wir uns nämlich die mit einer losen Rolle durch Zapfen und Zapfenlager verbundene Last frei schwebend und die ganze Vorrichtung in ihrem natürlichen Gleichgewichtszustande vor, wobei jedes Ende des Seils die halbe Last Q trägt, der Druck gegen Zapfen und Zapfenlager in verticaler Richtung geschieht, und die Reibung Null ist, weil sie durch keine Ursache zur Thätigkeit aufgefordert wird, und daſs z. B. dem unbefestigten Ende des Seils eine Überwucht von solcher Gröſse mitgetheilt werde, daſs zwar mit Zuziehung der Reibung dadurch noch kein Verschieben zwischen den Zapfen und ihren Lagern eintreten kann, aber doch die Reibung veranlaſst wird, sich bis an ihr Maximum hinauf zu steigern; so wird die Reibung im ersten Augenblicke angewiesen, ihre ganze Thätigkeit bloſs in die Rolle zu werfen, weil im ersten Augenblicke aller Trieb zur Bewegung bloſs in der Rolle erweckt wird. Und weil überdies der Druck zwischen den Zapfen und ihren Lagern in verticaler Richtung geschieht, so wird die äuſserste Lage A diejenige sein, welche unter solchen Umständen der ganzen Vorrichtung ihrer Natur nach zukommt. Auch wird in der That unter den obwaltenden Umständen die ganze Vorrichtung angetrieben werden, jene äuſserste Lage A einzunehmen, und sie müſste sich auch wirklich in Folge der in horizontaler Richtung auftretenden und nur nach jener Seite hinstrebenden Reibung in Bewegung setzen, um die entsprechende Stellung einzunehmen, wenn sich einer solchen Bewegung nicht die mit der losen Rolle stets verknüpfte pendelartige Beschaffenheit der ganzen Vorrichtung entgegensetzte. Durch die pendelartige Natur der ganzen Vorrichtung aber wird die gedachte Bewegung bloſs in ein Verrücken des Angriffspunctes und in eine damit verbundene Änderung in der Richtung des Druckes umgewandelt, so lange bis der in Aufgabe 3. abgehandelte Gleichgewichtszustand eingetreten ist; dann aber ist auch eine gleichförmige Vertheilung der Reibung, welche im

ersten Augenblicke blofs auf die Rolle sich hinzuwerfen gezwungen war, über die Zapfen und Zapfenlager bereits geschehen. Es ist übrigens leicht einzusehen, dafs bei einem plötzlichen Eintritte der Überwucht, und noch mehr bei fortdauernder Veranlassung dazu, wie dies z. B. bei einem stetigen Heben der Last der Fall wäre, auch eine wirkliche Seitenbewegung beginnen, und im letztern Falle auch eine bleibende, der äufsersten Lage A mehr oder weniger sich annähernde Stellung der ganzen Vorrichtung eintreten müsse. Die Gröfse des Winkels α, unter welchem sich die ganze Vorrichtung bei einem ununterbrochenen, gleichförmigen Heben der Last einstellt, hängt, wie man sogleich gewahr wird, nicht blofs von der Gröfse des Reibungscoëfficienten, sondern auch von der Geschwindigkeit, womit die Bewegung geschieht, ab. Das Problem der losen Rolle ist nämlich im Allgemeinen, so lange der Winkel α noch unbestimmt bleibt, eine unbestimmte Aufgabe; diese Unbestimmtheit verschwindet jedoch, sobald das Problem nicht mehr zur Statik, sondern zur Mechanik gerechnet wird, weil dann die Art, wie sich die Reibung über beide Theile der Vorrichtung vertheilt, aus der Natur der die Bewegung bewirkenden Kräfte erkannt werden kann.

Für den Fall, wo die Last Q an der losen Rolle durch Menschen, ruckweise in die Höhe gezogen wird, ergeben sich noch aus obigen Betrachtungen folgende besondere Bemerkungen. Wenn nach geschehenem ersten Zuge durch die Menschen die ganze Vorrichtung in eine Lage A, die mehr oder weniger der äufsersten Lage A sich annähern kann, gekommen ist, und nun nach aufgehobener Anziehung des Seils die ganze, Vorrichtung sich selber überlassen bleibt, so wird sie, gleich einem Pendel, wiewohl in verwickelterer Art, Schwingungen eingehen, und so lange sie sich selber überlassen bleibt, abwechselnd in Lagen A und in Lagen B kommen. Je nachdem nun der zweite Zug durch Menschen in einer oder in der andern von diesen Lagen geschieht, wird der Erfolg ein anderer sein. Geschieht nämlich der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung bei ihren Schwingungen ihre höchste Lage A erreicht hat, so wird während des Zuges der Gang der Schwingungen verzögert, und zugleich die gröfste Kraft zur Hervorbringung einer und derselben Hebgeschwindigkeit erfordert werden. Geschieht aber der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung während ihrer Schwingungen die höchste Lage B erreicht hat, so ist an dieser Stelle zur Hervorbringung derselben Hebgschwindigkeit der geringste Kraft-Aufwand erforderlich; zugleich wird aber auch der Gang

der Schwingungen beschleunigt und ihr Umfang vergröfsert werden. Geschieht endlich der zweite Zug in dem Augenblicke, wo die Vorrichtung ihre natürliche Stellung eingenommen hat, in welcher nämlich die Seile vertical herabhängen, so ist zur Hervorbringung derselben Geschwindigkeit eine mittlere Kraft erforderlich, wie sie dem in Aufgabe 3. behandelten Gleichgewichtszustande entspricht, und der Gang sowohl als der Umfang der Schwingungen wird dabei entweder aufgehoben oder erhöhet, je nachdem die Vorrichtung aus Lagen A oder aus Lagen B in die bezeichnete Stellung zur Zeit des zweiten Zuges gekommen war.

Indem ich die Betrachtung der losen Rolle hier schon fallen lasse, geschieht es in der Hoffnung, dafs der blofse Versuch zu einer vollständigern Theorie der an dieser interessanten Vorrichtung sich zeigenden, mannigfaltigen Erscheinungen und zu einer gründlichern Bearbeitung des Gegenstandes Anlafs geben werde.

4.

Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air, dans un liquide de densité constante; question proposée par l'académie Royale de Bruxelles pour le concours de 1828.

(Par Mr. *Theremin,* Capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie.)

1ère Partie. Recherches sur la figure de la bulle.

Pour déterminer la figure de la bulle, il faudrait pouvoir la considérer dans l'état de repos; or, cet état est impossible, si la bulle n'est pas capillaire, car, la densité de l'air étant fort petite comparativement à celle de presque tous les liquides connus, la force qui tendra à faire monter la bulle, sera toujours plus grande que la cohésion des molécules liquides, à moins que les dimensions de la bulle n'éxèdent pas le rayon de la sphère d'activité de la force de cohésion.

Pour pouvoir considérer la bulle dans l'état de repos, nous pouvons faire une hypothèse, qui est d'ailleurs permise: c'est d'imaginer que le liquide soit lui même en mouvement, et que ce mouvement soit égal et directement opposé à celui que la bulle aurait en montant dans le liquide librement en vertu de la différence de densité, et sans aucune vitesse initiale. Il est bien évident que cette hypothèse ne change absolument rien à la figure de la bulle, et nous permet seulement de la considérer dans l'état de repos, ce qui facilite l'abord de la question.

Cela posé, prenons pour plan de xy, le plan horizontal tangent à la partie inférieure de la bulle, et pour axe des ordonnées verticales, z, l'axe de révolution de la bulle (car il est évident que la surface de la bulle sera de révolution), nommons h la hauteur du liquide au dessus du plan des xy, en un instant quelconque t, alors, la pression correspondante à une ordonnée z, sera, pour l'unité de surface:

$$g.D.(h-z),$$

g étant la pesanteur, et D représentant la densité du liquide.

Si l'on nomme ∂A un élément de la surface de la bulle, ayant pour projection sur le plan horizontal le rectangle infiniment petit $\partial x . \partial y$, l'expression de la pression du liquide sur cet élément sera:

$$\partial x . \partial y . g . D . (h-z),$$

que nous représenterons, pour abréger, par p.

Supposons que la bulle à l'instant t, où nous la considérons, ait la figure qui lui convient pour l'état d'équilibre entre les pressions des élémens de sa surface, supposons dis-je pour un instant infiniment petit, que sa surface devienne solide, éxcepté en deux quelconques de ses élémens ∂A et $\partial A'$: il est bien évident que cette hypotèse ne change rien à la nature de la question, et que puisque la surface est celle qui convient à l'équilibre, cet équilibre devra continuer à subsister entre les pressions p et p' des deux élémens ∂A et $\partial A'$, pour lesquels la surface ne se serait pas solidifiée.

Pour exprimer l'équilibre entre les pressions p et p', le principe d'égalité de pression donnera:

$$1. \quad \frac{p}{p'} = \frac{\partial A}{\partial A'}.$$

Quoique le principe d'égalité de pression ne soit vrai, que pour le cas où le fluide intérieur seroit non pesant, nous pouvons cependant en faire usage ici, puisque par l'hypotèse du mouvement du liquide et du repos de la bulle, nous transmettons au liquide l'effet de la pesanteur de l'air de la bulle, et parconséquent nous pouvons pour un instant considérer la bulle comme non pesante.

Si les deux élémens ∂A et $\partial A'$ sont contigus, nous aurons:

$\partial A' = \partial A + \partial^2 A$, et de même la pression p' sera $p' = p + \partial p$,

valeurs qui étant mises dans l'équation (1.) donnent:

$$p\partial A + p\partial^2 A = p\partial A + \partial p . \partial A,$$

ou simplement, en supprimant, $p\partial A$ de part et d'autre:

$$2. \quad p\partial^2 A = \partial p . \partial A.$$

Comme p et ∂A sont fonctions de z, x, y, il s'en suit que l'équation (2.) exprime une propriété de la surface de la bulle, et peut servir conséquemment à déterminer la nature de cette surface. Observons avant tout que la surface de la bulle est fermée, et de révolution par rapport à l'axe de z, nous aurons pour l'expression de cette surface une équation de la forme:

$$z = B \pm F(\sqrt{(x^2 - y^2)}),$$

B étant une constante, et F exprimant une fonction quelconque de $\sqrt{(x^2+y^2)}$; or le signe supérieur appartient à l'ordonnée de le surface supérieure, et l'inférieur à la portion de surface, inférieure au plan horizontal $z=B$; il suit de ceci, que ∂z aura aussi le double signe $\pm$, et parconséquent l'accroissement ∂p de la pression devra avoir aussi le double signe, puisque $\partial p = -g.D.\partial x.\partial y.\partial z$, comme on peut facilement le déduire de l'expression de p, avec la seule différence qu'il faut prendre le signe $+$ pour la surface inférieure et le signe $-$ pour la surface supérieure, quand il s'agit de l'accroissement ∂z de l'ordonnée, et les signes en sens inverses pour l'accroissement ∂p de la pression; ainsi, l'équation (2.)

$$p.\partial^2 A = \partial p.\partial A$$

est celle de la surface supérieure, et l'équation:

$$3.\quad p.\partial^2 A = -\partial p.\partial A$$

celle de la surface inférieure de la bulle.

Examinons d'abord l'équation (3.); pour cela, faisant passer le second membre dans le premier, on aura évidemment l'expression de la différentielle du produit $p.\partial A$; or si

$$\partial(p.\partial A) = 0, \text{ on aura nécessairement } p.\partial A = \text{constante.}$$

Pour déterminer la constante, mettons au lieu de p, sa valeur $\partial x.\partial y.g.D(h-z)$ et au lieu de ∂A sa valeur connue $\partial x.\partial y\sqrt{(1+q^2+q'^2)}$, q et q' exprimant ici les coëfficiens différentiels partiels de z pris par rapport à x et à y, et on aura:

$$\partial x^2.\partial y^2.g.D(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)} = \text{constante.}$$

Or, il est évident que pour le plan horizontal nous aurons à la fois $Z=0$, $q=0$, $q'=0$, d'où l'on tire:

$$\partial x^2.\partial y^2.g.Dh = \text{constante,}$$

valeur qui étant mise dans l'équation ci dessus la change, en simplifiant, en

$$(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)} = h,$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$4.\quad \frac{h-z}{h} = \frac{1}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}.$$

Or on sait que $\frac{1}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}$ est l'expression du cosinus de l'angle que le plan tangent fait avec le plan des x, y, ou bien de l'angle que la normale fait avec l'axe des z. Ainsi ce cosinus étant ici $\frac{h-z}{h}$, il est évident que l'équation (4.) représente une sphère de rayon h.

Pour intégrer l'équation (2.), c'est-à-dire celle de la surface supérieure, mettons pour p et ∂A leurs valeurs ci dessus, et pour $\partial^2 A$ la quantité:

$$\frac{q\partial q+q'\partial q'}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}\cdot\partial x\cdot\partial y,$$

nous aurons, après les réductions:

$$\frac{(h-z).(q\partial q+q'\partial q')}{\sqrt{(1+q^2+q'^2)}} = -\partial z.\sqrt{(1+q^2+q'^2)};$$

or, si l'on multiplie chaque membre par $\frac{2}{(h-z)\sqrt{(1+q^2+q'^2)}}$, on aura en intégrant:

$$+\log(1+q^2+q'^2) = +\log(h-z)^2+\text{constante}.$$

Mais en nommant a la hauteur de la bulle au dessus du plan des xy, on aura à la fois pour ce point culminant: $z=a$, $q=0$, $q'=0$, ainsi

$$\text{constante} = -\log(h-a)^2,$$

d'où, parconséquent:

$$\log(1+q^2+q'^2) = \log\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2,$$

et enfin, en passant des logarithmes aux nombres:

$$5.\quad 1+q^2+q'^2 = \left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2$$

pour l'équation différentielle de la surface supérieure de la bulle.

Si l'on pose à la fois $y=0$ et $q'=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, l'équation (5.) se réduira à celle de la génératrice plane sur le plan des xz; cette équation sera:

$$6.\quad 1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2,$$

qui nous conduit d'abord à une propriété très remarquable de la surface. Pour le démontrer prenons d'abord $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, nous aurons:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(h-z)}{(h-a)^2};$$

or, nous avons que le rayon de courbure a pour expression: $\varrho=\frac{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$

donc, en mettant les valeurs de $1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$ et de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dans ϱ, on aura:

$$\varrho = -(h-z)^2.(h-a).$$

Mais si l'on observe que la pression P correspondante à la hauteur de liquide $h-z$ a pour expression $P=g.D(h-z)$, il viendra, en élimi-

nant $(h-z)$ entre P et ϱ,

$$7.\quad \varrho = -\frac{(h-a)}{g^2 D^2}\cdot P^2,$$

ce qui prouve que le rayon de courbure de la partie supérieure de la bulle est proportionnel à la seconde puissance de la pression exercée par le fluide sur la bulle, au point correspondant. Ce résultat est d'autant plus remarquable, que si l'on eut voulu déterminer la surface de la bulle suivant une hypothèse, la seule hypothèse permise eut été de supposer le rayon de courbure proportionnel à une puissance quelconque de la pression.

En tirant ∂x de l'équation (6.) et intégrant, il vient:

$$\pm x = (h-a)\log\left[\frac{h-z}{h-a}+\sqrt{\left(\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2-1\right)}\right]+\text{Const.}$$

or, si $x=0$, on a $z=a$, donc $0=$ constante, et

$$8.\quad \pm x = (h-a)\log\left[\frac{h-z}{h-a}+\sqrt{\left(\left(\frac{h-z}{h-a}\right)^2-1\right)}\right]$$

est l'équation de la génératrice plane de la surface supérieure, et pour avoir l'équation de la surface elle même, il suffit de remplacer x par le radical $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Quoique l'équation de la génératrice ne soit pas constructible, il est facile de voir que ce sera une courbe très peu convexe, puisque le rayon de courbure est très grand, et varie très peu d'un point à l'autre de la surface, à moins que h ne soit fort petit par rapport à a; on pourra même remplacer par approximation la surface supérieure par une calotte sphérique dont le rayon ϱ' serait moyen entre les rayons de courbure de tous les points de la surface; si l'on nomme $z=k$, la valeur de z pour le point où la génératrice plane de la surface supérieure vient rencontrer le cercle générateur de la calotte inférieure, la valeur de ϱ pour ce point sera:

$$\varrho = -(h-k)^2(h-a);$$

mais comme k et a sont le plus souvent très petits par rapport à h, il suit que cette valeur de ϱ ne diffèrera pas sensiblement de celle de ϱ au point culminant, qui est $\varrho=-(h-a)^3$; donc le rayon ϱ', qui sera compris entre ces deux valeurs, aura pour expression: $\varrho'=-(h-a)^3+\delta$, δ étant toujours une quantité fort petite.

La bulle sera d'autant plus applattie que la hauteur h est plus grande, et sa forme sera donc à très peu près celle d'une lentille dont les surfaces ou calottes sphériques auraient pour rayon h et $(h-a)^3+\delta$ δ étant fort petit;

on conçoit de ceci pourquoi les bulles, que l'on ne peut guères observer que près de la surface du liquide, paraissent presque toujours sphériques, puisque les quantités h et $(h-a)^3$ deviennent d'autant plus petites, et parconséquent les deux faces de la lentille plus convexes.

La figure de la bulle, telle que nous venons de la déduire, ne peut jamais être observée dans la nature, à cause d'une foule de circonstances, dont les unes sont propres à altérer la figure de la bulle, et les autres propres à nous faire illusion sur la figure réelle; parmi les causes qui altèrent la figure calculée de la bulle, il faut mettre en premier lieu la viscosité du liquide, que nous n'avons pas introduit dans le calcul, et qui augmente beaucoup la convexité; en effet, la viscosité augmente la cohésion des molécules liquides, et parconséquent les molécules qui forment une espèce d'enveloppe autour de la bulle, s'attirant avec d'autant plus de force que la cohésion est plus grande, il s'en suit que cette enveloppe cède alors moins facilement à la pression du liquide environnant, et tend à devenir un minimum, qui serait une surface sphérique, si la pression était nulle; ainsi donc il s'établit un équilibre entre la force de la cohésion et la pression, et alors la bulle prend une figure moyenne entre la sphère et la lentille calculée, et se rapproche successivement de l'une ou de l'autre, selon que le rapport de la pression à la cohésion augmente ou diminue; c'est pourquoi les bulles capillaires sont toujours sphériques, et même on observe d'assez grandes bulles presque sphériques dans les liquides très visqueux, surtout près de la surface. Une autre cause, qui probablement influe aussi sur la figure de la bulle, et que nous avons supposé la vitesse initiale nulle, ce qui n'est pas le cas dans la nature, et ce qui ne peut être observé.

Parmi les causes qui produisent illusion sur la figure observée, il faut placer d'abord la difficulté d'observer, pendant le temps très court que la bulle passe dans le plan horizontal ou se trouve l'oeuil de l'observateur; 2° que partout ailleurs que dans ce plan la bulle n'est vue qu'en perspective; et enfin 3° qu'il n'est guères possible d'observer une bulle, que dans un vase de verre, parconséquent à une hauteur de liquide h assez petite, et outre les causes d'erreur déja citées s'ajoutent les illusions dues à la réfraction du liquide et à celles du verre.

2^de^ Partie. Dans la première partie de mon mémoire j'ai déterminé la figure que devrait avoir la bulle d'air, dans l'hypothèse que la co-

hésion des molécules fluides n'eut aucune influence; mais, l'expérience ayant démontré que la convexité de la bulle était dans la nature beaucoup plus forte que celle que nous avons trouvé par le calcul, introduisons la cohésion dans nos formules, et voyons quelle sera l'influence de cette nouvelle force sur la forme de la bulle d'air.

On doit considérer la cohésion comme une force constante c, qui unit entre elles les molécules liquides qui forment l'enveloppe de la bulle d'air, et parconséquent l'action de cette force est dirigée dans le plan tangent à la surface de la bulle; donc la force c pourra se décomposer en deux autres forces dont l'une sera verticale, et l'autre horizontale; or si nous nommons ∂s la distance de deux éléments infiniment voisins, de la surface, et dont ∂x, ∂y, ∂z sont les projections sur les axes, nous aurons:

$c\frac{\partial z}{\partial s}$ pour la composante verticale de c et

$c\frac{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}{\partial s}$ pour la composante horizontale.

Or, observons que les composantes horizontales de la cohésion pour tous les élémens d'un même cercle, et parconséquent pour toute la surface, se font équilibre entr'elles, et indépendamment de la pression; donc nous n'aurons à considérer que l'effet de la seule composante verticale. Mais comme il est facile de voir que la composante $c\frac{\partial z}{\partial s}$ agit de bas en haut, tandis que la pression agit de haut en bas, il s'en suit que la quantité p dans l'équation

$$1.\quad p\partial^2 A-\partial p\partial A = 0,$$

deviendra:

$$2.\quad \left(\partial x.\partial y g.d.(h-z)-c\partial A.\frac{\partial z}{\partial s}\right).$$

Pour traité plus facilement l'équation (1.) observons qu'en divisant par $(\partial a)^2$ et changeant les signes il vient:

$$\frac{\partial p.\partial A-p.\partial^2 A}{(\partial a)^2}=\partial\left(\frac{p}{\partial A}\right)=0,$$

d'où il suit:

$$\frac{p}{\partial A} = \text{constante},$$

ou bien:

$$\frac{\partial x.\partial y.g.d.(h-z)-c\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A}{\partial A} = \text{const.}$$

En mettant pour ∂A sa valeur

$$\partial A = \partial x . \partial y \sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)},$$

et en observant qu'on a à la fois $z=a$, $\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)}=1$, $\frac{\partial z}{\partial s}=0$, il vient:

$$gd(h-a) = \text{constante.}$$

En mettant cette valeur dans l'équation et réduisant, on obtient:

$$3. \quad \frac{h-z}{\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)}} - \frac{c}{gd} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(\partial z^2+\partial y^2+\partial x^2)}} = h-a$$

pour l'équation différentielle de la surface supérieure de la bulle.

Pour passer de l'équation de la surface à celle de la génératrice plane, il faut faire $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, et $\partial y=0$ dans l'équation (3.), et l'on trouve

$$4. \quad \partial x = \frac{(n^2-m^2)\partial z}{-m(h-z)\pm n\sqrt{((h-z)^2-(n^2-m^2))}},$$

faisant pour abréger $(h-a)=n$ et $\frac{c}{gd}=m$.

Observons qu'en faisant dans cette équation $c=0$ (d'où $m=0$), on retrouve l'équation

$$5. \quad \partial x = \frac{n^2 \partial z}{\pm n\sqrt{((h-z)^2-n^2)}},$$

que nous avons déduit précédemment, en supposant nulle la cohésion.

Observons encore que l'équation (4.) a au dénominateur un radical affecté du double signe $\pm$; mais il ne faut prendre que le signe supérieur $+$ pour lequel l'équation se réduit à zéro, quand on fait $z=a$, car alors $\frac{\partial z}{\partial x}=0$. L'autre signe appartient à une autre branche de la courbe, que nous n'avons pas besoin d'examiner.

Sans intégrer l'équation (4.) il est facile de prouver que la convexité de la surface augmente par l'introduction de la quantité c; pour cela comparons $\frac{\partial z}{\partial x}$, tiré des équations (4.) et (5.), en supposant h, a, et z égaux dans les deux équations.

De l'équation (4.) on tire:

$$6. \quad \pm\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h-z)}{(h-a)^2-m^2}+(h-a)\sqrt{\left(\frac{(h-z)^2}{(h-a)^2-m^2}-1\right)},$$

de l'équation (5.) on tire:

$$7. \quad \pm\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{(h-z)^2}{(h-a)^2}-1\right)};$$

or il est facile de voir que l'on a à la fois:

$$h-a > +1,\quad \frac{h-z}{(h-a)^2-m^2} > 0,\quad \text{et}\quad \frac{(h-z)^2}{(h-a)^2-m^2} > \frac{(h-z)^2}{(h-a)^2},$$

donc, il suit que pour des valeurs égales de z, dans deux courbes pour lesquelles h et a sont les mêmes, on a:

$$\pm\frac{\partial z}{\partial x}\,(6.),\quad > \pm\frac{\partial z}{\partial x}\,(7.),$$

ce qui prouve, que dans le cas de la cohésion, la courbe génératrice de la surface supérieure de la bulle est plus convexe, que quand on suppose nulle la cohésion du liquide.

La cohésion c étant une force qui modifie l'action de la pression du fluide, nous pouvons la représenter par la pression d'une colonne fluide, dont nous nommerons h' la hauteur, et alors on aura $c = g.d.h'$, valeur qui donne à l'équation (4.) la forme suivante plus élégante:

$$8.\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{((h-a)^2-h'^2)}{-h'(h-z)+(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-h'^2)]}}.$$

On voit que cette équation est homogène, et qu'il n'y entre que les quantités constantes h, h', a, qui sont linéaires; il faut seulement observer, que la quantité h se compose de deux parties, l'une que nous nommerons H, et qui sera la hauteur du liquide au dessus de la bulle, la seconde H', qui sera la hauteur du liquide qui représenterait la pression atmosphérique, car la bulle est aussi soumise à cette pression; donc l'équation (8.) deviendra:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{(H+H'-a)^2-h'^2}{-h(H+H'-z)+(H+H'-a)\sqrt{[(H+H'-z)^2-((H+H'-a)^2-h'^2)]}}.$$

D'ailleurs il faut encore observer que la hauteur du liquide h' qui représente la cohésion, est une quantité fort grande, car on sait que la cohésion est dans les corps solides une quantité infiniment grande par rapport à la pesanteur, et dans les liquides, quelque faible qu'elle soit, elle sera toujours représentée par une hauteur h' très grande.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter l'équation de la génératrice de la surface inférieure de la bulle; il nous suffit de dire qu'elle ne sera pas un cercle, mais que sa convexité sera aussi plus grande que celle du cercle trouvé dans la première partie de ces recherches, pour la génératrice de la surface inférieure. Il est donc demontré analytiquement, que l'effet de la cohésion des molécules liquides est d'augmenter la convexité de la bulle d'air.

5.

Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen in des IV. Bandes 4. Hefte, Seite 391. u. s. w.

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Wenn von zwei Dreiecken das eine in, das andere um einen Kreis beschrieben ist, und das erstere zugleich in das letztere eingeschrieben sein soll, so sieht man augenblicklich, dafs man zu den Spitzen des erstern die Berührungspuncte des letztern mit dem Kreise zu nehmen hat. Eine sehr interessante, von Herrn Clausen a. a. O. vorgelegte und gelösete Aufgabe entsteht aber, wenn umgekehrt gefordert wird, dafs die Spitzen des um den Kreis beschriebenen Dreiecks in den (verlängerten) Seiten des in ihn beschriebenen liegen sollen. Im Gegenwärtigen will ich diese Aufgabe auf Kegelschnitte überhaupt ausdehnen, und zeigen, wie sie mit Hülfe der barycentrischen Rechnung sich lösen läfst.

Sei ABC (Taf. I. Fig. 5.) ein in, und $A'B'C'$ ein um einen Kegelschnitt beschriebenes Dreieck, und letzteres zugleich in ersteres beschrieben, so dafs A' in BC, B' in CA, C' in AB liegt. Weil der Kegelschnitt durch A, B, C gehen soll, so kann man seinen Ausdruck setzen:

$$\text{II.}\quad fpA+gqB+hrC,\quad \text{wo } 1)\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0$$

die Gleichung ist, welche zwischen den Veränderlichen des Ausdrucks bestehen mufs. Und weil der Kegelschnitt die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ berühren soll, so mufs sein Ausdruck auch die Form haben:

$$\text{II.}\quad ixA'+kyB'+lzC',\quad \text{wo } 2)\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=0$$

die Gleichung zwischen den Veränderlichen des Ausdrucks ist *).

*) Setzt man nämlich I. und 1), weil es nur auf das gegenseitige Verhältnifs, nicht auf die absoluten Werthe von p, q, r ankommt:

$$\frac{1}{r}=u,\ \frac{1}{q}=-1 \text{ und damit } \frac{1}{p}=1-u,$$

so reducirt sich I. auf den Ausdruck I. im Baryc. Calc. §. 249.

Eben so geht II. in die Form I. §. 258. über, wenn man $\sqrt{z}=v$, $\sqrt{y}=-1$ und damit $\sqrt{x}=1-v$ setzt.

Da ferner A' in BC u. s. w. liegen soll, so setze man:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} iA' = agB + a'hC, \\ kB' = bhC + b'fA, \\ lC' = cfA + c'gB, \end{cases}$$

wo a, a', b, ... noch zu bestimmende Coefficienten sind. Substituirt man hieraus die Werthe von A', B', C' in II., und setzt der Kürze willen:

$$3)\quad b'y + cz = \xi,\quad c'z + ax = \eta,\quad a'x + by = \zeta,$$

so geht II. über in:

$$\text{IV.}\quad f\xi A + g\eta B + h\zeta C,$$

und die hierdurch ausgedrückte Curve mufs mit dem Kegelschnitte I. identisch sein. Für einen gemeinschaftlichen Punct beider auf einerlei Fundamentalpuncte bezogenen Curven I. und IV. verhält sich aber:

$$p : q : r = \xi : \eta : \zeta, \quad \text{also auch } \frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r} = \frac{1}{\xi} : \frac{1}{\eta} : \frac{1}{\zeta}, \text{ folglich}$$

$$4)\quad \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} = 0, \quad \text{oder } \eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 0,$$

wegen 1. Wären nun die Curven nicht identisch, so müfsten sich aus 4. in Verbindung mit 2., nachdem man in 4. für ξ, η, ζ aus 3. ihre Werthe, durch x, y, z ausgedrückt, gesetzt hat, die Verhältnifswerthe von x, y, z für den oder die gemeinschaftlichen Puncte beider Curven finden lassen. Da aber die Curven alle Puncte mit einander gemein haben sollen, so mufs die Gleichung 4. bestehen, was auch den Veränderlichen x, y, z für Werthe beigelegt werden, wenn nur damit immer auch die Gleichung 2. erfüllt wird.

Nun giebt die Entwickelung von 4.:

$$\begin{aligned} 0 = {} & aa'x^2 + bc'yz + c'a'zx + ab\,xy \\ & + bb'y^2 + bc\,yz + ca'zx + a'b'xy \\ & + cc'z^2 + b'c'yz + ca\,zx + ab'xy, \end{aligned}$$

und wenn man die Bedingungsgleichung 2. rational darstellt:

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy.$$

Nach der bekannten Methode der Multiplicatoren addire man jetzt diese zwei Gleichungen, nachdem man vorher die letztere mit einem unbestimmten Coefficienten m multiplicirt hat, und setze hierauf die Coefficienten von x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, jeden für sich, $= 0$. Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned} aa' + m &= 0, & bc + bc' + b'c' &= 2m, \\ bb' + m &= 0, & ca + ca' + c'a' &= 2m, \\ cc' + m &= 0, & ab + ab' + a'b' &= 2m, \end{aligned}$$

und wenn man die aus den drei erstern Gleichungen fliefsenden Werthe von a', b', c' in den drei letztern substituirt:

$$(m-bc)^2 = mb^2, \quad (m-ca)^2 = mc^2, \quad (m-ab)^2 = ma^2,$$

also, wenn man $m = n^2$ setzt:

$$n^2 - bc = \pm nb, \quad n^2 - ca = \pm nc, \quad n^2 - ab = \pm na,$$

wo entweder zugleich die drei obern oder zugleich die drei untern Zeichen genommen werden müssen. Beides ist wegen der bleibenden Unbestimmtheit von n gleichgültig. Wollte man aber z. B. in der ersten Gleichung das untere, und in den beiden andern die obern Zeichen nehmen, so würde man $a = \infty$, $b = -n$, $c = 0$, folglich $a' = 0$, $b' = n$, $c' = \infty$ erhalten, und dadurch nach III. zu dem unstatthaften Resultate gelangen, dafs A' und C' mit B zusammenfallen. Mit Annahme der obern Zeichen findet sich nun leicht:

$$a = b = c = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})n, \text{ und damit}$$

$$a' = b' = c' = -\frac{m}{a} = -\frac{n^2}{a} = -\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5})n = -\nu a,$$

wenn man $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = -\nu$, d. i. $\dfrac{\sqrt{5} \mp 1}{\sqrt{5} \pm 1} = \nu$ setzt.

Drückt man somit b, c, a', b', c' in III. insgesammt durch a aus, so kommt:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} iA' = agB - \nu ahC, \\ kB' = ahC - \nu afA, \\ lC' = afA - \nu agB, \end{cases}$$

und hieraus weiter: $kB' + \nu lC' = ahC - \nu^2 agB$. Bezeichnet man daher die Durchschnitte von $B'C'$ mit BC, von $C'A'$ mit CA, von $A'B'$ mit AB resp. durch I, K, L, so ist:

$$\text{VI.} \quad I \equiv kB' + \nu lC', \text{ und eben so } K \equiv lC' + \nu iA', \; L \equiv iA' + \nu kB'.$$

Nach diesen Vorbereitungen sei zuerst der Kegelschnitt und das um ihn beschriebene Dreieck $A'B'C'$ gegeben, und werde das einzuschreibende ABC gesucht. Die damit zugleich gegebenen Berührungspuncte des Kegelschnitts $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ heifsen I', K', L', so hat man zufolge des Ausdrucks II. (Bar. Calc. §. 260.):

$$\text{VII.} \quad I' \equiv kB' + lC', \; K' \equiv lC' + iA', \; L' \equiv iA' + kB'.$$

Hiernach verhält sich $B'I' : I'C' = l : k$, und auf gleiche Art, wegen VI.:

$$B'I : IC' = \nu l : k,$$

folglich

$$B'I : IC' = \nu . B'I' : I'C' = (\sqrt{5} \mp 1) B'I' : (\sqrt{5} \pm 1) I'C',$$

und eben so

$$C'K:KA' = \nu . C'K', \quad K'A', \quad A'L:LB' = \nu . A'L':L'B'.$$

Hiermit kann man die Puncte I, K, L finden, welche mit den gegenüberliegenden Spitzen A', B', C' verbunden, die Seiten des in den Kegelschnitt einzuschreibenden Dreiecks ABC bestimmen.

Wenn zweitens aus dem eingeschriebenen Dreieck ABC das umschriebene $A'B'C'$ gefunden werden soll, so lege man an den Kegelschnitt in A, B, C die Berührenden GH, HF, FG, so dafs FGH ein umschriebenes Dreieck ist; und ziehe die Geraden AF, BG, CH, welche BC, CA, AB resp. in F', G', H' schneiden. Vermöge des Ausdruckes I. ist alsdann:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} F \equiv gB + hC - fA, \\ G \equiv hC + fA - gB, \\ H \equiv fA + gB - hC \end{cases}$$

(Bar. Calc. §. 268.), und daher $gB + hC \equiv$ dem Durchschnitte von BC mit $AF \equiv F'$, und eben so $hC + fA \equiv G'$, $fA + gB \equiv H'$. Es verhält sich daher:

$$BF':F'C = h:g,$$

und wegen V.:

$$BA':A'C = -\nu h:g, \text{ oder } BA':CA' = \nu h:g,$$

folglich

$$BA':CA' = \nu . BF':F'C = (\sqrt{5} \mp 1) BF':(\sqrt{5} \pm 1) F'C,$$

und eben so:

$$CB':AB' = \nu . CG':G'A, \quad AC':BC' = \nu . AH':H'B.$$

Mittelst dieser Proportionen können also die in BC, CA, AB resp. liegenden Spitzen A', B', C' des umschriebenen Dreiecks gefunden werden.

Übrigens hat jede dieser beiden Aufgaben zwei Auflösungen, wegen des zweideutigen Werthes von ν, der durch die quadratische Gleichung: $\nu^2 - 3\nu + 1 = 0$ gegeben ist.

Zusätze. 1) Drückt man I', K', L' in VII. mit Hülfe der Gleichungen V. durch A, B, C aus, so kommt:

$$\begin{aligned} I' &\equiv kB' + lC' \equiv (1-\nu) fA - \nu gB + hC, \\ K' &\equiv lC' + iA' \equiv fA + (1-\nu) gB - \nu hC, \\ L' &\equiv iA' + kB' \equiv -\nu fA + gB + (1-\nu) hC. \end{aligned}$$

Man multiplicire den Ausdruck für K' mit ν, und ziehe ihn von dem Ausdrucke für L' ab. Dies giebt:

$$-2\nu fA + (1-\nu+\nu^2) gB + (1-\nu+\nu^2) hC,$$

welches daher der Ausdruck eines Punctes in der Linie $K'L'$ sein mufs, und welcher sich, wegen $\nu^2 = 3\nu - 1$, auf

$$-2\nu fA + 2\nu gB + 2\nu hC \equiv -fA + gB + hC \equiv F$$

(vergl. VIII.) reducirt. Es liegen daher K', L' mit F, und eben so L', I' mit G; I', K' mit H in gerader Linie, wodurch folgender merkwürdige Satz entsteht:

Wenn von zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ das erste in, das zweite um einen Kegelschnitt beschrieben ist, und zugleich die Spitzen des zweiten in den Seiten des ersten liegen, so stehen in derselben Beziehung zu einander das eingeschriebene Dreieck $I'K'L'$, dessen Spitzen die Berührungspuncte des umschriebenen Dreiecks $A'B'C'$ sind, und das umschriebene Dreieck FGH, dessen Seiten die an den Kegelschnitt in den Spitzen des eingeschriebenen Dreiecks ABC gezogenen Berührenden sind, indem auch hier die Spitzen von FGH in den Seiten von $I'K'L'$ liegen.

2) Die drei Geraden, welche die Spitzen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten verbinden, schneiden sich bekanntlich in einem Puncte. Heifse P dieser Punct für das umschriebene Dreieck $A'B'C'$, so ist $P \equiv iA' + kB' + lC'$ (Bar. Calc. §. 260.). Setzt man ferner $Q \equiv fA + gB + hC$, so kommt, wenn davon die Ausdrücke für F, G, H in VIII. subtrahirt werden: $2fA$, $2gB$, $2hC$; d. h. bei dem umschriebenen und den Kegelschnitt in A, B, C berührenden Dreiecke FGH schneiden sich FA, GB, HC gemeinschaftlich in Q.

Nun folgt durch Addition der Gleichungen V.:

$$iA' + kB' + lC' = a(1-\nu)(fA + gB + hC), \text{ d. i. } P \equiv Q; \text{ also:}$$

Die sechs Linien $A'I'$, $B'K'$, $C'L'$, FA, GB, HC schneiden sich in einem Puncte.

6.

Beweis der Lehrsätze Band 2. Heft 3. Nr. 54. S. 287.

(Von Herrn *Felix Eberty* zu Berlin.)

„I. Fället man aus einem willkürlichen Puncte D (Taf. I. Fig. 7.) in der Ebene eines Dreiecks ABC, auf die Seiten des letzteren Lothe, Da, Db und Dc, nimmt in diesen Lothen drei beliebige Puncte a, b, c als Ecken eines andern Dreiecks abc an, und fället auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lothe, Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte d,“ und ferner:

„II. Nimmt man ähnlicher Weise ein drittes Dreieck an, $a_1b_1c_1$, dessen Ecken in den nemlichen drei ersten Lothen liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punct d_1 entsprechen (I.), und alsdann liegen die drei Durchschnittspuncte der drei Paar entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks mit denen des dritten, das heifst die Durchschnittspuncte α, β' und γ der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab, und a_1b_1 allemal in Einer Geraden, $\alpha\beta\gamma$,“ und

„III. Diese Gerade ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Puncte d und d_1 geht, senkrecht.“

An diese Lehrsätze schliefst sich noch folgender an:

IV. Nimmt man in jeder von dreien sich in Einem Puncte schneidenden Geraden (Fig. 8.) zwei beliebige Puncte an, und bezeichnet die in jeder derselben dem Durchschnittspuncte zunächst liegenden mit a, b und c, die andern drei mit a_1, b_1 und c_1, so liegen die Durchschnittspuncte der Verbindungslinien ab, bc und ac, mit den Verbindungslinien a_1b_1, b_1c_1 und a_1c_1, d. h. die Puncte α, β und γ allemal in einer Geraden.

Beweis von I. Man beschreibe aus den Puncten A, B und C (Fig. 7.) drei Kreise, deren zwei immer die auf ihrer Axe senkrecht stehenden Geraden Da, Db und Dc zu Linien der gleichen Potenzen haben, welches auf folgende Art möglich ist. Man beschreibe um c mit einem beliebigen Radius cx einen Kreis, lege sodann von A aus an denselben eine

Tangente $A\alpha$, und beschreibe mit Ax um A einen Kreis, desgleichen mit By (einer von B aus an den Kreis um c gezogenen Tangente) um B, sodann mit az (einer Tangente an den Kreis um B) einen Kreis um a, und zuletzt mit Ct (einer Tangente an den Kreis um a) einen Kreis um C, so sind die drei nun um A, B und C beschriebenen Kreise von der verlangten Art. Zu denen um A und B nemlich ist Dc, zu denen um B und C, Da, und also zu denen um A und C, Db die Linie der gleichen Potenzen. (S. die Abhandlungen des Herrn Steiner in diesem Journal, Band 2.) Also kann man auch aus b mit bm einen Kreis beschreiben, welcher die um A und C rechtwinklig schneidet (wie es schon vorher bei den Kreisen um c und a, in Bezug auf die um B und A, und die um C und B der Fall war). Der Kreis um C also wird, wie man sahe, von dem um a sowohl, als von dem um b rechtwinklig geschnitten, folglich liegt C in der Linie der gleichen Potenzen der Kreise um a und b, und zwar stellt demnach das von c auf ab gefällte Perpendikel (s. jene Abhandlungen) diese Linie der gleichen Potenzen dar. Auf dieselbe Weise folgt, dafs auch das von A auf cb gefällte Perpendikel zu den Kreisen um c und b, und das von B aus auf ac gefällte, für die Kreise um a und b, Linien der gleichen Potenzen sind. Es sind also die drei Lothe Ad, Bd und Cd Linien der gleichen Potenzen zu je zweien von den drei Kreisen a, b und c; sie scheiden sich demnach (s. jene Abhandlungen) alle drei in Einem Puncte; was zu beweisen war.

Beweis von II. und III. d_1 also ist der Punct, welcher im Dreieck $a_1b_1c_1$ dem Puncte d im Dreieck abc entspricht. Die Seiten ab und a_1b_1 schneiden sich in α, bc und b_1c_1 in γ und ac und a_1c_1 in β. Es ist zu beweisen, dafs die Puncte α, β und γ in einer geraden Linie liegen, welche mit der durch d und d_1 gezogenen einen rechten Winkel bildet. Man lege um d einen Kreis, welcher die um a, b und c rechtwinklig durchschneidet (welches angeht, weil in d die Linien der gleichen Potenzen für jene Kreise (um a, b und c) sich treffen), eben so aus d_1 einen Kreis, welcher die um a_1, b_1 und c_1 rechtwinklig durchschneidet (welches aus ganz ähnlichem Grunde möglich ist). ab ist die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um C und d (denn beide werden von denen um a und b rechtwinklig geschnitten); aus demselben Grunde ist auch a_1b_1 die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um C und um d_1. Jeder Punct in der Linie ab hat also für die Kreise um C und d, jeder Punct in der Linie a_1b_1 für die Kreise um C und d_1 gleiche Potenzen; folglich hat ihr Durchschnittspunct (α) auch für die

Kreise um d und um d_1 gleiche Potenzen; es liegt also α in der Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um d und um d_1. Dasselbe ist auf dieselbe Weise von γ und β zu beweisen. Es liegt also α sowohl als β und γ in der Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um d und um d_1, alle drei also liegen in einer einzigen geraden Linie, und zwar (s. jene Abhandlungen) in einer geraden Linie, welche auf der durch d und d_1 gezogenen senkrecht steht; denn dd_1 ist die Axe der beiden um diese Puncte beschriebenen Kreise.

Beweis von IV. Mit wechselnder Gröfse der Kreise um A, B und C, welche ursprünglich ganz beliebig angenommen sind, wechseln auch die Gröfsen der Winkel, unter welchen die drei Geraden aD, bD cD einander schneiden, und zwar bei allmäligem Wachsen oder Abnehmen jener Kreise, allmälig wachsend oder abnehmend. Da demnach diese Winkel jede mögliche Gröfse haben können, so folgt unmittelbar, dafs die in den drei geraden Linien Da, Db und Dc beliebig angenommenen 6 Puncte, a, b, c und a_1, b_1, c_1, auch in jeden andern drei sich in einem Puncte unter beliebigen Winkeln schneidenden Linien angenommen werden können, so dafs die drei Puncte α, β und γ immer in Einer Geraden liegen; was zu beweisen war.

Auch die Umkehrung aller dieser Sätze läfst sich darthun.

7.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen; nebst anderen einzelnen Bemerkungen.

---

1. **Bemerkungen über die Definitionen der Ebene, in Beziehung auf die Äufserung über diesen Gegenstand im 4ten Bande dieses Journals S. 396. Nr. 2.**

Wenn man die Ebene wie folgt definirt:

„Sie ist diejenige Fläche, in welcher alle geraden Linien liegen, die mit einer und derselben geraden Linie, in einem und demselben Puncte, zu beiden Seiten gleiche Winkel machen."

so läfst sich, wie es scheint, allerdings beweisen, dafs auch jede andere gerade Linie durch zwei Puncte in der Ebene, die nicht durch die feste Gerade geht, ganz in der Ebene liegt, ohne vorher, wie am angeführten Orte angenommen wird, den Beweis des Satzes, dafs Dreiecke mit den nemlichen Seiten congruent sind, unabhängig von der Definition der Ebene, nöthig zu haben, und zwar wie folgt.

Wenn die in der Fläche des Papiers liegenden geraden Linien GC, KC, DC, FC u. s. w. (Taf. I. Fig. 9.) sämmtlich mit einer und derselben durch C gehenden geraden Linie C_1CC_2 (C_1 stelle man sich über, und C_2 unter der Fläche des Papiers vor) zu beiden Seiten gleiche, also rechte Winkel machen, so ist die Fläche in welcher alle jene geraden Linien liegen, der Definition zufolge, eine Ebene. Wenn nun A und B zwei beliebige Puncte in dieser Ebene sind, so kommt es darauf an, zu beweisen, dafs eine gerade Linie durch A und B ganz in der Ebene liegt. Man nehme DC in der Geraden AC, gleich der längeren von den beiden Linien AC und BC, also gleich BC, so wird zuerst bewiesen werden, dafs eine gerade Linie durch D und B ganz in der Ebene liegt. Man mache in den Geraden ECB und DCF, $EC = FC = DC = BC$. Man mache ferner den Winkel GCD gleich dem Winkel GCE, so wird auch, wenn GCH gerade ist, $BCH = FCH$ sein; denn die drei Winkel GCD, DCB und BCH sind zusammen zwei Rechte, und die drei Winkel ECG, FCE und HCF ebenfalls, also ist

$GCD+DCB+BCH=ECG+FCE+HCF$. Aber die Winkel GCD und GCE sind gleich, nach der Voraussetzung, und die Winkel ECF und DCB sind gleich, als Scheitelwinkel: also ist auch $BCH=FCH$. Nun drehe man die Ebene um die Gerade GH, bis CC_1 in CC_2 fällt, so wird nothwendig DC in EC, BC in FC, D in E und B in F fallen; denn die Winkel, welche DC und BC mit CC_1 machen, sind denen gleich, welche EC und FC mit CC_2 machen, und die Winkel DCG und BCH sind den Winkeln ECG und FCH gleich. Gesetzt nun, die gerade Linie durch D und B läge nicht ganz in der Ebene, sondern z. B. über ihr, so wird sie, nach EF gelangt, unter die Ebene fallen. Jetzt drehe man auch die Ebene, aus ihrer ursprünglichen Lage, um C_1CC_2, bis DC in FC fällt. Alsdann wird nothwendig BC in EC fallen, weil die Winkel FCE und DCB gleich sind. Die gerade Linie durch DB, nach FE gelangt, wird aber nun über der Ebene liegen. Einmal also würde eine gerade Linie durch E und F unter und das anderemal über der Ebene liegen können, das heifst, es würden zwei verschiedene gerade Linien durch E und F Statt finden. Da dieses nicht möglich, vielmehr der Definition der geraden Linie entgegen ist, so kann eine gerade Linie durch D und B nicht über, und eben so auch nicht unter der Ebene, überhaupt also nicht aufser der Ebene liegen, sondern mufs ganz in die Ebene fallen.

Nachdem dieses gezeigt worden, nehme man auf mehreren geraden Linien durch C, auf der B entgegengesetzten Seite von DC, z. B. $KC=MC=LC$ etc. $=BC$, so läfst sich von allen den geraden Linien BK, BM, BL etc., eben wie von BD, beweisen, dafs sie ganz in der Ebene liegen, das heifst, dafs sie alle die gerade Linie DC schneiden. Es folgt also, dafs alle gerade Linien durch B, die die Grade DC zwischen D und C schneiden, ganz in der Ebene liegen. Unter diesen Linien ist auch nothwendig die Grade durch A und B, folglich liegt auch diese ganz in der Ebene; was zu beweisen war.

Es folgt hier zugleich, dafs alle durch einen beliebigen Punct B einer durch C_1CC_2 bestimmten Ebene und durch beliebige Puncte der Ebene gehende gerade Linien ganz in der Ebene liegen, und es ist nun ferner zu zeigen, dafs eine gerade Linie durch B, die auf zwei beliebigen ebenfalls durch B gehenden geraden Linien in der Ebene, z. B. auf DB und CB, senkrecht steht, auch mit allen anderen in der Ebene durch B gehenden geraden Linien rechte Winkel macht, und dann, dafs jene Linie B_1BB_2 (B_1 liegt über, B_2 unter der Ebene) mit C_1CC_2 parallel ist, welches auf die

gewöhnliche Weise geschehen kann, da man jetzt, nachdem die Eigenschaft der Ebene, dafs alle durch zwei ihrer Puncte gehende gerade Linien ganz in ihr liegen, bewiesen worden, die nöthigen Sätze von den Dreiecken zu Hülfe nehmen kann.

Unter solchen Umständen scheint die obige Definition der Ebene allen Erfordernissen zu genügen. Sie müfste nothwendig der Planimetrie vorhergehen, denn man kann nicht mit Grund eher Figuren in der Ebene abhandeln, ehe man nicht den Begriff der Ebene festgestellt und diejenigen ihrer Eigenschaften, die bei ebenen Figuren vorausgesetzt werden, erkannt und nachgewiesen hat, wie z. B aus der der Äufserung am angeführten Orte vorhergehenden Bemerkung No. 1. zu sehen.

2. Lehrsatz, zu beweisen.

(Vom Herrn Prof. *Unger* zu Erfurt.)

Wenn v und z ganze Zahlen bezeichnen, so geben die Ausdrücke

$$A=2(v^2-1)(z^2+1),\quad B=2(v^2+1)(z^2-1) \text{ und } C=(v+z)(vz-1)$$

ganze rationale Zahlen für die drei Seiten eines nur in besonderen Fällen rechtwinkligen Dreiecks, von welchen die Fläche F und die Radien R und r der um- und eingeschriebenen Kreise ebenfalls ganze rationale Zahlen sind. Es ist nemlich

$$F=4(v^2-1)(z^2-1)(v+z)(vz-1),\ R=(v^2+1)(z^2+1) \text{ und}$$
$$r=2(v-1)(z-1)(v+z).$$

3. **Aufgabe.** Wenn sich eine Ebene um eine gerade Linie in ihr dreht, so beschreibt eine andere gerade Linie in der bewegten Ebene, wenn sie mit der festen Axe einen unveränderlichen Winkel macht, eine Kegelfläche, und ein fester Punct in der bewegten Linie eine Kreislinie. Ist der unveränderliche Winkel ein rechter, so geht die Kegelfläche in einen ebenen Kreis über.

Nun nehme man an, der Winkel, welchen die Linie in der bewegten Ebene mit der Axe macht, sei nicht unveränderlich, sondern z. B. immer dem Winkel, durch welchen sich die Ebene gedreht hat oder einem constanten Theile desselben gleich. Es fragt sich, welche Fläche alsdann die Linie in der bewegten Ebene, und welche Curve ein fester Punct der Linie beschreiben werde.

4. **Aufgabe.** Zwei gegebene Flächen schneiden einander. Man soll die Flächen finden, in welchen alle Normalen auf die eine und die andere gegebene Fläche, die durch ihren Durchschnitt gehen, liegen; desgleichen die Bedingungen, unter welchen die geometrischen Orte der Normalen, wenn sie sich auf die Durchschnitte zweier parallelen gegebenen Flächen mit einer dritten gegebenen Fläche beziehen, parallele Flächen sind.

5. **Aufgabe.** Welche Form mufs ein schwerer Körper von gegebener Oberfläche und gegebenem Inhalt und mit ebener, kreisförmiger Grundfläche haben, wenn, seine Grundfläche auf eine wagerechte Ebene gestellt, das Moment seiner Stabilität ein Maximum sein soll?

8.

Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern.

(Vom Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Unter den Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern werden hier diejenigen verstanden, welche einem solchen Systeme, abgesehen von den Abweichungen wegen der Kugelgestalt und der Farbenzerstreuung, zukommen. Schon früher hatte ich mit diesem interessanten Gegenstande mich zu beschäftigen angefangen, als ich eine Abhandlung darüber von Gabrio Piola in den „Mailänder Ephemeriden für 1822: *Sulla Teorica dei Cannocchiali*," kennen lernte, wozu der Verfasser, wie er im Eingange bemerkt, durch das Studium zweier Abhandlungen ähnlichen Inhalts von Lagrange in den „Berliner Memoiren für 1778 und 1803" veranlafst worden war, und wovon sich sein Aufsatz hauptsächlich dadurch unterscheidet, dafs er die durch Lagrange's Calcul erhaltenen Gleichungen als lineare Gleichungen mit endlichen Differenzen behandelt und dadurch zu einer nicht geringen Anzahl neuer Relationen geführt wird. Durch Lesung dieser Abhandlung von Piola, mit den von Lagrange angewendeten Methoden und mit den von Piola fortgesetzten Untersuchungen bekannt gemacht, gelang es mir nun leicht, den von mir früher gefundenen Resultaten eine allgemeinere und einfachere Form zu geben, unter der ich sie im vorliegenden Aufsatze mitzutheilen mir erlaube. Es werden darin zuerst aus der bekannten Formel für eine einfache Linse die allgemeinen, für ein beliebiges System von Gläsern geltenden Gleichungen durch Bildung eines Kettenbruchs und durch Benutzung der bekannten, den Kettenbrüchen zukommenden Eigenschaften hergeleitet; eine Herleitung, welche neu sein und durch ihre Einfachheit sich vielleicht empfehlen dürfte. Mit Hülfe der erhaltenen Relationen werden sodann mehrere, mir neu scheinende Vergleichungen zwischen einfachen Linsen und daraus zusammengesetzten Systemen angestellt, wonach die Erscheinungen bei letztern sich ganz nach den bei erstern Statt findenden Gesetzen richten. Den Fernröhren, als einer

merkwürdigen, speciellen Art von Linsensystemen, ist zum Schlusse ein besonderer Abschnitt gewidmet.

Figuren beizufügen, habe ich nicht für nöthig erachtet, obgleich sehr oft Buchstaben zur Bezeichnung einzelner Puncte angewendet worden sind. In dieser Hinsicht erinnere ich nur noch, dafs durchgehends beim Ausdruck einer Linie, durch die zwei an ihre Endpuncte gesetzte Buchstaben, die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben mit berücksichtigt werden mufs, so dafs, wenn $A, B, C, \ldots$ beliebig in einer Geraden gelegene Puncte sind, man stets $AB + BA = 0$, $AB + BC = AB - CB = AC$, u. s. w. hat.

---

§. 1. Man denke sich ein System von n Linsengläsern, deren Axen in eine und dieselbe Gerade fallen. Das Glas, auf welches das Licht zuerst trifft, heifse das erste; das unmittelbar folgende, das zweite; u. s. w., und nach dieser Ordnung seien $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ die in der gemeinschaftlichen Axe liegenden Mittelpuncte der Gläser.

Sei ferner A der Vereinigungspunct der auf das erste Glas fallenden Strahlen, die, nachdem A vor oder hinter dem Glase liegt, von A wirklich ausgehen, oder so das Glas treffen, dafs sie ohne den Dazwischentritt desselben sich in A vereinigen würden. Nach ihrer Brechung durch das erste Glas sei A_1 ihr Vereinigungspunct, so dafs sie entweder nach A_1 zu wirklich convergiren, oder so divergiren, als ob sie von einem vor dem Glase gelegenen Puncte A_1 herkämen. Auf gleiche Art seien $A_2, A_3, \ldots A_n$ die Vereinigungspuncte der Strahlen nach ihrer Brechung durch das zweite, dritte, ... $n$te Glas. Übrigens wollen wir für den Anfang den Punct A und damit auch alle übrigen $A_1, \ldots A_n$ in der Axe selbst liegend annehmen.

Die hierbei zu lösende Aufgabe ist nun folgende:

Das System der Gläser, d. h. ihre gegenseitigen Abstände und ihre Brennweiten sind gegeben. Es soll für einen beliebig in der Axe angenommenen Ort des Vereinigungspunctes A der auf das erste Glas fallenden Strahlen, der Ort der Vereinigung A_n nach ihrer Brechung durch das letzte Glas gefunden werden.

§. 2. Man setze die Abstände der Gläser von einander:

$$P_1P_2 = h_1, \quad P_2P_3 = h_2, \quad \ldots \quad P_{n-1}P_n = h_{n-1};$$

die reciproken Werthe ihrer Brennweiten, positiv bei erhabenen Gläsern,

negativ bei hohlen:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots\ldots\ g_n.$$

Endlich sei:

$$AP_1 = a_1,\quad A_1P_2 = a_2,\quad \ldots\ldots\ A_{n-1}P_n = a_n,$$
$$P_1A_1 = b_1,\quad P_2A_2 = b_2,\quad \ldots\ldots\ P_nA_n = b_n,$$

welche Linien positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem in ihren Ausdrücken die Aufeinanderfolge der zwei ihre Endpuncte bezeichnenden Buchstaben (wie P_2 auf A_1 folgend, in dem Ausdrucke $A_1P_2 = a_2$), mit der Richtung des Lichts übereinstimmt, oder ihr entgegengesetzt ist. Hiernach sind $h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots\ h_{n-1}$ insgesammt positiv.

Um nun, wie es die Aufgabe fordert, aus den gegebenen $h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots$ und $g_1,\ g_2,\ \ldots\ldots$ für ein beliebiges a_1 das zugehörige b_n zu finden, hat man die Gleichungen aufzulösen:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = g_1 & \\
 & b_1 + a_2 = h_1 \\
\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = g_2 & \\
 & b_2 + a_3 = h_2 \\
\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = g_3 & \vdots \\
\vdots & \\
 & b_{n-1} + a_n = h_{n-1} \\
\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = g_n &
\end{array}$$

von denen die Gleichungen zur rechten von selbst einleuchten die linker Hand stehenden aber aus den Elementen der Dioptrik bekannt sind. Mittelst eines beliebig gegebenen a_1 kann man daraus nach und nach $b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_{n-1},\ a_n$ und damit endlich b_n selbst berechnen. Da aber diese ziemlich weitläufige Rechnung für jeden anders gewählten Werth von a_1 wiederholt werden müſste, und gleichwohl, im Allgemeinen wenigstens, die Werthe von $b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots\ldots\ a_n$ nicht weiter zu wissen verlangt werden, so wollen wir durch Elimination dieser Gröſsen eine Gleichung zwischen a_1 und b_n unmittelbar abzuleiten suchen.

§. 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$b_1 = \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}},$$

$$b_2 = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - b_1}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}$$

$$b_3 = \cfrac{1}{g_3 - \cfrac{1}{h_2 - b_2}} = \cfrac{1}{g_3 - \cfrac{1}{h_2 - \cfrac{1}{g_2 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{a_1}}}}}}$$

u. s. w. Aus der Natur der Kettenbrüche erhellet aber leicht, daſs, wenn man aus den Elementen $a, b, c, d, \ldots$ die Zusammensetzungen bildet:

$$\begin{aligned} [a, b] &= ab - 1, \\ [a, b, c] &= [a, b]c - a, \\ [a, b, c, d] &= [a, b, c]d - [a, b], \\ [a, b, c, d, e] &= [a, b, c, d]e - [a, b, c], \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

und eben so $[b, c] = bc - 1$, $[b, c, d] = [b, c]d - b$, u. s. w. setzt, der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.} \cfrac{}{- \cfrac{1}{k}}}}} = \frac{[b, c, \ldots k]}{[a, b, c, \ldots k]} \text{ ist.}$$

Auch besitzen diese Ausdrücke die nicht schwer zu erweisenden Eigenschaften, daſs

$$[a, b, \ldots i][b, \ldots i, k] - [a, b, \ldots i, k][b, \ldots i] = 1.$$

und daſs

$$[a, b, \ldots i, k] = [k, i, \ldots b, a],$$

so daſs die Elemente, ohne den Werth des Ausdruckes zu verändern, auch in umgekehrter Folge genommen werden können *).

Hiernach ist nun:

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]}, \quad b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]},$$

$$b_3 = \frac{[h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]}{[g_3, h_2, g_2, h_1, g_1, a_1]},$$

und überhaupt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2}, \ldots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \ldots h_1, g_1, a_1]} \\ &= \frac{[h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]a_1 - [h_{n-1}, \ldots h_1]}{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]a_1 - [g_n, h_{n-1}, \ldots h_1]} \\ &= \frac{[g_1, \ldots h_{n-1}]a_1 - [h_1, \ldots h_{n-1}]}{[g_1, \ldots g_n]a_1 - [h_1, \ldots g_n]}. \end{aligned}$$

---

*) Vergl. Euler *Specimen algorithmi singularis* in *Nov. Comment. Petrop. Tom. IX.*

Setzt man daher, um die Lagrangesche Bezeichnungs-Art beizubehalten:

$$[g_1, \ldots . h_{i-1}] = H_i, \quad -[h_1, \ldots . h_{i-1}] = L_i,$$
$$[g_1, \ldots . g_{i-1}] = M_i, \quad -[h_1, \ldots . g_{i-1}] = N_i,$$

so wird:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}},$$

wonach man, wenn einmal die vier, bloſs von der Structur des Linsensystems abhängigen Gröſsen $H_n, \ldots . N_{n+1}$ berechnet sind, für jedes gegebene a_1 das zugehörige b_n leicht finden kann.

§. 4. Die Berechnung der vier Gröſsen $H_n, \ldots . N_{n+1}$ läſst sich auf verschiedene Arten anstellen, von denen folgende zwei die vorzüglichsten sein möchten. Man hat:

$$H_{i+1} = [g_1, \ldots . h_{i-1}, g_i, h_i] = [g_1, \ldots . h_{i-1}, g_i] h_i - [g_1, \ldots . h_{i-1}],$$

d. i. $H_{i+1} = h_i M_{i+1} - H_i$,

und eben so ergiebt sich:

$$L_{i+1} = h_i N_{i+1} - L_i,$$
$$M_{i+1} = g_i H_i - M_i,$$
$$N_{i+1} = g_i L_i - N_i.$$

Hiernach ist bei einem System von 2 Gläsern:

$$H_2 = [g_1, h_1] = g_1 h_1 - 1, \quad L_2 = -[h_1] = -h_1,$$
$$M_3 = g_2 H_2 - M_2, \quad \text{wo } M_2 = [g_1] = g_1,$$
$$N_3 = -[h_1, g_2] = 1 - h_1 g_2;$$

bei einem System von 3 Gläsern:

$$H_3 = h_2 M_3 - H_2, \quad L_3 = h_2 N_3 - L_2,$$
$$M_4 = g_3 H_3 - M_3, \quad N_4 = g_3 L_3 - N_3;$$

u. s. w. Noch bemerke man, daſs nach diesen Formeln rückwärts.

$$H_1 = h_1 M_2 - H_2 = 1, \qquad M_1 = g_1 H_1 - M_2 = 0,$$
$$N_2 = g_2 L_2 - N_3 = -1, \quad L_1 = h_1 N_2 - L_2 = 0,$$
$$N_1 = g_1 L_1 - N_2 = 1 \text{ sich findet.}$$

§. 5. Eine andere Methode, die Werthe von $H, \ldots . N$ zu berechnen, und welche Piola in der Eingangs erwähnten Abhandlung, wiewohl auf andere Weise, als es jetzt geschehen soll, entwickelt, besteht in Folgendem. Es ist:

$$H_{i+1} = [h_i, g_i, h_{i-1}, \ldots . g_2, h_1, g_1]$$
$$= \frac{[h_i, g_i, \ldots . g_1]}{[g_i, \ldots . g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1}, \ldots . g_1]}{[h_{i-1}, \ldots . g_1]} \cdots \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1, g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1$$
$$= (h_i, g_i, \ldots . g_1)(g_i, h_{i-1}, \ldots . g_1) \ldots . (g_2, h_1, g_1)(h_1, g_1) g_1,$$

wenn man den Bruch $\frac{[a, b, c, \ldots k]}{[b, c, \ldots k]} = (a, b, c, \ldots k)$ setzt. Nach §. 3. ist aber dieser Bruch dem Kettenbruche $a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \text{etc.}}}$ gleich; folglich:

$(a, b, c, \ldots k) = a - \frac{1}{(b, c, \ldots k)}$; und hiernach lassen sich die Factoren, aus welchen wir H_i zusammengesetzt dargestellt haben, ein jeder aus dem nächstvorhergehenden sehr leicht berechnen, nämlich:

$$(h_1, g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1}, \quad (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)}, \text{ u. s. w.}$$

Setzt man daher.

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \alpha, \quad g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta, \quad h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma, \quad g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta, \text{ u. s. w.,}$$

so wird $H_2 = \alpha g_1$, $H_3 = \gamma\beta\alpha g_1$, u. s. w.

Mit Weglassung des ersten Factors von H_{i+1} erhält man M_{i+1}, und daher ist $M_2 = g_1$, $M_3 = \beta\alpha g_1$, $M_4 = \delta\gamma\beta\alpha g_1$, u. s. w.

Auf ähnliche Art ergiebt sich $-N_3 = \mu h_1$, $-N_4 = \pi\nu\mu h_1$, u. s. w.,

$$-L_2 = h_1, \quad -L_3 = \nu\mu h_1, \quad -L_4 = \varrho\pi\nu\mu h_1, \text{ u. s. w.}$$

wenn $g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu$, $h_2 - \frac{1}{\mu} = \nu$, $g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi$, u. s. w. gesetzt wird.

§. 6. Statt, wie bisher, den Vereinigungspunct der Strahlen vor der Brechung durch das erste Glas, in die Axe selbst fallen zu lassen, wollen wir ihn jetzt aufserhalb der Axe annehmen und ihn mit C bezeichnen. Mit ihm werden auch alle übrigen Vereinigungspuncte, welche der Reihe nach C_1, C_2, ... C_n heifsen, aufserhalb der Axe sein, und zwar so, dafs C und C_1 mit P_1; C_1 und C_2 mit P_2, u. s. w. in einer Geraden liegen (nach dem aus der Dioptrik bekannten Satze, dafs Object, Bild und Mittelpunct der Linse immer in einer Geraden enthalten sind). Nehmen wir ferner an, dafs C mit A gleich weit von der ersten Linse entfernt ist, dafs also AC auf der Axe perpendicular steht, so werden auch A_1C_1, A_2C_2 u. s. w. perpendicular auf der Axe sein. Heifsen diese Perpendikel AC, A_1C_1, ... A_nC_n resp. c, c_1, c_2, ... c_n. Sie sind insgesammt in einer durch die Axe gehenden Ebene enthalten, und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie in dieser Ebene auf der einen oder andern Seite der Axe liegen.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe, wie aus dem durch a_1 und c bestimmten Orte von C der durch b_n und c_n bestimmte Ort von C_n (oder, was dasselbe ist, aus dem Ort und der Gröfse des Objects AC der

Ort und die Gröſse des durch alle Gläser gemachten Bildes $A_n C_n$) gefunden werden kann, hierzu ist nur noch übrig, die Abhängigkeit des c_n von a_1 und c zu zeigen, indem wir die Relation zwischen a_1 und b_n schon kennen gelernt haben.

§. 7. Weil AC, $A_1 C_1$ mit einander parallel sind, und AA_1, CC_1 sich in P_1 schneiden, so verhält sich $AC : A_1 C_1 = AP_1 : A_1 P_1 = AP_1 : -P_1 A_1$, d. i. $c : c_1 = a_1 : -b_1$, und eben so $c_1 : c_2 = a_2 : -b_2$, u. s. w., und man bekommt durch Zusammensetzung aller dieser n Verhältnisse:

$$\frac{c}{c_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

Es ist aber allgemein

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} \quad (\text{§. 3.}),$$

folglich

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{(h_i M_{i+1} - H_i) a_1 + h_i N_{i+1} - L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} = \frac{H_{i+1} a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} \quad (\text{§. 4.})$$

und eben so

$$a_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_i a_1 + N_i},$$

folglich

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i},$$

und eben so

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_1 + N_i}{M_{i-1} a_1 + N_{i-1}},$$

u. s. w., folglich

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} \cdots \frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_1 a_1 + N_1} = M_{i+1} a_1 + N_{i+1},$$

weil $M_1 = 0$ und $N_1 = 1$ (§. 4.). Hiernach wird:

$$c = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}},$$

wodurch man, wenn schon wegen b_n der Nenner dieses Ausdruckes berechnet worden, den Werth von c_n sogleich erhält, und welcher, je nachdem er positiv oder negativ ist, ein aufrechtes oder verkehrtes Bild zu erkennen giebt.

§. 8. Wiewohl die Bestimmung des Ortes und der Gröſse des Bildes aus dem Orte und der Gröſse des Objects bei einem aus mehreren Gläsern bestehenden Systeme ungleich zusammengesetzter als bei einem einfachen Glase ist, so lassen sich doch zwischen den Erscheinungen bei Einem Glase und denen bei der Verbindung mehrerer, einige sehr merkwürdige Analogieen aufstellen, wodurch man die bei einem solchen Systeme statt habenden Gesetze sehr leicht übersehen kann.

Sei P der Mittelpunct eines Linsenglases, und in der Axe desselben A der Ort des Objects, B der Ort des Bildes; sei ferner $AP = a$, $PB = b$, die Brennweite des Glases $= f$, so ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ oder } (a+b)f = ab, \text{ oder } (a-f)(b-f) = f,$$

und $a:b =$ dem Verhältnifs zwischen den Durchmessern von Object und Bild. — Man setze nun

$$a = \alpha + f, \quad b = \beta + f,$$

so kommt nach Elimination von a und b:

$$\alpha\beta = f^2 \text{ und } a:b = \alpha:f = f:\beta = \sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}.$$

Man bestimme demnach in der Axe zwei Puncte F und G so, dafs $FP = PG = f$, dafs also F und G die beiden Brennpuncte sind, und zwar F auf der das Licht empfangenden oder vordern Seite der Linse, und G auf der hintern Seite liegt, oder umgekehrt, je nachdem f positiv oder negativ, d. i. die Linse erhaben oder hohl ist. Alsdann ist

$$AF = AP - FP = a - f = \alpha \text{ und } GB = PB - PG = b - f = \beta,$$

mithin $AF.GB = f^2$ und $AP:PB = AF:FP = PG:GB = \sqrt{(AF)}:\sqrt{(GB)}$. Nennt man daher (weil für $AF = 0$, $GB = \infty$ und für $GB = 0$, $AF = \infty$ wird), den Ort F, wo das Object sich befinden mufs, wenn das Bild unendlich entfernt seyn soll, den ersten Brennpunct, und den Ort G des Bildes, wenn das Object unendlich entfernt ist, den zweiten Brennpunct, so kann man die gefundenen Formeln in folgendem Satze aussprechen.

Die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abstande des Objects vom ersten und dem Abstande des Bildes vom zweiten Brennpuncte ist der Brennweite gleich. Dabei liegt, weil AF und GB zugleich positiv oder zugleich negativ sein müssen, das Bild rechts vom zweiten Brennpuncte, wenn das Object links vom ersten absteht, und umgekehrt. Auch verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild wie die Quadratwurzeln aus diesen Abständen.

§. 9. Dieser Satz läfst sich nun Wort für Wort auch auf jedes aus mehrern Gläsern bestehende System anwenden. Um dieses zu zeigen, wollen wir für's Erste die in §. 3. erhaltene Relation zwischen a_1 und b_n auf die Form $\alpha\beta = f^2$ zu bringen suchen. Sei zu dem Ende

$$a_1 = p + \alpha, \quad b_n = q + \beta,$$

wo α und β, eben so wie a_1 und b_n, mit dem Orte des Objects und Bildes veränderlich, p und q von der Structur des Systems abhängige und daher constante Gröfsen seyn sollen. Substituirt man diese Werthe für a_1 und b_n in der gedachten Relation:

$$M_{n+1} a_1 b_n - H_n a_1 + N_{n+1} b_n = L_n,$$

so kommt:

$$M_{n+1}\alpha\beta + (M_{n+1} q - H_n)\alpha + (M_{n+1} p + N_{n+1})\beta = L_n - M_{n+1} pq + H_n p - N_{n+1} q.$$

Man bestimme demnach p und q so, dass

$$M_{n+1} p + N_{n+1} = 0 \text{ und } M_{n+1} q - H_n = 0,$$

so zieht sich unsere Gleichung zusammen in:

$$M_{n+1}\alpha\beta = L_n + H_n p,$$

und wird nach Elimination von p:

$$M_{n+1}^2 \alpha\beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1}$$

$$= -[h_1, \ldots . h_{n-1}][g_1, h_1, \ldots . h_{n-1}, g_n] + [g_1 h_1, \ldots . h_{n-1}][h_1, \ldots . h_{n-1}, g_n]$$

$$= 1 \text{ (§. 3.), oder } \alpha\beta = f^2,$$

wenn $\frac{1}{M_{n+1}} = f$ gesetzt wird. Bezeichnen daher, wie in §. 1., P_1 und P_n die Mittelpuncte des ersten und letzten Glases, und macht man in der Axe

$$FP_1 = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}, \quad P_n G = q = \frac{H_n}{M_{n+1}},$$

so wird $AF = AP_1 - FP_1 = a_1 - p = \alpha$, $GA_n = P_n A_n - P_n G = b_n - q = \beta$, folglich $AF . GA_n = f^2$. Nennt man also wiederum F und G, als diejenigen zwei Puncte, in deren erstem das Object, im zweiten das Bild sich befindet, wenn das andere von beiden unendlich entfernt ist, den ersten und zweiten Brennpunct, so ist auch bei jedem System von Gläsern die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Objects und Bildes vom ersten und zweiten Brennpunct von constanter Länge $= f$, die man, analog dem Vorigen, die Brennweite des Systems nennen kann, und deren reciproker Werth $= g = [g_1, h_1, \ldots . h_{n-1}, g_n]$ ist.

Was ferner das Verhältniss zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes anlangt, so ist dieses (§. 7.):

$$\begin{aligned} = (-1)^n c : c_n &= M_{n+1} a_1 + N_{n+1} : 1 \\ &= M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1} : 1 \\ &= M_{n+1}\alpha : 1, \quad \text{wegen} \quad M_{n+1} p + N_{n+1} = 0, \\ &= \alpha : f = f : \beta = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \end{aligned}$$

$= \sqrt{(AF)} : \sqrt{(GA_n)}$, eben so wie im vorigen §. bei der einfachen Linse.

Man kann sich nach diesen Formeln leicht eine übersichtliche Vorstellung verschaffen von dem Gange des Bildes und der Veränderung seiner Grösse, während das Object längs der Axe hin bewegt wird. Heissen X und Y zwei unendlich entfernte Puncte der Axe, X nach der Seite zu liegend, von welcher das Licht herkommt, Y nach der Seite zu, nach welcher es hingeht. Ist nun das Object A in X, so befindet sich das Bild B (statt A_n) in G und ist unendlich kein. Wird hierauf A von X nach F bewegt, so geht B mit immer wachsender Geschwindigkeit und wachsendem Durchmesser von G nach Y, wo es unendlich gross wird. Es macht darauf B einen Sprung durch das Unendliche von Y nach X, verkehrt dabei seine Lage und geht mit abnehmender Geschwindigkeit und abnehmendem Durchmesser von X nach G zurück, während A von F nach Y fortgeführt wird.

Allerdings ist der bei weitem grösste Theil des letztern Weges von A, wo A hinter dem ersten Glase sich befindet (auch wohl ein Theil des erstern Weges von A, wenn F hinter dem ersten Glase liegt), nicht unmittelbar möglich, weil die von A herkommenden Strahlen in der Richtung von X nach Y zunächst das erste Glas treffen sollen. Man sieht aber von selbst, dass man, um dieser scheinbaren Unmöglichkeit zu begegnen, nur die Strahlen des vor das erste Glas gestellten Objects, mittelst anderer Gläser oder auch Spiegel, convergirend auffallen lassen darf, welche Strahlen erst hinter dem ersten Glase zu einem die Stelle des Objects nunmehr vertretenden Bilde sich vereinigen würden. Übrigens bemerke man noch das aus dem Vorigen leicht abzunehmende allgemeine Gesetz, dass die Bewegung von Object und Bild längs der Axe immer nach einerlei Richtung geschieht.

§. 10. Ausser den zwei Brennpuncten F, G giebt es bei jedem Linsen-System noch vier andere merkwürdige Puncte, die ich mit Q, Q', R, R' bezeichnen will, und welche paarweise von den beiden Brennpuncten um die Brennweite des Systems abstehen, so dass

$$Q'F = FQ = RG = GR' = f.$$

Da hiernach $QF.GR = Q'F.GR' = f^2$, so sind (§. 9.) R, R' die Örter des Bildes, wenn das Object sich resp. in Q, Q' befindet. Auch ist dann beide Male das Bild mit dem Object von gleicher Grösse, nur das eine Mal aufrecht, das andere Mal verkehrt. Man hat nämlich, wenn das Object in Q ist:

$$c : c_n = (-1)^n (\alpha = QF) : f = (-1)^n : -1,$$

und wenn das Object in Q' ist:

$$c : c_n = (-1)^n Q'F : f = (-1)^n : 1.$$

Befindet sich also das Object in Q, (Q'), so ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem die Zahl der Gläser ungerade oder gerade (gerade oder ungerade) ist.

Will man zwei beliebige zusammengehörige Örter von Object A und Bild B durch ihre Abstände von diesen Puncten bestimmen, so hat man:

$$f^2 = AF.GB = (AQ+QF)(GR+RB) = (AQ-f)(RB-f),$$

woraus

$$\frac{1}{AQ}+\frac{1}{RB} = \frac{1}{f}$$

folgt; und eben so erhält man in Bezug auf Q' und R':

$$\frac{1}{Q'A}+\frac{1}{BR'} = \frac{1}{f}.$$

Noch fliesst aus der ersten dieser zwei Gleichungen:

$$\frac{AQ}{RB} = \frac{AQ-f}{f} = \frac{AF}{f},$$

und aus der zweiten:

$$\frac{Q'A}{BR'} = -\frac{AF}{f};$$

folglich

$$\frac{AQ}{RB} = -\frac{Q'A}{BR'} = \frac{\alpha}{f} = \frac{(-1)^n c}{c_n}, \quad \text{und} \quad \frac{QA}{AQ'} = -\frac{RB}{BR'}.$$

Die Linien QQ' und RR' werden daher, erstere durch das Object, letztere durch das Bild, nach Verhältnissen getheilt, die einander gleiche und entgegengesetzte Exponenten haben, so dass, je nachdem das Object innerhalb oder ausserhalb QQ' liegt, das Bild ausserhalb oder innerhalb RR' fällt. Nächstdem verhalten sich die Durchmesser von Object und Bild wie ihre resp. Abstände von Q und R, oder von Q' und R'.

Hat man es nur mit einem Glase zu thun, so fallen, weil hier $FG = 2f$ ist, die Puncte Q und R mit dem Mittelpuncte P des Glases zusammen. Schreibt man demnach in dem Vorigen, P für Q sowohl als für R, so erhält man die aus den Elementen der Dioptrik schon bekannten Formeln:

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{PB}\left(=\frac{1}{Q'A}+\frac{1}{BR'}\right) = \frac{1}{f}, \quad -\frac{c}{c_1} = \frac{AP}{PB} = -\frac{Q'A}{BR'},$$

wo $Q'P = PR' = 2f$. Man sieht daher, wie auch diese nur für Ein Glas

geltenden Formeln auf jedes beliebige System von Gläsern ausgedehnt werden können.

Von Fernröhren.

§. 11. Unter einem Fernrohr soll hier überhaupt ein System von Gläsern verstanden werden, bei welchem parallel auf das erste Glas fallende Strahlen von dem letzten Glase auch parallel wieder ausgehen, oder, was dasselbe ist, wo für ein unendlich entferntes Object auch das Bild unendlich entfernt liegt, wo also beide Brennpuncte des Systems unendlich entfernt sind, mithin die Brennweite $= f$ unendlich gross, also $M_{n+1} = 0$ ist. Und in der That geht die allgemeine Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 4.), für $M_{n+1} = 0$, über in:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{N_{n+1}},$$

wo für $a_1 = \infty$ auch $b_n = \infty$ wird. Die Gleichung

$$M_{n+1} = 0$$

ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung, bei welcher ein System von Gläsern als Fernrohr dienen kann.

§. 12. Die Gleichung zwischen den Elementen a_1 und b_n, wodurch die Örter des Objects und seines Bildes bestimmt werden, ist demnach bei dem Fernrohr vom ersten Grade oder linear, während sie bei jedem andern System von Gläsern vom zweiten Grade, oder, um mich bestimmter auszudrücken, hyperbolisch war, indem die Gleichung zwischen diesen Elementen (a_1 und b_n §. 3., oder α und β §. 9., oder AQ und RB §. 10.), als Abscisse und Ordinate betrachtet, einer Hyperbel angehörte.

Stellt man sich daher das Object längs der Axe sich bewegend vor, so ist bei dem Fernrohr die Geschwindigkeit des Bildes der des Objects proportional. Sind nämlich A und B, A' und B' zwei Paare zusammengehöriger Örter von Object und Bild, so hat man:

$$N_{n+1} \,.\, P_n B = H_n \,.\, AP_1 + L_n,$$
$$N_{n+1} \,.\, P_n B' = H_n \,.\, A'P_1 + L_n,$$

folglich, nach Abzug der untern Gleichung von der obern:

$$N_{n+1} \,.\, B'B = H_n \,.\, AA', \text{ und } AA' : BB' = -N_{n+1} : H_n = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2,$$

indem die Gleichung $L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1$ (§. 9.), für das Fernrohr in $-H_n N_{n+1} = 1$ übergeht. Zugleich sieht man daraus, dass, eben so wie bei einem Linsensystem überhaupt (§. 9.), auch beim Fernrohr die Bewegung von Object und Bild immer nach einerlei Richtung geschieht.

Dasselbe Verhältniſs findet auch zwischen den Abständen des Objects und Bildes vom Fernrohr Statt, wenn das eine, und folglich auch das andere, unendlich entfernt ist. Denn je mehr diese Abstände zunehmen, um so näher wird:

$$N_{n+1} : H_n = AP_1 : P_n B = AD : DB = AD : -BD$$

und daher

$$AD : BD = N^2_{n+1} : 1 = 1 : H^2_n,$$

wo D irgend einen Punct des Fernrohrs selbst, oder in dessen Nähe, bezeichnet.

§. 13. Die Gleichung zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes (§. 7.) wird für das Fernrohr:

$$N_{n+1} c_n = (-1)^n c,$$

woraus wir schlieſsen, dass, welches auch der Abstand des Objects vom Fernrohr sein mag, sein Bild doch immer dieselbe Gröſse behält.

Liegen Object und Bild unendlich entfernt, so ist das Verhältniſs ihrer scheinbaren Durchmesser:

$$= \frac{c}{AD} : \frac{c_n}{BD} = \frac{c}{c_n} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{N_{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{1}{N^2_{n+1}} = 1 : (-1)^n N_{n+1}.$$

Ist also N_{n+1} absolut grösser als 1, so wird das Fernrohr weit entlegene Gegenstände nicht nur deutlich, sondern auch, wie es sein practischer Zweck erfordert, vergrössert zeigen, und diese Vergrösserung durch die Zahl N_{n+1} gegeben sein. Dabei ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem bei einer geraden (ungeraden) Anzahl von Gläsern die Zahl N_{n+1} positiv oder negativ (negativ oder positiv) gefunden wird.

Versteht man unter der Vergrösserung im weitern Sinne, den Exponenten des Verhältnisses zwischen den scheinbaren Durchmessern von Bild und Object, wenn beide unendlich entfernt sind, so läſst sich das Bisherige in folgendem Satze zusammenfassen.

Die Geschwindigkeit des Objects, dividirt durch die Geschwindigkeit des Bildes, ist, wenn beide Geschwindigkeiten auf die Axe des Fernrohrs bezogen werden, dem Quadrate der Vergröſserung gleich. Werden sie aber nach einer auf der Axe normalen Richtung geschätzt, so ist dieser Quotient der Vergröſserung selbst gleich. Oder:

Der Durchmesser des Objects, dividirt durch den Durchmesser des Bildes, giebt, wenn beide Durchmesser parallel

mit der Axe sind, das Quadrat der Vergröſserung; die Vergröſserung selbst aber, wenn die auf der Axe normalen Durchmesser genommen werden.

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, daſs im Vorigen unter den Durchmessern bloſs die auf der Axe normalen, als die allein gut wahrnehmbaren gemeint sind. Wiewohl also von diesen Durchmessern der des Bildes immer N_{n+1} mal kleiner ist, als der des Objects, auch wenn das Object sehr weit entfernt liegt, so erscheint doch in diesem Falle der erstere Durchmesser N_{n+1} mal grösser als der letztere, weil dann das Bild N^2_{n+1} mal näher ist als das Object.

Der Satz, dass der Durchmesser des Objects, dividirt durch den Durchmesser des Bildes, die Vergrösserung giebt, liegt übrigens dem von Adams erfundenen Auzometer zum Grunde, wo zum Object das Objectivglas selbst, oder vielmehr dessen Einfassung, dient*).

§. 14. Es ist im Obigen gezeigt worden, wie die Haupt-Eigenschaften eines beliebigen Systems von Gläsern ganz analog denen sind, welche schon jedes einfache erhabene oder hohle Glas besitzt; wie die Bestimmung von Ort und Grösse des Bildes aus dem Ort und der Grösse des Bildes mittelst der Brennweite und der Brennpuncte, nach einerlei Formeln bei einfachen Linsen und bei ganzen Systemen geschehen kann. Auf gleiche Art wird nun auch der jetzt betrachtete specielle Fall, wo die Brennweite des Systems unendlich gross ist, sein Analogon unter den einfachen Gläsern haben, — ein Glas mit einer ebenfalls unendlich grossen Brennweite, d. h. ein Glas, dessen zwei Seiten einander parallel sind. Was daher ein solches Glas unter den einfachen Linsen ist, dieselbe Stelle nimmt das Fernrohr unter Systemen von Linsen ein. So wie bei einem Fernrohr das Bild für jeden Ort des Objects einerlei Grösse hat, und sich gleichförmig bewegt, wenn das Object um gleiche Räume fortgerückt wird, so finden sich dieselben Eigenschaften auch bei dem

---

*) In Gehler's „Physik. Wörterbuche," Artic. Auzometer, findet sich bei Erklärung des Princips, worauf dieses Instrument beruht, eine kleine Unrichtigkeit, die auch in die neue Bearbeitung dieses Wörterbuchs übergegangen ist, und welche darin besteht, dass bei dem astronomischen Fernrohr mit zwei Gläsern, als auf welches daselbst bei Erläuterung des Princips allein Rücksicht genommen wird, das Bild der Objectivfassung auf das Ocular selbst fallen soll, da es doch, wie dort später ebenfalls bemerkt wird, dahin fällt, wo sonst das Auge hin gehalten werden muss.

Anm. d. Verf.

Glase mit parallelen Seiten vor, indem hier Bild und Object immer zusammenfallen, und wobei folglich die Vergrösserungszahl $= 1$ ist.

Es werde hier noch bemerkt, dass bloſs aus Hohlgläsern ein Fernrohr zu construiren unmöglich ist. Sind nämlich g_1, g_2, g_3, ... insgesammt negativ (h_1, h_2, h_3, ... sind ihrer Natur nach immer positiv), so findet sich aus den Formeln sowohl in §. 4. als in §. 5., M_2 negativ, M_3 positiv, M_4 negativ, M_5 positiv, und so fort abwechselnd, also $(-1)^n M_{n+1}$ immer positiv, und niemals $= 0$.

§. 15. Der Vollständigkeit wegen ist es noch übrig, zu zeigen, wie bei einem Fernrohr die für ein angenommenes Gesichtsfeld erforderlichen Öffnungen der Gläser und der vortheilhaftste Ort des Auges bestimmt werden können. Zu diesem Ende wollen wir für's Erste bei einem System von Gläsern überhaupt den Weg eines, vor seiner Brechung durch das erste Glas die Axe in A treffenden Strahles näher untersuchen. Es begegne dieser Strahl dem 1sten, 2ten, ... $n$ten Glas resp. in S_1, S_2, ... S_n.

Weil alle vom Punkte A der Axe ausgehende Strahlen, nach ihrer Brechung durch das erste Glas, den Punct A_1 der Axe zum Vereinigungspunct haben, so muss auch $S_1 S_2$ durch A_1 gehen, indem $S_1 S_2$ der Weg unseres von A kommenden Strahles unmittelbar nach seinem Durchgange durch das erste Glas ist. Aus ähnlichem Grunde müssen S_2 und S_3 mit A_2, u. s. w. in einer Geraden liegen, und der Strahl wird, nach seiner Brechung durch das letzte Glas, der Axe in A_n begegnen. Wenn also die mit einander parallele Linien $P_1 S_1$, $P_2 S_2$, $P_3 S_3$, ... positiv oder negativ genommen werden, je nachdem die Puncte S_1, S_2, S_3, auf der einen oder andern Seite der Axe liegen, so muss sich verhalten $P_1 S_1 : P_2 S_2 = A_1 P_1 : A_1 P_2 = -P_1 A_1 : A_1 P_2$, also wenn wir noch $P_1 S_1 = s_1$, $P_2 S_2 = s_2$, u. s. w. setzen:

$$s_1 : s_2 = -b_1 : a_2,$$

und eben so

$$s_2 : s_3 = -b_2 : a_3,$$

u. s. w. bis

$$s_{n-1} : s_n = -b_{n-1} : a_n.$$

Werden diese $n-1$ Proportionen in einander multiplicirt, so kommt:

$$s_1 : s_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1} : a_2 a_3 \dots a_n \text{ und}$$

$$\begin{aligned} b_n s_1 : a_1 s_n &= (-1)^{n-1} b_1 \dots b_n : a_1 \dots a_n \\ &= (-1)^{n-1} : M_{n+1} a_1 + N_{n+1} \text{ (§. 7.)}, \end{aligned}$$

und wenn man darin noch für b_n seinen Werth aus §. 3. substituirt:

$$(-1)^{n-1} a_1 s_n = (H_n a_1 + L_n) s_1,$$

woraus man, wenn a_1 und s_1 gegeben sind, die Werthe von s_2, s_3, ... s_n unabhängig von einander finden kann, indem man nur n nach und nach $= 2, 3,$ . . . . zu setzen hat.

Seien endlich noch t, t_1, t_2, ... t_{n-1}, t_n die Winkel, welche die Theile des Strahls: AS_1, S_1S_2, S_2S_3, ... $S_{n-1}S_n$, S_nA_n mit der Axe machen, und jeder der Winkel, t_1 z. B., positiv oder negativ, je nachdem die Linie S_1S_2 in ihrer geradlinigen Verlängerung über S_2 hinaus nach der Seite zu von der Axe divergirt, wo die positiven oder negativen s liegen. Alsdann ist wegen der Kleinheit dieser Winkel:

$$t = \frac{P_1S_1}{AP_1} = \frac{s_1}{a_1}, \quad t_1 = \frac{P_1S_1}{A_1P_1} = \frac{P_2S_2}{A_1P_2} = -\frac{s_1}{b_1} = \frac{s_2}{a_2},$$

$$t_2 = -\frac{s_2}{b_2} = \frac{s_3}{a_3}, \text{ u. s. w. } \quad t_{n-1} = -\frac{s_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{s_n}{a_n}, \quad t_n = -\frac{s_n}{b_n},$$

und man erhält, wenn man die hieraus folgenden Werthe für a_1 und b_n in die obigen Gleichungen substituirt:

$$(-1)^n\, t_n = M_{n+1} s_1 + N_{n+1} t,$$

$$(-1)^{n-1} s_n = H_n s_1 + L_n t.$$

Die erste dieser zwei Formeln wird für das Fernrohr: $(-1)^n t_n = N_{n+1} t$, und giebt damit zu erkennen, dass Parallelstrahlen, welche vor dem Eintritt in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneiden, nach der letzten Brechung wieder parallel ausfahren und mit der Axe einen Winkel $= N_{n+1} t$ machen, dass also N_{n+1} die Vergrösserungszahl ist, wie schon in §. 13. auf andere Weise gezeigt wurde.

Die zweite Formel lehrt, dafs (wenn ein Strahl, welcher vor dem Eintritt in das erste Glas die Axe unter einem Winkel $= t$ schneidet und dieses Glas in einer Entfernung von der Axe, $= s_1$, trifft, auch den übrigen Gläsern begegnen können soll), die Halbmesser des zweiten, dritten, u. s. w. nicht kleiner sein dürfen als:

$$H_2 s_1 + L_2 t, \quad H_3 s_1 + L_3 t, \quad \text{u. s. w.}$$

Würde aber der Strahl erst nach seinem Eintritte in das erste Glas, ohne von diesem gebrochen zu werden, die Axe unter dem Winkel t schneiden, so sind die kleinstmöglichen Halbmesser:

$$-H_2 s_1 + L_2 t, \quad -H_3 s_1 + L_3 t, \quad \text{u. s. w.}$$

Für einen mit der Axe parallel einfallenden und das erste Glas in dem Abstande $= s_1$ von der Axe treffenden Strahl werden diese Halb-

messer: $H_2 s_1$, $H_3 s_1$, $H_4 s_1$ u. s. w.; und für einen Strahl, welcher durch den Mittelpunct des ersten Glases selbst geht und mit der Axe einen Winkel $= t$ macht: $L_2 t$, $L_3 t$, $L_4 t$, u. s w.

§. 16. Wenden wir diese für jedes System von Gläsern geltende Bestimmungen auf das Fernrohr an. Da hier alle von einem und demselben Puncte des Objects ausgehenden Strahlen als parallel mit einander anzusehen sind, und daher die Axe unter gleichem Winkel, welcher $= t$ sei, schneiden, so darf unter der Voraussetzung, daſs alle auf das erste Glas, dessen Halbmesser $= s_1$, fallende Strahlen auch das zweite treffen sollen, der Halbmesser des zweiten nicht kleiner sein als die absolut gröſsere der beiden Gröſsen: $H_2 s_1 + L_2 t$, $-H_2 s_1 + L_2 t$, und so fort bei den folgenden Gläsern. Da aber unter allen den das erste Gas treffenden Strahlen sich diejenigen am vollkommensten in einem Puncte des Bildes vereinigen, welche nahe um den Mittelpunct des Glases einfallen, so ist man zufrieden, wenn nur die Axe des auf das erste Glas stoſsen den Strahlencylinders, oder der **Hauptstrahl**, die folgenden Gläser ungehindert durchgehen kann. Soll also ein von der Axe des Rohrs um den Winkel t abliegender Punct durch dasselbe noch gut gesehen werden können, d. h. soll t der scheinbare Halbmesser des Gesichtsfeldes sein, so müssen die Halbmesser des 2ten, 3ten, u. s. w. Glases, unabhängig vom Halbmesser des 1sten, die Werthe $L_2 t$, $L_3 t$, ... $L_4 v$ haben.

§. 17. Alle H uptstrahlen haben als Strahlen, welche von einem und demselben Puncte, nämlich dem Mittelpuncte des ersten Glases, herkommen, nach ihrer Brechung durch das letzte Glas einen Vereinigungspunct, dessen Abstand vom letzten Glase, $= b_n$, gefunden wird, wenn man in der Gleichung zwischen a_1 und b_n (§. 3.), $a_1 = 0$ setzt. Dies giebt:

$$b_n = \frac{L_n}{N_{n+1}}.$$

Findet sich hieraus b_n positiv, so liegt dieser Vereinigungspunct, oder das Bild des ersten Glases, hinter dem letzten Glase, und das Auge wird, dahin gebracht, seine vortheilhafteste Stellung haben, indem es nur hier alle Hauptstrahlen zugleich empfangen kann, und in gröſserer sowohl als geringerer Entfernung vom letzten Glase, einen durch die Einfassungen der Gläser verminderten Gesichtskreis hat. Erhält man b_n negativ, so liegt der Vereinigungspunct der Hauptstrahlen vor dem letzten Glase und es bleibt nichts übrig, bis das Auge demselben möglichst nahe zu

bringen, wo es allerdings nur noch Hauptstrahlen von den Objecten empfangen kann, deren Winkel-Abstand von der Axe, = dem Halbmesser der Pupille, dividirt durch b_n, ist.

Ist das Fernrohr blofs aus erhabenen Gläsern zusammengesetzt, sind also, eben so wie $h_1, h_2, \ldots$, auch $g_1, g_2, \ldots$ insgesammt positiv, so liegt der Vereinigungspunct aller Hauptstrahlen stets hinter dem letzten Glase, der es ist für $a_1 = 0$, b_n immer positiv. Dies läfst sich auf folgende Weise darthun.

Mit Anwendung der in §. 5. gebrauchten Bezeichnung $(a, b, c, \ldots)$ für den Kettenbruch $a - \frac{1}{b - \text{etc.}}$, und vorausgesetzt, dafs $a, b, c, d, \ldots$ insgesammt positive Gröfsen sind, hat man:

$$a > a - \frac{1}{\;} \qquad \text{und eben so } b > (b, c),$$

folglich

$$(a, b) = a - \frac{1}{b} > a - \frac{1}{(b, c)} = (a, b, c), \text{ und eben so } (b, c) > (b, c, d),$$

folglich

$$(a, b, c) = a - \frac{1}{(b, c)} > a - \frac{1}{(b, c, d)}$$

also

$$a > (a, b) > (a, b, c) > (a, b, c, d) >$$

Nun ist beim Fernrohr $M_{n+1} = [g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1] = 0$, also auch

$$\frac{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]}{[h_{n-1}, \ldots h_1, g_1]} = (g_n, h_{n-1}, \ldots h_1, g_1) = 0.$$

Zugleich ist aber, weil alle die Gröfsen $g_1, g_2, \ldots$ positiv sind, dem oben Erwiesenen zufolge: $(g_n, \ldots h_1) > (g_n, \ldots h_1, g_1)$; mithin $(g_n, h_{n-1}, \ldots h_1)$ positiv, d. i. $\frac{[g_n, h_{n-1}, \ldots h_1]}{[h_{n-1}, \ldots h_1]} = \frac{N_{n+1}}{L_n} = \frac{1}{b_n}$ eine positive Gröfse.

§. 18. Es bietet sich uns hier noch eine merkwürdige Form der Bedingungsgleichung dar, unter welcher ein System von Gläsern ein Fernrohr abgiebt. Soll nämlich aus den Gläsern, von deren Brennweiten die Reciproken $= g_1, g_2, \ldots g_n$ sind, ein Fernrohr construirt werden, so müssen sie in solchen Abständen $= h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ von einander gestellt werden, dafs $(g_n, \ldots h_1, g_1) = 0$, oder, was wegen $[g_n, \ldots g_1] = [g_1, \ldots g_n]$ auf dasselbe hinauskommt, dafs $[g_1, h_1, \ldots g_n] = 0$; dafs also

$$0 = g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_{n-2} - \text{etc.}\; \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_1}}}} \quad \text{oder} \quad 0 = g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_2 - \text{etc.}\; \cfrac{1}{h_{n-1} - \cfrac{1}{g_n}}}}$$

zwei mit einander identische Gleichungen, von denen die erstere auch unmittelbar aus den Kettenbrüchen in §. 3. folgt, wenn man darin a_1 sowohl als b_n, $= \infty$ setzt.

Auch die Vergröſserungszahl eines Fernrohrs läſst sich leicht in Kettenbruchform darstellen. Es ist nämlich, wegen $-H_n N_{n+1} = 1$, das Quadrat der Vergröſserung

$$= N_{n+1}^2 = -\frac{N_{n+1}}{H_n} = -\frac{N_{n+1}}{L_n} : \frac{H_n}{L_n}$$

$$\frac{[g_n, h_n \ldots\ldots h_1]}{[h_{n-1}, \ldots h_1]} : \frac{[g_1, h_1 \ldots\ldots h_{n-1}]}{[h_1 \ldots\ldots h_{n-1}]} = (g_n, \ldots\ldots h_1) : (g_1, \ldots\ldots h_{n-1}).$$

Die Vergröſserung ist daher die mittlere Proportionalzahl zwischen den zwei Kettenbrüchen:

$$g_n - \cfrac{1}{h_{n-1} - \text{etc.}\; \cfrac{}{1}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{g_1 - \cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{g_{n-1} - \cfrac{1}{h_{n-1}}}}}$$

deren ersterer zugleich den reciproken Werth der Entfernung des Auges vom letzten Glase giebt.

§. 19. Die Identität der zwei Bedingungsgleichungen für das Fernrohr: $(g_n, \ldots g_1) = 0$ und $(g_1, \ldots g_n) = 0$, von denen die eine aus der andern durch Umkehrung der Aufeinanderfolge der Elemente hervorgeht, hängt damit zusammen, daſs jedes zu einem Fernrohr geordnete System von Gläsern in gleiche Art als Fernrohr wirken kann, nachdem man das Licht von der einen oder von der andern Seite her durchgehen läſst: so wie bei einem System von Gläsern überhaupt der Ort und die Gröſse des Objects mit Ort und Gröſse des Bildes sich gegenseitig vertauscht, wenn die Richtung der Strahlen in die entgegengesetzte verwandelt wird Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem bekannten Satze, daſs der gebrochene Weg eines Strahles aus einem durchsichtigen Mittel in ein anderes zugleich als Weg einem Strahle aus dem letztern Mittel in das erstere dienen kann. Auch stimmen damit, wie gehörig, dio im Obigen

entwickelten Formeln überein. So mufs die Gleichung in §. 3. zwischen a_1 und b_n dieselbe bleiben, wenn man darin $g_1, h_1, \ldots g_n$ mit $g_n, \ldots, \ldots h_1, g_1$ und a_1 mit b_n gegenseitig vertauscht. In der That geht durch diese Vertauschung $H_n = [g_1, \ldots h_{n-1}]$ in $[g_n, \ldots h_1] = -N_{n+1}$ über, und umgekehrt; L_n und M_{n+1} bleiben ungeändert, und die Gleichung wird damit:

$$a_1 = \frac{-N_{n+1} b_n + L_n}{M_{n+1} b_n - H_n},$$

die, wie man leicht sieht, mit der dortigen identisch ist.

Auf gleiche Art mufs die Relation in §. 7. zwischen c_n, c, a_1 zu einer gleichbedeutenden führen, wenn man diese Gröfsen in c, c_n, b_n und $g_1, \ldots g_n$ in $g_n, \ldots g_1$ verwandelt. Man erhält damit:

$$(M_{n+1} b_n - H_n) c = (-1)^n c_n,$$

und durch Verbindung dieser Gleichung mit der dortigen:

$$(M_{n+1} a_1 + N_{n+1})(M_{n+1} b_n - H_n) = 1,$$

welches eine neue Form der Gleichung zwischen a_1 und b_n in §. 3. ist, und wovon sich die eine in die andere, mit Hülfe der Gleichung $LM - HN = 1$, verwandelt.

Dafs bei Umkehrung des Systems die beiden Brennpuncte desselben (§. 9.) ihre relative Lage gegen die Gläser behalten, nur ihre Namen verwechseln, so dafs der vorherige erste nun zum zweiten, und umgekehrt, wird: dies folgt leicht aus der dortigen Definition dieser Puncte, so wie auch aus den daselbst für ihre Abstände vom ersten und letzten Glase gegebenen Werthen.

Endlich leuchtet ein, dafs, da durch Umkehrung eines Systems H_n in $-N_{n+1}$, und umgekehrt, übergeht, und da beim Fernrohr $-H_n N_{n+1} = 1$, und $(-1)^n N_{n+1}$ die Vergröfserungszahl ist (§. 12. 13 dafs durch Umkehrung eines Fernrohrs die Vergröfserung desselben in eine eben so vielmalige Verkleinerung, und umgekehrt, verwandelt wird, dafs aber beide Male die Bilder sich in derselben (aufrechten oder verkehrten) Stellung zeigen müssen. Auch folgt der erste Theil dieses Satzes unmittelbar aus der Betrachtung der durch zwei Kettenbrüche ausgedrückten Vergröfserung, von denen ein jeder durch Verwechselung von $g_1, \ldots g_n$ mit $g_n, \ldots g_1$, in den reciproken Werth des andern verwandelt wird.

le plus simple, et l'on ne saurait être erreté dans l'application des formules par des difficultés d'intégration.

On trouve ainsi, comme premier résultat que lorsqu'on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement toutes les percussions, et que quelques-unes, ou même toutes, se présentent affectées du signe négatif, ce n'est point en général une raison suffisante pour affirmer que les points correspondans n'exerceront aucune percussion et se détacheront du plan dans le premier instant du mouvement; mais qu'il faut essayer en besoin plusieurs hypothèses, en faisant successivement abstraction de la résistance d'un ou de plusieurs points, jusqu'à ce que les valeurs de toutes les percussions conservées dans le calcul se présentent affectées du signe positif.

Si l'on n'a pas le nombre d'équations nécessaire pour déterminer individuellement les percussions en chaque point, ou si le contact a lieu entre des portions de lignes ou d'aires planes, il est utile de recourir à une considération indirecte, d'où l'on déduit l'expression très-simple des conditions qui doivent être satisfaites, pour que la percussion puisse être censée positive, relativement à tous les points ou à tous les élémens du contact.

Chacun des points par lesquels le corps touche le plan fixe, à l'instant où il subit l'application des forces instantanées, donne naissance à une double condition: car il faut ou que la percussion en ce point soit positive, et dans ce cas que la vitesse du point, décomposée perpendiculairement au plan (ce que nous appellerons, pour abréger, la vitesse normale) soit nulle; ou que la percussion à son tour soit nulle, et que la vitesse normale soit positive. On regardera peut être les développemens de cette double condition comme une application intéressante du calcul des inégalités: calcul beaucoup moins cultivé que celui des équations, en général plus embarrassé dans sa marche, mais qui jouit aussi d'avantages qui lui sont propres. Il arrive en effet que par suite de l'indétermination attachée aux conditions d'inégalité, celles-ci comportent souvent des simplifications remarquables. Le calcul des inégalités est, comme celui des équations, intimement lié à l'emploi des considérations géométriques; avec la différence que, si le calcul des équations s'applique avantageusement à la géométrie, c'est la géométrie qui s'applique au calcul des inégalités, et qui semble indispensable pour en interpréter commodément les résultats.

Qu'on imagine un corps polyédrique, soumis à l'action d'une force instantanée, et reposant sur le plan par une de ses faces dont les angles et les côtés sont en nombre n. La force aura pour effet, ou de détacher entièrement le corps du plan fixe, sans faire éprouver à ce dernier aucune percussion; ou de contraindre le corps à glisser sur sa base, en faisant essuyer au plan une percussion répartie sur toute l'étendue de cette base; ou de soulever le corps, en le forçant à glisser sur l'une des arêtes, ou sur l'un des angles de la base, qui seul éprouvera une percussion. De là un nombre $2n+2$ d'hypothèses sur le mouvement du corps, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, qui devront être simultanément satisfaites, pour que cette hypothèse puisse effectivement avoir lieu. D'un autre côté, il est évident *à priori* qu'entre toutes ces hypothèses il doit toujours y en avoir une, et une seule, qui satisfasse ainsi à toutes les conditions voulues; sans quoi le corps soumis à des forces qui ne s'équilibrent pas ne pourrait prendre aucun mouvement, ou bien il pourrait prendre plusieurs mouvemens différens, sans qu'il y eût aucune raison de supposer qu'un de ces mouvemens se produise plutôt que l'autre, ce qui répugne. Mais si cette double conséquence, que nous vérifierons d'ailleurs sur plusieurs exemples, est évidente *à priori* et par la nature de la question, on ne voit pas comment on pourrait en donner *à posteriori*, et à l'inspection de la forme des équations et des inégalités, une démonstration générale; ni comment on pourrait, dans un grand nombre de cas, dispenser du tâtonnement qui consiste à essayer successivement plusieurs hypothèses.

Lorsque le corps repose sur une base, dont l'arête est formée par une courbe continue, et qu'il se soulève en s'appuyant sur un point de l'arête, il faut d'abord déterminer ce point: question élémentaire et d'une application usuelle, dont pourtant je ne sache pas qu'on ait donné la solution. Au premier coup d'oeil les équations ordinaires du mouvement semblent insuffisantes; mais d'autres considérations lèvent l'indétermination apparente des coordonnées du point de percussion.

Pour offrir une application simple de ces principes, nous examinons successivement le cas d'un parallélipipède droit à base rectangulaire, et celui d'un cylindre droit à base circulaire; sur qui il ne faut pas perdre de vue que les mêmes formules s'étendent, sauf les valeurs numériques des momens d'inertie, à une infinité d'autres solides.

9.

Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide, soutenu par un plan fixe.

(Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris.)

Mr. Poisson a donné, dans son „Traité de Mécanique (liv. III. chap. VI.)," les équations du mouvement d'un corps solide sur un plan fixe, en se bornant (comme l'exigeait la nature de cet ouvrage) à considérer deux cas principaux: savoir, celui où le corps roule sur le plan, en le touchant par un point variable de sa surface supposée continue, et celui où le contact avec le plan a lieu par une pointe, c'est-à-dire par un point où il y a discontinuité dans sa surface. Ce savant géomètre a montré comment l'on pouvait déduire des intégrales des aires et des forces vives les solutions approximatives que le problème comporte dans certains cas encore plus restreints, comme lorsqu'il s'agit d'un ellipsoïde, dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, et qui oscille autour d'un de ses axes principaux.

En suivant une marche analogue, il est aisé d'obtenir les équations differentielles du mouvement dans toutes les autres hypothèses. Si le corps ne s'appuie pas sur plus de trois points, ou sur plus de deux en ligne droite, on a le nombre d'équations suffisant pour déterminer séparément toutes les inconnues du problème: savoir, les six élémens du double mouvement de translation et de rotation, et les pressions souffertes par le plan. Si, au contraire, le nombre des points d'appui excède ceux qu'on vient de dire, les équations fournies par le principe de d'Alembert suffisent bien pour detérminer les six élémens du mouvement, mais non pour assigner les valeurs individuelles des pressions: fait absolument semblable à ce qu'on observe dans toutes les questions analogues de mécanique. Enfin si le corps est en contact avec le plan par des élémens linéaires ou superficiels, la pression en chaque élément devient (selon les principes ordinaires de mécanique) une fonction différentielle, inconnue, des coordonnées de l'élément; mais les intégrales définies qui en dépen-

dent, et qui entrent dans les équations du mouvement, ont toujours une valeur determinée.

Tout cela n'a besoin en quelque sorte que d'être indiqué, et l'on sait que la difficulté consiste dans l'intégration complète des équations du mouvement, qu'on n'effectue en général que par des méthodes d'approximation laborieuses, auxquelles l'importance seule des applications peut donner de l'intérêt. Mais il est un autre point de vue, sous lequel le problème offre matière a un asses grand nombre de remarques, qui ne nous semblent point indignes de fixer un moment l'attention, et qui font le sujet principal de ce mémoire.

En effet, il est naturel de supposer que le corps, soit qu'il y ait continuité dans sa surface et qu'il roule sur le plan fixe, soit qu'il y ait au contraire discontinuité et qu'il glisse sur un angle ou une arête de cette surface, peut toujours se détacher du plan. Nous prendrons ce plan pour celui des x, y, et nous compterons les z positives du côté où le corps se trouve placé. Les forces auxiliaires qu'on applique à celui-ci pour tenir compte de la résistance du plan seront représentées par des ordonnées parallèles aux z: elles mesureront les pressions ou percussions que le plan supporte, selon que le corps est soumis à des forces continues, telles que la pesanteur, ou à des forces instantanées, telles que celles dévelеppées par le choc. Ceci posé, il est clair qu'au moyen de ce que le corps peut se détacher du plan, les pressions ou percussions sont assujéties à conserver des valeurs positives, et qu'aussitôt que cette condition cessera d'être satisfaite pour quelques-uns des points de contact, le plan cessera de gêner en ces points le mouvement du corps*). Il faut donc joindre aux équations du mouvement les conditions d'inégalité exprimant que les pressions ou percussions, en chaque point de contact, doivent rester positives; mais afin d'étudier plus simplement les conséquences de ce principe, il convient d'examiner d'abord l'hypothèse, où le corps, en contact avec le plan, est tiré du repos par des forces instantanées. De cette manière on n'a à considérer que des relations algébriques de l'ordre

*) Nous avons indiqué, dans le „Bulletin des sciences mathématiques, tome VIII. page 165," comment le principe des vitesses virtuelles s'étend aux cas tels que celui-ci, où les liaisons du système sont exprimées par des inégalités; ce qui comprend la démonstration d'un théorème posé par Carnot d'une manière assez confuse, et auquel on avait fait peu d'attention.

En suivant l'analyse que nous venons d'indiquer sommairement, on parvient a ranger sous deux catégories les points de contact qui existent entre le corps et le plan fixe, à l'instant où agit la force instantanée: 1° ceux dont la vitesse normale est éteinte par la percussion; 2° ceux qui n'exercent point de percussion et qui se détachent du plan instantanément, avec une vitesse finie. Mais si l'on considère l'élément du temps qui suit immédiatement l'instant de la percussion, les premiers de ces points se distinguent derechef en deux catégories nouvelles: 1° ceux dont la vitesse normale infiniment petite, acquise pendant le premier élément du temps, se trouve éteinte au moyen de la pression qu'ils exercent contre le plan; 2° ceux qui, au contraire, se détachent du plan à la fin de cet élément avec une vitesse infiniment petite. Cette distinction repose sur des calculs analogues dans leur forme à ceux qui servent pour la détermination des percussions, et n'exige pareillement aucune intégration. Elle a lieu lors même que le corps n'est soumis à aucune force continue; et il est d'autant plus nécessaire d'y avoir égard, que, pour l'observation, il n'importe qu'un point se détache du plan instantanément ou au bout d'un temps infiniment petit.

Maintenant il est clair que, si l'on savait intégrer les équations du mouvement, on aurait les valeurs des pressions en fonction du temps; on saurait pour quel instant du mouvement ces valeurs deviennent négatives ou cessent de satisfaire aux diverses conditions voulues; et l'on pourrait appliquer à chaque instant du mouvement les raisonnemens et les calculs que nous venons d'indiquer, relativement à l'instant qui suit immédiatement celui de l'application des forces instantanées.

Un conséquence singulière à laquelle on est conduit par cette analyse, c'est que, quand un corps symétrique relativement à l'un de ses axes principaux, et terminé par une base perpendiculaire à cet axe (tel qu'un prisme ou un cylindre droit et homogène), est posé par sa base sur un plan incliné et soumis à l'action de la pesanteur, ce corps ne pourra que glisser sur le plan, sans pivoter autour d'un des angles ou d'une des arêtes de sa base, quelle que soit l'inclinaison du plan à l'horizon, et lors même que la verticale, menée par le centre de gravité, tomberait en dehors de la base. Cette circonstance tient à ce que la direction de la pesanteur passe rigoureusement par le centre de gravité; car d'ailleurs, pour peu que la résultante des forces dévie de ce cen-

tere, le glissement ne peut avoir lieu qu'autant que la résultante rencontre le plan dans l'intérieur de la base. Il en est donc de ce résultat de mécanique rationelle comme des équilibres instables, qui ne peuvent se réaliser physiquement. Aussi observe-t-on toujours que, lorsque l'inclinaison du plan dépasse certaines limites, et en général lorsque la verticale, menée par le centre de gravité, tombe en dehors de la base, le corps chavire; ce qu'il faut attribuer au frottement exercé sur le plan, force dont la direction ne passe point par le centre de gravité, et dont nous n'avons pas tenu compte dans nos formules.

Il resterait donc à faire voir comment ces formules devraient être modifiées d'après la considération du frottement: question qui diffère essentiellement d'avec celles qui précèdent, par la nécessité d'admettre des données empiriques sur la nature du frottement, et dans les développemens de laquelle nous ne pourrions entrer ici sans dépasser les bornes que nous devons nous prescrire.

1. Considérons en premier lieu un corps qui se meut en s'appuyant sur le plan fixe par une p o i n t e, c'est-à-dire par un point où il y a solution de continuité dans sa surface, tel que serait le sommet d'un cône, ou l'un des angles solides d'un polyèdre. Pour fixer les idées, nous supposerons que la pesanteur est la force continue qui sollicite le corps, et nous tiendrons comte de la résistance du plan fixe par l'application d'une force inconnue R, perpendiculaire à ce plan; nous rapporterons les points de l'espace à trois axes des x, y, z; le plan fixe étant pris pour celui des x, y, et son intersection avec le plan vertical qui lui est perpendiculaire étant prise pour axe de y. Les points du corps seront rapportées aux trois a x e s p r i n c i p a u x des x', y', z', menés par le centre de gravité, dont nous désignerons les coordonnées en x, y, z, par α, β, γ. M sera la masse du corps, et A, B, C seront ses momens d'inertie relatifs aux axes principaux des x', y', z'. Nous représenterons par g le coëfficient de la gravité, et par ε le complément de l'angle que forme le plan fixe avec la verticale. a, b, c seront les cosinus des angles variables formés par l'axe des z avec ceux des x', y', z'; et ξ, η, ζ, les coordonnées de la pointe, selon ces trois derniers axes. Enfin, si l'on conçoit que l'on prenne, sur la direction de l'axe instantané de rotation, une droite numériquement égale à la vitesse angulaire, p, q, r désigneront les projections variables de cette droite sur les axes des x', y', z'. Leurs signes

dépendront du sens de la rotation, suivant les mêmes conventions qui fixent le sens dans lequel est porté l'axe d'un couple, ou le moment linéaire d'une force, d'après la direction de cette force: et à ce sujet nous renverrons le lecteur aux Exercices de Mathématiques de M. Cauchy.

Cette notations convenue, il résulte facilement des principes généraux de dynamique, que le double mouvement de translation et de rotation du corps sera déterminé par les six équations suivantes:

$$(a.)\quad M\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=0,\; M\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}=Mg\sin\varepsilon,\; M\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}=-Mg\cos\varepsilon+R;$$

$$(b.)\quad \begin{cases} A\partial p+(C-B)qr\partial t = R(\eta c-\zeta b)\partial t,\\ B\partial q+(A-C)pr\partial t = R(\zeta a-\xi c)\partial t,\\ C\partial r+(B-A)pq\partial t = R(\xi b-\eta a)\partial t.\end{cases}$$

Les variables a, b, c sont liées aux quantités p, q, r par les équations

$$(c.)\quad \partial a=(rb-qc)\partial t,\; \partial b=(pc-ra)\partial t,\; \partial c=(qa-pb)\partial t;$$

et si l'on désigne par θ l'angle du plan fixe avec celui des x', y', par φ et ψ, les angles que leur intersection forme respectivement avec les axes des x' et des x, les six variables a, b, c, p, q, r se trouveront dépendre des trois quantités angulaires θ, φ, ψ, en vertu des relations suivantes:

$$(d.)\quad a=-\sin\theta\sin\varphi,\; b=-\sin\theta\cos\varphi,\; c=\cos\theta;$$

$$(e.)\quad \begin{cases} p\partial t = \sin\theta\sin\varphi\partial\psi-\cos\varphi\partial\theta,\\ q\partial t = \sin\theta\cos\varphi\partial\psi+\sin\varphi\partial\theta,\\ r\partial t = \partial\varphi-\cos\theta\partial\psi.\end{cases}$$

Nous renvoyons, pour la démonstration de toutes ces formules, à la Mécanique de M. Poisson, livre III.

Les six équations ($a.$) et ($b.$) ne renferment donc implicitement que sept inconnues α, β, γ, θ, φ, ψ, R, qu'il s'agit d'exprimer, au moyen de deux intégrations, en fonction du temps t. Il suffit par conséquent, pour avoir le nombre suffisant d'équations, d'en obtenir une septième entre ces inconnues. Or, la condition que la pointe doit rester sur le plan fixe, ou que sa coordonnée z doit être nulle, s'exprime par l'équation

$$(f.)\quad \gamma+a\xi+b\eta+c\zeta = 0,$$

d'où

$$(f'.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}+\xi\frac{\partial a}{\partial t}+\eta\frac{\partial b}{\partial t}+\zeta\frac{\partial c}{\partial t} = 0.$$

Les deux premières équations ($a.$) s'intègrent immédiatement: la troisième, jointe aux équations ($b.$) et ($f'.$), suffit, sauf les difficultés de l'intégration, pour déterminer les cinq inconnues qui restent.

2. En multipliant les équations (*b.*) respectivement par a, b, c, les ajoutant, et ayant égard aux relations (*c.*), on trouve:

$$A\partial ap + B\partial bq + C\partial cr = 0;$$

et par conséquent on obtient l'intégrale première

$$(g.)\quad Aap + Bbq + Ccr = k,$$

dans laquelle k désigne une constante arbitraire. Si l'on multiplie de nouveau ces mêmes équations respectivement par p, q, r, et qu'on les ajoute, en ayant toujours égard aux relations (*c.*), il vient:

$$Ap\partial p + Bq\partial q + Cr\partial r = R(\xi\partial a + \eta\partial b + \zeta\partial c) = -R\partial\gamma,$$

en vertu de (f'.). Substituant la valeur de R, tirée de la troisième équation (*a.*), intégrant et désignant par h^2 une nouvelle constante arbitraire, on obtient en définitive:

$$(h.)\quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + M\frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2} + 2Mg\cos\varepsilon.\gamma = h^2.$$

Il n'est pas difficile d'apercevoir que les deux intégrales (*g.*) et (*h.*) résultent plus généralement, la première du principe des aires, la seconde de celui des forces vives. En effet, puisque le corps n'éprouve aucun obstacle parallèlement au plan fixe, et que la force qui le sollicite passe par le centre de gravité, la projection des aires sur ce plan doit rester constante. D'un autre côté, la liaison, qui assujétit le corps, étant exprimée par l'équation (*f.*), indépendante du temps, le principe des forces vives doit trouver son application. Or on démontre aisément que lorsqu'on rapporte au centre de gravité le double mouvement de translation et de rotation d'un système, la force vive totale est la somme des forces vives relatives aux deux mouvemens, considérés comme indépendans; et cela posé, les formules connues nous apprennent que $Ap^2+Bq^2+Cr^2$ est la force vive due au mouvement de rotation, tandis que $M\frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2}$ est celle qui provient du mouvement de translation.

En général, les intégrales fournies par les principes de la conservation du centre de gravité, des aires et des forces vives, sont les seules qu'on obtienne sous forme finie. Le problème qui nous occupe ne sera donc rigoureusement résoluble que lorsque certaines relations entre θ, φ, ψ, réduiront ces variables à deux, par exemple θ et ψ. Alors en éliminant entre (*g.*) et (*h.*), on aura des expressions de la forme $\partial t = F(\theta)\partial\theta$, $\partial t = F'(\psi)\partial\psi$, d'où l'on tirera par les quadratures les valeurs de θ et ψ, par suite celles de γ et de R en fonction de t et de nouvelles constantes arbitraires.

3. Une analyse exactement semblable s'appliquerait au cas où le corps s'appuierait par deux points sur le plan fixe. On aurait une inconnue de plus, analogue à R, mais aussi une équation de plus, analogue à (f.), laquelle établirait une dépendance entre θ, φ, ψ; de sorte que le problème serait susceptible d'une solution complète par les quadratures. Mais au lieu de nous y arrêter, il convient de considérer le cas où le corps s'appuie sur le plan par une arête rectiligne, telle que celles qui terminent les faces des polyèdres. En désignant alors par ∂s un élément de cette arête, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, et par R la pression qu'il supporte, la troisième équation (a.) et celles (b.) seront remplacées par les suivantes, où le signe d'intégration se rapporte à toute la longeur de l'arête:

$$(i.)\quad \begin{cases} M\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = -Mg\cos\varepsilon + \int R\,\partial s; \\ A\partial p+(C-B)qr\,\partial t = \partial t\int R(\eta c-\zeta b)\partial s, \\ B\partial q+(A-C)pr\,\partial t = \partial t\int R(\zeta a-\xi c)\partial s, \\ C\partial r+(B-A)pq\partial t = \partial t\int R(\xi b-\eta a)\partial s. \end{cases}$$

Comme la droite qui forme arête est donnée de position, on aura pour ses équations:

$$\eta = m\xi+n,\quad \zeta = m'\xi+n';$$

au moyen de quoi substituant dans les équations précédentes, et faisant sortir les lettres a, b, c, m, n, m', n' de dessous le signe d'intégration, on n'aura plus que deux intégrales inconnues $\int R\partial s$ et $\int R\xi\partial s$. D'une autre part, ces mêmes valeurs, substituées dans l'équation (f.), devront la vérifier, indépendamment de ξ. On obtiendra ainsi deux équations auxiliaires, qui, jointes aux quatre équations (i.), suffiront pour déterminer γ, θ, φ, ψ et les deux intégrales inconnues. Néanmoins la fonction R restera indéterminée, comme cela doit être, lorsqu'on n'a égard qu'aux principes généralement reçus en mécanique.

Admettons, par exemple, que l'arête soit parallèle à l'axe principal des x', ainsi que cela aurait lieu pour un prisme droit et homogène, s'appuyant sur une des arêtes perpendiculaires à ses bases. Dans ce cas m et m' sont nuls, ce qui donne $\gamma+bn+cn'=0$, et $a=0$, ou $\sin\theta\sin\varphi=0$, d'où il est aisé de conclure que c'est l'angle φ qui reste constamment nul. L'équation (g.) devient

$$\partial\psi(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta) = k\partial t;$$

quant à celle des forces vives, pour la mettre sous sa forme la plus simple, il convient de faire:

$$n = \varrho \cos\omega, \quad n' = \varrho \sin\omega,$$

ϱ étant égal à $\sqrt{(n^2+n'^2)}$, et ω désignant l'angle que le plan mené par l'arête et par le centre de gravité, fait avec celui des x', y'. Alors cette équation devient:

$$A\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}+\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2}(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)+M\varrho^2\cos^2(\theta-\omega)\cdot\frac{\partial\theta^2}{\partial t^2}$$
$$+2Mg\cos\varepsilon.\varrho\sin(\theta-\omega) = h^2.$$

Lorsque $B = C$, on a $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \text{const.}$ Le terme en $\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2}$ disparaît de l'équation précédente, comme compris dans la constante h^2; mais elle ne peut toujours s'intégrer qu'approximativement par les quadratures.

4. Si le corps glisse sur le plan fixe, en s'appuyant sur une face plane, on pourra encore employer les équations (*i.*), pourvu que ∂s représente un élément d'aire plane, et que les termes où il entre comme facteur soient affectés d'un double signe d'intégration. D'ailleurs le plan qui comprend cette face aura pour équation

$$\zeta = m\xi+m'\eta+m''.$$

Substituant cette valeur de ζ dans les équations (*i.*), elles ne contiendront plus que trois intégrales inconnues

$$\iint R\partial s,\ \iint R\xi\partial s,\ \iint R\eta\partial s.$$

D'un autre côté si l'on fait la même substitution dans l'équation (*f.*) qui devra alors être satisfaite, indépendamment de ξ et de η, on obtiendra trois équations auxiliaires, qui complèteront le nombre nécessaire pour la détermination des éléments du mouvement, et des intégrales inconnues: seulement la fonction R restera, comme précédemment, indéterminée.

En effectuant le calcul, on trouve:

$$\gamma+cm'' = 0, \quad a+mc = 0, \quad b+m'c = 0,$$

d'où

$$-\frac{a}{c} = -\operatorname{tang}\theta\sin\varphi = m, \quad -\frac{c}{b} = -\operatorname{tang}\theta\cos\varphi = m';$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{m}{m'}, \quad = \text{const.}$$

en sorte que les deux angles θ, φ sont l'un et l'autre constants. L'équation des aires se réduit donc à $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \text{const.}$, et il en résulte encore que les quantités γ, p, q, r, a, b, c, comme aussi les trois intégrales inconnues, ont de valeurs constantes pendant toute la durée du mouvement.

5. Considérons maintenant un corps terminé par une surface continue, et qui roule en s'appuyant toujours sur le plan par un point de cette surface. Il est clair que les équations (*a.*), (*b.*), (*f.*) s'appliqueront à l'hypothèse actuelle, sauf que les coordonnées ξ, η, ζ, au lieu d'être constantes, comme dans le cas du numéro 1., seront variables et inconnues. Mais aussi on aura trois nouvelles équations pour déterminer ces coordonnées, savoir: l'équation même de la surface, et les deux qui expriment que le plan tangent à cette surface, au point (ξ, η, ζ) se confond avec celui des x, y. Les équations des aires et des forces vives subsisteraient, comme lorsque les coordonnés ξ, η, ζ sont invariables. Cela est évident pour la première, qui s'obtient indépendamment de ces coordonnées; d'ailleurs on aurait, en différentiant l'équation (*f.*):

$$\partial\gamma+\xi\partial a+\eta\partial b+\zeta\partial c = -(a\partial\xi+b\partial\eta+c\partial\zeta).$$

Mais a, b, c étant les cosinus des angles que forment les axes des x', y', z' avec la normale à la surface, au point (ξ, η, ζ), le second membre de cette équation s'évanouit, ce qui la rend identique avec (f'.): au moyen de quoi l'on arrive comme précedemment à l'équation des forces vives.

Si le corps est terminé par une surface cylindrique ou conique, il roulera en s'appuyant sur le plan le long d'une génératrice de cette surface. Prenons pour exemple un cylindre droit et homogène, à base elliptique, dont les génératrices soint parallèles à l'axe de x', et dont les directrices aient pour équation:

$$\varpi^2 z'^2+\sigma^2\gamma'^2 = \varpi^2\sigma^2.$$

Le calcul sera le même que dans le cas traité à la fin du numero 3., si ce n'est que les quantités ϱ et ω cesseront d'être constantes. Le cylindre étant tangent au plan fixe, on aura:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\partial z'}{\partial\gamma'}, = -\frac{\sigma^2\gamma'}{\varpi^2 z'},$$

$$\varrho\cos\omega = \gamma' = \frac{\varpi^2\sin\theta}{\sqrt{(\varpi^2\sin^2\theta+\sigma^2\cos^2\theta)}}, \quad \varrho\sin\omega = z' = -\frac{\sigma^2\cos\theta}{\sqrt{(\varpi^2\sin^2\theta+\sigma^2\cos^2\theta)}},$$

et il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation des forces vives. Lorsque le cylindre est circulaire, auquel cas $B = C$, $\varpi = \sigma$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ se réduisent à des constantes; les quantités b, c, q, r, s'expriment par des sinus et cosinus du temps: tandis que d'après le calcul, les intégrales $\int R\partial s$, $\int R\xi\partial s$ conservent des valeurs constantes. Observons

que les limites de ces intégrales ne seront plus constantes en général, comme dans le cas du numéro 3., et qu'on déterminerait au besoin ces limites à l'aide des équations des courbes qui terminent la portion de surface roulant sur le plan; mais ce calcul est étranger à la détermination du mouvement.

6. Si le corps roulait sur une arête curviligne, telle que celle qui termine la base d'un cylindre, il faudrait encore employer les formules (*a.*), (*b.*), (*f.*); les coordonnées ξ, η, ζ du point de contact seraient variables et inconnues, mais on aurait trois équations pour les déterminer, savoir: les deux qui définissent, relativement aux axes principaux, la courbe qui forme arête; et celle

$$(k.)\quad a\delta\xi+b\delta\eta+c\delta\zeta = 0,$$

exprimant que la tangente à cette courbe, au point (ξ, η, ζ), est comprise dans le plan fixe, et dans laquelle il faudrait substituer les valeurs de $\frac{\partial\xi}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}$, tirées des équations de la courbe. Nous employons ici la caractéristique δ, voulant réserver celle ∂ pour indiquer les différentiations par rapport à t.

En réunissant les cas divers qu'on vient d'analyser, et quelques autres qui se résolvent par les mêmes principes, on pourrait, sauf les difficultés inhérentes à l'intégration, suivre dans toutes ses circonstances le mouvement d'un corps de forme quelconque sur un plan fixe. C'est ainsi qu'un cône pourrait se mouvoir successivement, en s'appuyant sur son sommet, puis en roulant sur sa surface convexe, ensuite sur l'arête curviligne qui la termine, et enfin en glissant sur le plan de sa base. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, il y aurait en général solution de continuité, percussion soufferte par le plan, déperdition de force vive; et les valeurs des élémens du mouvement, à la fin du premier état, serviraient à déterminer les constantes arbitraires, dans les formules relatives à l'état subséquent.

7. Les constantes arbitraires qui entrent dans les équations du mouvement, après les deux intégrations, sont de deux sortes: les unes dépendent de la position initiale du corps, et l'on peut toujours placer l'origine et les axes des x, y, z, de manière à les rendre nulles. Les autres dépendent des valeurs initiales des six quantités

$$(l.)\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t},\ \frac{\partial\beta}{\partial t},\ \frac{\partial\gamma}{\partial t},\ p,\ q,\ r,$$

qui peuvent être données immédiatement; et alors leur substitution dans les intégrales premières, telles que celles des aires et des forces vives, fournira immédiatement aussi les valeurs des constantes arbitraires: mais si l'on assigne seulement, en grandeurs et directions, les forces instantanées qui sollicitent le corps à l'origine et le tirent de l'état de repos, il faudra d'abord en déduire les valeurs initiales des quantités (*l.*).

Considérons un corps qui repose sur le plan fixe par un point (ξ, η, ζ), est qui est tiré de l'état de repos par l'application d'un système des forces instantanées, dont la résultante a pour projection suivant les axes des x, y, z, les forces X, Y, Z. Désignons par L', M', N' les momens du système estimés relativement aux axes des x', y', z', et par P la percussion que le plan éprouve au point (ξ, η, ζ). D'après une application facile du principe de d'Alembert, on aura, pour déterminer les valeurs initiales des quantités (*l.*), les six équations suivantes:

$$(a'.)\quad M\frac{\partial\alpha}{\partial t} = X,\quad M\frac{\partial\beta}{\partial t} = Y,\quad M\frac{\partial\gamma}{\partial t} = Z+P;$$

$$(b'.)\quad \begin{cases} Ap \;=\; L' + P(\eta c - \zeta b), \\ Bq \;=\; M' + P(\zeta a - \xi c), \\ Cr \;=\; N' + P(\xi b - \eta a). \end{cases}$$

Il y faut joindre, en vertu des équations (*f'.*) et (*c.*), cette équation auxiliaire, que nous mettons à dessein sous trois formes différentes:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \xi(rb - qc) + \eta(pc - ra) + \zeta(qa - pb) \;=\; 0,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + p(\eta c - \zeta b) + q(\zeta a - \xi c) + r(\xi b - \eta a) \;=\; 0,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + a(q\zeta - r\eta) + b(r\xi - p\zeta) + c(p\eta - q\xi) \;=\; 0.$$

Sous cette dernière forme, elle exprime plus explicitement que la vitesse du point (ξ, η, ζ), estimée perpendiculairement au plan fixe (ce que nous sommes convenus d'appeler plus brièvement la vitesse normale), est nulle; et d'après la remarque du numéro 5., elle subsiste également, soit qu'il y ait en ce point continuité ou discontinuité dans la surface.

Il est essentiel d'observer que, si le corps est tiré de l'état du repos par l'action de forces continues, les valeurs initiales de p, q, r seront nulles; et alors les équations (*a.*), (*b.*), deviendront les mêmes que (*a'.*), (*b'.*), si ce n'est que P sera remplacé par R, les qantités (*l.*) par

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2}\;\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial q}{\partial t},\quad \frac{\partial r}{\partial t}$$

et que les lettres X, Y, Z, au lieu de désigner des forces instantanées, désigneront des forces continues. D'ailleurs l'équation ($m.$) donnant par la différentiation:

$$(m'.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}+\frac{\partial p}{\partial t}(\eta c-\zeta b)+\frac{\partial q}{\partial t}(\zeta a-\xi c)+\frac{\partial r}{\partial t}(\xi b-\eta a) \\ =-\left\{p\frac{\partial.(\eta c-\zeta b)}{\partial t}+q\frac{\partial.(\zeta a-\xi c)}{\partial t}+r\frac{\partial.(\xi b-\eta a)}{\partial t}\right\}, \end{cases}$$

le second membre de ($m'.$) s'évanouira à cause de $0=p=q=r$, et alors elle deviendra la même que ($m.$), lorsqu'on fait dans celle-ci les substitutions qu'on vient de dire. D'où il faut conclure, qu'en discutant l'hypothèse où le corps est tiré du repos par des forces instantanées, nous nous trouverons avoir traité celle où il sort du même état par l'action de forces continues.

8. Faisons, pour simplifier:

$$\eta c-\zeta b = \lambda,\quad \zeta a-\xi c = \mu,\quad \xi b-\eta a = \nu$$

l'élimination entre ($a'.$), ($b'.$) et la seconde équation ($m.$), donne:

$$P = \frac{\frac{Z}{M}+\frac{L'\lambda}{A}+\frac{N'\mu}{B}+\frac{N'\nu}{C}}{\frac{1}{M}+\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\frac{\nu^2}{C}},$$

expression dont le dénominateur est essentiellement positif. Si P est négatif, ce sera la preuve que le plan n'éprouve aucune percussion au point (ξ, η, ζ), et que ce point, considéré comme appartenant au corps, doit se détacher du plan, ou que sa vitesse normale est positive. Alors pour déterminer les élémens du mouvement, il faudra faire $P=0$ dans ($a'.$), ($b'.$); est les valeurs de ces élémens devront satisfaire à l'inégalité

$$(n.)\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}+p\lambda+q\mu+r\nu>0,$$

dont le premier membre exprime la vitesse normale du point (ξ, η, ζ). Or, au moyen de ce qu'on a fait $P=0$, ce premier membre se réduit à

$$\frac{Z}{M}+\frac{L'\lambda}{A}+\frac{M'\mu}{B}+\frac{N'\nu}{C};$$

l'inégalité est donc satisfaite par cela seul, que dans le précédent calcul on a eu $P<0$.

9. S'il y a deux points de contact entre le corps et le plan, les équations ($a'.$), ($b'.$) deviennent, en accentuant les lettres relatives au second point:

$$M\frac{\partial\gamma}{\partial t} = Z+P+P';$$

$$Ap = L'+P\lambda+P'\lambda', \quad Bq = M'+P\mu+P'\mu', \quad Cr = N'+P\nu+P'\nu',$$

et de plus on a les deux équations de condition:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+p\lambda+q\mu+r\nu = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}+p\lambda'+q\mu'+r\nu' = 0.$$

Faisant pour abréger:

$$S = \frac{1}{M}+\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\frac{\nu^2}{C}, \quad T = \frac{1}{M}+\frac{\lambda\lambda'}{A}+\frac{\mu\mu'}{B}+\frac{\nu\nu'}{C},$$

$$U = \frac{Z}{M}+\frac{L'\lambda}{A}+\frac{M'\mu}{B}+\frac{N'\nu}{C}, \text{ etc.}$$

on trouve:

$$P = \frac{U'T-S'U}{SS'-T^2}, \quad P' = \frac{UT-SU'}{SS'-T^2}.$$

Le dénominateur de P et P' peut se mettre sous la forme:

$$\frac{1}{M}\left\{\frac{(\lambda-\lambda')^2}{A}+\frac{(\mu-\mu')^2}{B}+\frac{(\nu-\nu')^2}{C}\right\}+\frac{(\lambda\mu'-\lambda'\mu)^2}{AB}+\frac{(\lambda\nu'-\lambda'\nu)^2}{AC}+\frac{(\mu\nu'-\mu'\nu)^2}{BC},$$

et par conséquent il est essentiellement positif, en sorte que les signes de P et P' dépendront uniquement de ceux de leurs numérateurs. Si P, par exemple, est négatif, il faudra recommencer le calcul en supposant P nul, et alors on aura $p' = -\frac{U'}{S'}$. De plus, l'inégalité (*n.*) devra être satisfaite: mais son premier membre se réduit dans ce cas à $P'T+U > 0$, ou $S'U+U'T > 0$, en substituant la valeur précédente de P', et observant que S' est essentiellement positif. Cette inégalité et donc vérifiée, par cela même que l'on a eu précédemment $P < 0$.

Si les deux valeurs de P et P' étaient négatives, et que de plus T fût positif, l'inégalité (*n.*) et son analogue, relative à (ξ', η', ζ'), se réduisant, lorsqu'on fait abstraction de la résistance des deux points, à $U > 0$, $U' > 0$, seraient encore satisfaites d'elles-mêmes, et le corps se détacherait entièrement du plan. En effet, de $U'T-S'U < 0$, $UT-SU' < 0$, on tire, en divisant la première inégalité par S' et la seconde par T, qui sont des nombres positifs:

$$U > \frac{U'T}{S'}, \quad U < \frac{SU'}{T},$$

partant $U'(SS'-T^2) > 0$, ou $U' > 0$, à cause que $SS'-T^2$ est essentiellement positif. De la même manière ou trouverait $U > 0$.

Mais si T est négatif, on pourrait seulement démontrer que l'une des quantités U, U' est positive; par conséquent, de ce qu'on aurait trouvé dans ce cas P et $P' < 0$, il ne s'en suivrait pas que les deux points n'éprouvent aucune percussion: il faudrait en outre que U et U' fussent

simultanément positifs. On arriverait à des résultats analogues en supposant trois points de contact.

10. Dans le cas où leur nombre se réduit toujours à deux, on trouve, en retranchant de la première équation ($m.$), son analogue, relative à (ξ', η', ζ'):

$$(o.)\quad (\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb) = 0;$$

équation qui peut s'interpréter géométriquement. Pour cela, menons par l'axe instantané de rotation un plan perpendiculaire au plan fixe des x, y, et soit

$$lx'+my'+nz' = 0,$$

l'équation de ce plan. En vertu de ce qu'il comprend l'axe instantané, on aura $lp+mq+nr=0$; et au moyen de ce qu'il est perpendiculaire au plan x, y, $la+mb+nc=0$. Son équation deviendra donc

$$(p.)\quad (rb-qc)x'+(pc-ra)y'+(qa-pb)z' = 0;$$

et si l'on mène une perpendiculaire à ce plan, elle fera, avec les axes des x', y', z', des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels à $rb-qc$, $pc-ra$, $qa-pb$. D'un autre côté, l'intersection du plan ($p.$) avec celui des x, y, contient la projection de l'axe instantané sur ce dernier plan, et cette projection est perpendiculaire à la droite menée dans le plan fixe perpendiculairement au plan ($p.$), laquelle, en vertu de ($o.$), est elle-même perpendiculaire à la droite qui joint les deux points de contact. Cette équation ($o.$) exprime donc que la projection de l'axe instantané sur le plan fixe est parallèle à la droite joignant les deux points de contact. D'ailleurs, si l'on porte sur l'axe instantané une longueur numériquement égale à la vitesse angulaire, la valeur de sa projection sur le plan fixe sera $\sqrt{((rb-qc)^2+(pc-ra)^2+(qa+pb)^2)}$: car on a pour sa projection, perpendiculairement au même plan, $pa+qb+rc$, et

$$(rb-qc)^2+(pc-ra)^2+(qa-pb)^2+(pa+qb+rc)^2 = p^2+q^2+r^2.$$

Si le point (ξ', η', ζ') venait à se détacher du plan, on aurait:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\xi'(pb-qc)+\eta'(pc-ra)+\zeta'(qa-pb) < 0;$$

et l'équation ($o.$) se trouverait remplacée par l'inégalité

$$(\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb) < 0,$$

laquelle exprime géométriquement que la perpendiculaire à la projection de l'axe instantané sur le plan fixe forme un angle obtus avec la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (ξ', η', ζ').

11. Si ces deux points sont les extrémités d'une arête, par laquelle le corps s'appuie sur le plan fixe, il est aisé de déduire de ce qui précède les équations qui devront donner les valeurs des quantités (*l.*), et des intégrales

$$\int P\partial s, \int P\xi\partial s, \int P\eta\partial s.$$

Pour que la percussion s'exerce le long de cette arête, il faudra que la fonction inconnue P puisse être censée positive dans toute l'étendue des intégrations. Or l'on s'assure si cette condition est ou non satisfaite, à l'aide des considérations suivantes.

Les coordonnées x, y de l'arête, rapportées aux axes fixes dans l'espace, sont, au premier instant du mouvement, des fonctions linéaires et connues de ses coordonnées ξ, η, ζ, rapportées aux axes principaux. On pourra donc exprimer $\int Px\partial s$, $\int Py\partial s$, en fonction de $\int P\xi\partial s$, etc. Alors si l'on fait

$$\frac{\int Px\partial s}{\int P\partial s} = x_1, \quad \frac{\int Py\partial s}{\int P\partial s} = y_1,$$

il faudra, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, 1° que $\int P\partial s$ ait elle-même une valeur positive; 2° que le point, dont les coordonnées en x, y, sont x_1, y_1, tombe sur l'arête rectiligne entre ses deux points extrêmes (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'). Telles sont en effet les conditions démontrées en statique, pour qu'un corps qui s'appuie le long d'un plan fixe par une arête rectiligne ne soit pas soulevé, et la démonstration ne reposant que sur la nécessité de regarder la fonction P comme constamment positive, subsiste, quelle que soit la signification attribuée à P.

12. Lorsqu'il existe, à l'origine du mouvement, trois points de contact entre le corps et le plan fixe, on a trois équations semblables à la première (*m.*), qui donnent, en les combinant deux à deux par voie de soustraction, trois autres équations semblables à (*o.*); et de celles-ci on déduit, pourvu que les trois points ne soient pas en ligne droite:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0, \quad rb-qc = 0, \quad pc-ra = 0, \quad qa-pb = 0,$$

équations dont la dernière est contenue dans les deux précédentes, et qui expriment: 1° que la distance du centre de gravité au plan fixe reste constante; 2° que l'axe instantané est perpendiculaire à ce plan. Dès-lors on voit que, s'il existait plus de trois points de contact, on n'aurait pas le nombre suffisant d'équations pour déterminer individuellement les percussions souffertes par ces points, ni pour s'assurer directement que

leurs valeurs sont positives. Mais en suivant le raisonnement des numéros précédens, il est clair qu'on pourrait toujours calculer les valeurs des termes sommatoires $\Sigma.P$, $\Sigma.P\xi$, etc., par suite celles de $\Sigma.Px$ et $\Sigma.Py$; et qu'en faisant alors $\Sigma.Px = x_1\Sigma P$, $\Sigma.Py = y_1\Sigma P$, il faudrait, pour que le corps pût se mouvoir en glissant sur le plan fixe, et exerçant ainsi une percussion sur tous les points de contact: 1° que ΣP fût positif; 2° que le point dont les coordonnées en x, y sont x_1, y_1, tombât dans l'intérieur du polygone convexe, qui se forme en joignant deux à deux les points de contact, de manière à n'en laisser aucun à l'extérieur du polygone. Si le corps s'appuyait sur une portion d'aire plane, on arriverait aux mêmes conclusions, en remplaçant P par $P\partial s$, et Σ par un double signe d'intégration.

13. Lorsque les conditions nécessaires pour le glissement du corps sur le plan fixe ne sont pas satisfaites, il se présente trois cas: ou le corps se soulève en s'appuyant sur l'un des sommets du polygone convexe, dont il vient d'être question, comme sur une pointe; ou il s'appuie en se soulevant, sur les deux extrémités d'un des côtés du même polygone; ou enfin il se détache entièrement du plan et ne lui fait éprouver aucune percussion.

Dans la première hypothèse, soit (ξ, η, ζ) ou F (Tab. II. Fig. 1.) le sommet qui éprouve une percussion et (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ''), ou F', F'', les deux sommets dont l'un suit, et l'autre précède F immédiatement sur le contour du polygone. Non seulement il faudra que la valeur de P, calculée comme dans le numéro 9., soit positive; mais d'après l'observation qui termine le numéro 10., les deux inégalités

$$(q.)\quad \begin{cases} (\xi-\xi')(rb-qc)+(\eta-\eta')(pc-ra)+(\zeta-\zeta')(qa-pb)<0, \\ (\xi-\xi'')(rb-qc)+(\eta-\eta'')(pc-ra)+(\zeta-\zeta'')(qa-pb)<0, \end{cases}$$

devront être satisfaites; et le système de ces inégalités exprime que la perpendiculaire abaissée de F sur la projection de l'axe instantané sur le plan fixe, doit tomber dans l'angle $M'FM''$, supplément de $F'FF''$, et formé par les droites $N'M'$, $N''M''$, respectivement perpendiculaires à FF', FF''. Pour un autre point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, on devrait avoir pareillement:

$$(q'.)\quad (\xi-\xi''')(rb-qc)+(\eta-\eta''')(pc-ra)+(\zeta-\zeta''')(qa-pb)<0;$$

et si l'on même $N'''M'''$ perpendiculaire à FF''', que l'on combine $(q'.)$ avec chacune des inégalités $(q.)$, il résultera de leur système que la perpendiculaire

abaisée de F sur la projection de l'axe instantané, doit tomber dans l'intérieur de l'angle $M'''FM''$, ou de $M'FN'''$. Or, le polygone étant convexe, et par suite FF''' tombant toujours dans l'angle $F'FF''$, il est clair que quand les inégalités (q.) sont satisfaites, (q'.) l'est a fortiori; qu'ainsi il suffit d'avoir égard aux inégalités (q.) et à celle $P > 0$.

Quand la projection du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de l'angle $F'FF''$, on peut prendre cette projection pour le point F''', et alors on a $\xi''' = -a\gamma$, $\eta''' = -b\gamma$, $\zeta''' = -c\gamma$: d'ailleurs comme la fonction $a(rb-qc)+b(pc-ra)+c(qa-pb)$ est identiquement nulle, (q'.) se réduit dans ce cas à

$$\xi(rb-qc)+\eta(pc-ra)+\zeta(qa-pb) < 0,$$

ou, en vertu de l'équation (m.), à

$$(q''.) \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t} > 0.$$

Dans la seconde hypothèse sur le mouvement du corps, FF' étant le côté du polygone sur lequel il s'appuie en se soulevant, soit que la percussion ne s'exerce qu'aux deux points extrêmes F, F', ou qu'elle soit répartie sur toute la longeur de l'arête FF', on aura à appliquer les formules des numéros 9., 10. et 11. En outre, dans l'un et l'autre cas, il faudra que l'inégalité (q'.) soit vérifiée pour un point quelconque F''', situé sur le contour ou dans l'intérieur du polygone. Or, si l'on abaisse de F une perpendiculaire sur la projection de l'axe instantané en x, y, cette droite, d'après ce qui a déjà été dit, sera en même-temps perpendiculaire à FF': l'inégalité (q'.) exprime qu'elle devra faire un angle obtus avec FF'''; et dès-lors il est visible que cette condition étant satisfaite pour le point F''', le sera pour tous ceux qui sont situés, par rapport à FF', du même côté que F'''. Elle sera donc simultanément satisfaite pour tous les points situés sur le contour ou dans l'intérieur du polygone, puisque, par hypothèse, ce polygone est convexe. Profitant de cette remarque, on peut d'après ce qui précède, simplifier l'expression de la condition (q'.), et la réduire à (q''.), dans le cas où la projection du centre de gravité en x, y, tombe, par rapport à FF', du même côté que les autres sommets du polygone.

Enfin, dans la dernière hypothèse où le corps ne fait éprouver aucune percussion au point fixe, et se meut comme s'il était libre, la vitesse normale de chacun des points de contact doit être positive; ce qui

entraîne de nouvelles conditions: $U > 0$, $U' > 0$, $U'' > 0$, etc. U et ses analogues conservant la signification qui leur a été attribuée au numéro 9. Lorsque le corps repose sur une portion de ligne ou d'aire plane, le nombre des points de contact étant infini, la vérification de l'inégalité $U > 0$ ne peut se faire pour chacun d'eux; mais d'abord il est visible que, si elle est satisfaite pour tous les sommets du polygone convexe dont nous venons de parler, elle le sera pour tous les autres points. En outre, si l'on observe que $U = 0$ (en remplaçant dans U les coordonnées déterminées ξ, η, ζ par les coordonnées courantes x', y', z') est l'équation d'un plan, et que l'inégalité $U > 0$ subsiste pour tous les points de l'espace situés d'un même côté de ce plan, on verra qu'il suffit de construire la droite résultante de l'intersection du plan fixe avec celui $U = 0$; qui, si cette droite laisse d'un même côté tous ces points de contact, et que de plus l'inégalité $U > 0$ soit satisfaite pour un de ces points, elle le sera pour tous les autres.

Chaque sommet du polygone pouvant être pris successivement pour le point F, et chacun de ses côtés pour l'arête FF', si n désigne le nombre de ses sommets, on pourra faire $2n$ hypothèses différentes sur le mouvement du corps, sans compter celle où il glisse sur le plan, et celle où il s'en détache entièrement. Parmi ces $2(n+1)$ hypothèses, à chacune desquelles se rapporte un système différent d'équations et d'inégalités, il faudra, comme on l'a dit en commençant, qu'il y en ait toujours une et une seule pour laquelle le système correspondant d'inégalités soit complètement vérifié.

14. Si au polygone dont il vient d'être question l'on substitue une courbe convexe et continue, comme dans le cas d'un cylindre assis sur sa base, et que d'ailleurs on ait vérifié que le corps ne pouvait pas glisser sur cette base, il semble d'après ce qui précède, qu'on devrait essayer autant d'hypothèses qu'il y a de points sur la courbe, c'est-à-dire une infinité; ce qui répugne. D'un autre côté, si l'on se reporte au numéro 6., on verra que l'équation (k.), qui doit servir à déterminer le point (ξ, η, ζ) sur lequel le corps s'appuie en roulant sur une arête curviligne, se trouve identiquement satisfaite à l'origine du mouvement; puisque, par hypothèse, la courbe qui forme arête est alors entièrement comprise dans le plan fixe.

Il est néanmoins facile de lever cette indétermination apparente: et d'abord si l'on passe, selon le principe des limites, du polygone à la

courbe continue, il résultera des N^{os}. 10. et 13., que la tangente à la courbe, au point (ξ, η, ζ), sur lequel le corps s'appuie en se soulevant, doit être parallèle à la projection de l'axe instantané x, y, d'où l'on tire:

$$(k'.)\quad (rb-qc)\delta\xi+(pc-ra)\delta\eta+(qa-pb)\delta\zeta = 0;$$

et cette équation qui remplacera (k.), servira, conjointement avec celles de la courbe, à déterminer complètement ξ, η, ζ. Mais sans recourir à cette considération indirecte, on peut dériver immédiatement (k'.) de (k.). En effet, puisque cette dernière équation doit être satisfaite pendent toute la durée du mouvement, elle donnera:

$$\partial a\delta\xi+\partial b\delta\eta+\partial c\delta\zeta = -(a\partial\delta\xi+b\partial\delta\eta+c\partial\delta\zeta).$$

Or, par hypothèse, (k.) est satisfaite indentiquement, c'est-à-dire, indépendamment de ξ, η, ζ; le second membre de l'équation précédente sera donc identiquement nul, ce qui la réduit à (k'.), au moyen des relations (c.).

Le point (ξ, η, ζ) étant connu, il faudra que la valeur de P, calculée par les formules du N°. 8., soit positive; et que pour un autre point quelconque (ξ''', η''', ζ'''), situé sur le contour ou dans l'intérieur de la base, on vérifie l'inégalité (q'.), qui se réduit à (q''.), quand la projection du centre de gravité en x, y tombe dans l'intérieur de la base. Si ces conditions n'étaient pas satisfaites, ce serait une preuve que le corps se détache entièrement du plan fixe: alors il faudrait, qu'en éliminant entre les équations de la courbe et celles de l'intersection du plan fixe avec celui $U = 0$, les racines de l'équation finale fussent imaginaires, et que pour un point arbitrairement choisi sur cette courbe, ou dans l'aire qu'elle enveloppe, on eût $U > 0$.

Quand l'équation (k'.), jointe à celle de la courbe, donne une équation finale à plusieur racines réelles, il ne doit y avoir, comme nous le vérifierons, qu'un système de valeurs (ξ, η, ζ), qui satisfasse aux conditions d'inégalité. Enfin, si la base était terminée par plusieurs portions de courbes, il faudrait essayer des calculs analogues relativement à chaque portion de courbe, et ensuite relativement à chacun de leurs points de jonction, le corps pouvant s'appuyer sur l'un d'eux, comme sur une pointe, avec la condition que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la projection de l'axe instantané, tombe dans l'angle supplémentaire de celui que forment les tangentes menées par ce poiut aux deux portions de courbes contiguës.

15. On peut faire, des formules qui précèdent, une application curieuse, qui s'étend à une classe nombreuse de solides. Supposons que le corps, à l'origine du mouvement, tende à glisser sur une face perpendiculaire à l'axe principal des z', et que la résultante des forces qui le sollicitent passe par le centre de gravité. On aura $0 = L' = M' = N'$; et en prenant les axes de x, y, respectivement parallèles à ceux des x', y' (ce qui, dans ce cas, ne diminue en rien la généralité des formules), il viendra: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, d'où (N°. 12.):

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0,\; p = 0,\; q = 0,$$

et par suite:

$$\iint P\partial x\partial y = -Z,\quad \iint Px\partial x\partial y = 0,\quad \iint Py\partial x\partial y = 0;$$

l'origine des x, y étant d'ailleurs supposée la même que celle des x', y'. Or, pour que la fonction P puisse être censée constamment positive, et conséquemment pour que le glissement du corps sur la base puisse avoir lieu, il suffira (N°. 12.) que Z soit négative, et que le point dont les coordonnées en x, y sont nulles, c'est-à-dire la projection du centre de gravité sur le plan de la base, tombe dans l'intérieur de cette base.

Cette dernière condition est évidemment satisfaite, dans le cas de l'homogénéité, à l'égard des prismes, cylindres et cônes droits, des pyramides régulières, et d'un grand nombre d'autres solides, qui ont d'ailleurs une de leurs faces ou bases perpendiculaires à l'un de leurs axes principaux. Si donc un semblable corps repose par sa base sur un plan fixe, et qu'on lui communique une impulsion passant par le centre de gravité, il glissera sur sa base, ou se détachera entièrement du plan, selon que Z sera négative ou positive, mais dans aucun cas, il ne pourra pivoter sur l'un des angles, ou l'une des arêtes de sa base. La conclusion sera la même, en vertu de l'observation qui termine le numéro 7., si le corps est tiré du repos par l'action de la pesanteur; quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison du plan fixe à l'horizon: car la pesanteur est une force qui passe toujours par le centre de gravité. Enfin cette conclusion subsiste non seulement pour le premier instant du mouvement, mais pour tous ceux qui suivront: car on sait (N°. 4.) que les valeurs de $\iint Rx\partial x\partial y$, $\iint Ry\partial x\partial y$ étant nulles au premier instant, demeureront constamment nulles; et la condition de R positive dans toute l'étendue des intégrations, étant satisfaite à l'origine du mouvement, le sera pour toute sa durée.

16. Afin d'appliquer nos formules à un exemple, considérons un parallélipipède rectangle et homogène, posé sur le plan x, y par une de ses faces. Prenons les axes des x, y respectivement parallèles aux côtés de la base, et faisons $M = AK = BK'$. Soient $2f$, $2g$, $2h$ les longueurs des arêtes, parallèles aux axes des x, y, z; il s'agit d'examiner successivement les quatre hypothèses suivantes.

1°. Le parallélipipède peut glisser sur le plan fixe, auquel cas:

$$\iint P\partial x\partial y = -Z,\quad \iint Px\partial x\partial y = -L',\quad \iint Py\partial x\partial y = M';$$

d'où résultent (N°. 12.) les conditions

$$(r.)\quad Z < 0,\ -\frac{M'}{Z} > -f,\ -\frac{M'}{Z} < f,\ \frac{L'}{Z} > -g,\ \frac{L'}{Z} < g,$$

en se rappelant toujours que les signes $<$ et $>$ n'excluent pas le cas d'égalité. Les quatre dernières inégalités ne peuvent être satisfaites par $Z = 0$, à moins qu'on n'ait en même temps $0 = L' = M'$, ce qui rentre dans le cas du numéro précédent. Ainsi l'on doit supposer que la résultante perce le plan x, y en un point (x'', y''), auquel cas on sait que L', M' se réduisent à Zy'', $-Zx''$. Ces inégalités expriment donc géométriquement que le point (x'', y'') tombe dans l'intérieur de la base du parallélipipède.

2°. Si le corps tourne, en s'appuyant sur un des angles de sa base (ξ, η), on aura (N^{os}. 7. et 8.):

$$P = -\frac{Z+K\eta L'-K'\xi M'}{1+K\eta^2+K'\xi^2},\quad Ap = P\eta+L',\ Bq = -P\xi+M'.$$

Les inégalités $(q.)$ du numéro 13. se réduiront à $p\eta < 0$, $q\xi > 0$, à cause qu'on y doit faire $\xi' = \xi$, $\eta' = -\eta$; $\xi'' = -\xi$, $\eta'' = \eta$. D'ailleurs on doit avoir $P > 0$; au moyen de quoi les inégalités relatives à cette hypothèse sont les trois suivantes:

$$(5.)\quad \begin{cases} Z+K\eta L'-K'\xi M' < 0, \\ L'\eta+Z\eta^2+K'\eta\xi(\xi L'+\eta M') < 0, \\ M'\xi+Z\xi^2+K\eta\xi(\xi L'+\eta M') > 0, \end{cases}$$

dans lesquelles il faudra combiner les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η, ce qui donnera quatre systèmes d'inégalités, relatifs à chacun des angles de la base.

3°. Si le corps s'appuie sur l'une des deux arêtes parallèles aux x, l'équation $(o.)$ du N°. 10. se réduisant à $q = 0$, on aura:

$$\int P\partial x = -\frac{Z+K\eta L'}{1+K\eta^2},\quad \int Px\partial x = M',\ Ap = L'+\eta\int P\partial x.$$

L'inégalité $(q''.)$ du numéro 13. se réduira à $p\eta < 0$, et de plus en vertu des conditions signalées dans le numéro 11., on obtiendra ce système d'inégalités:

$$(t.)\quad Z+K\eta L' < 0,\; L'\eta - Z\eta^2 < 0,\; -\frac{M'(1+K\eta^2)}{Z+K\eta L'} > -f,\; -\frac{M'(1+K\eta^2)}{Z+K\eta L'} < f,$$

dans lesquelles il faudra faire $\eta = \pm g$, relativement à chacune des deux arêtes parallèles aux x. L'analogie indique suffisamment quelles seraient les formules qui se rapportent aux arêtes parallèles aux y.

4°. Enfin, si le parallélipipède vient à se détacher entièrement du plan, l'inégalité

$$(u.)\quad Z+K\eta L' - K'\xi M' > 0,$$

devra être satisfaite (N°. 13.) relativement à chacun des quatre angles de la base: c'est-à-dire qu'il faudra combiner dans la formule précédente, les valeurs $\pm f$ pour ξ, avec celles $\pm g$ pour η; ce qui donnera quatre inégalités différentes, lesquelles devront dans ce cas être vérifiées simultanément. C'est ce qui ne pourra avoir lieu lorsque Z est nulle, à moins qu'on n'ait en même temps $0 = L' = M'$. En outre, on déduit de ces quatre inégalités, combinées selon les règles d'élimination qui leur sont propres:

$$(u'.)\quad Z > 0,\; Z+KgL' > 0,\; Z-KgL' > 0,\; Z-K'fM' > 0,\; Z+K'fM' > 0;$$

ce qui démontre à posteriori l'incompatibilité du système des inégalités $(u.)$, $(u'.)$ avec chacun des systèmes $(r.)$, $(s.)$, $(t.)$.

Il ne semble pas aussi facile de démontrer algébriquement l'incompatibilité de chacun de ces derniers systèmes avec tous les autres, et en tous cas cela entraînerait bien des longueurs; mais on peut aisément vérifier cette incompatibilité sur autant d'exemples numériques que l'on voudra. Si l'on fait entre autres:

$$f = 1,\quad g = 2,\quad h = 2.\quad \text{d'où}\quad K = \tfrac{3}{8},\quad K' = \tfrac{3}{5},$$

et qu'on suppose de plus

$$Z = -1,\; L' = -6,\; M' = 3,\; \text{on aura}\; P = \frac{73}{31},\; p = -\frac{15}{32.31},\; q = -\frac{3}{8.31}.$$

Le seul système $(s.)$ sera vérifié complètement pour les valeurs $\xi = 1$, $\eta = 2$.

Il est à propos d'observer que cette analyse ne dépendant que de la forme du contour de la base, et de la direction des axes principaux, s'applique de même à la pyramide régulière à base rectangulaire, et à une infinité d'autres solides.

17. Occupons-nous maintenant du mouvement d'un cylindre droit, à base circulaire, qui repose par cette base sur le plan fixe, et appelons ϱ le rayon de la base, en observant que les momens d'inertie A, B, ou les nombres K, K' deviennent égaux entre eux. Si le cylindre glisse sur le plan, on obtiendra, par des considérations semblables à celles du numéro précédent, les conditions:

$$(v.)\quad Z<0,\quad L'^2+M'^2<\varrho^2Z^2;$$

d'où l'on conclurait de même: 1°. que Z ne peut être nulle, à moins que L' et M' ne le soient aussi; 2°. que la résultante doit percer le plan fixe dans l'intérieur de la base.

Quand le cylindre se soulève, en s'appuyant sur un point (ξ, η) de l'arête circulaire qui termine sa base, on a d'abord:

$$P=-\frac{Z+K(\eta L'-\xi M')}{1+K\varrho^2},\quad Ap=\frac{L'-Z\eta+K\xi(\xi L'+\eta M')}{1+K\varrho^2},$$

$$Aq=\frac{M'+Z\xi+K\eta(\xi L'+\eta M')}{1+K\varrho^2}.$$

Les coordonnées ξ, η sont déterminées par l'équation de l'arête

$$(w.)\quad \xi^2+\eta^2=\varrho^2,$$

et par l'équation $(k'.)$ du numéro 14., qui se réduit alors à $p\xi+q\eta=0$, ou, quand on Y substitue les valeurs précédentes de p, q, à

$$(k''.)\quad \xi L'+\eta M'=0.$$

L'inégalité $P>0$ doit être satisfaite, de même que celle $(q''.)$ du numéro 13., laquelle se réduit à $q\xi-p\eta>0$. Faisant les substitutions convenables, il en résulte:

$$(x.)\quad Z+K(\eta L'-\xi M')<0,\quad \varrho^2Z-\eta L'+\xi M'>0.$$

L'élimination de Z, entre ces deux inégalités, donne

$$(y.)\quad \eta L'-\xi M'<0;$$

et comme on tire des équations $(w.)$ et $(k''.)$:

$$\xi=\pm\frac{\varrho M'}{\sqrt{(L'^2+M'^2)}},\quad \eta=\mp\frac{\varrho L'}{\sqrt{(L'^2+M'^2)}},$$

on voit que $(y.)$ ne peut être vérifiée, à moins qu'on ne choisisse les signes supérieurs dans les valeurs précédentes de ξ, η. Ainsi, parmi les deux points que détermine le système des équations $(w.)$ et $(k''.)$, il ne saurait y en avoir qu'un seul qui satisfasse aux conditions du problème.

Si Z n'est pas nulle, on peut mettre $(k''.)$ sous la forme $\xi y''-\eta x''=0$, (x'', y'') étant toujours le point où la résultante perce le plan fixe. Il

en résulte que le point (ξ, η) est l'intersection de la circonférence $(w.)$ avec le diamètre mené par le point où la résultante pénètre le plan fixe. Le plan mené par ce diamètre et par l'axe du cylindre comprendra la résultante, dans le cas particulier où elle coupe l'axe. L'inégalité $(y.)$ devenant $Z(\xi x''+\eta y'')<0$, se résout en $\xi x''+\eta y''<$ ou >0, selon que Z est positive ou négative: en conséquence, dans le premier cas, le centre de la circonférence tombera entre les deux points (ξ, η), (x'', y''); et dans le second, ces deux points seront situés du même coté, par rapport au centre.

Si Z est nulle, $(k''.)$ se réduit à $\eta X-\xi Y=0$, équation d'une droite menée par le centre, parallèlement à la résultante. On a pour $(y.)$: $z''(\eta Y+\xi X)>0$, Z'' étant la distance du centre de gravité au plan qui comprend la résultante, et qui est parallèle à celui des x, y. Selon que Z'' est positive ou négative, l'inégalité précédente devient $\eta Y+\xi X>$ ou <0, c'est-à-dire que, dans le premier cas, le rayon mené du centre au point (ξ, η) sera dirigé dans le même sens que la résultante; et dans le second, il sera dirigé en sens contraire.

Par la substitution des valeurs de ξ, η, les inégalités $(x.)$ deviennent:

$$(x'.)\quad Z-K\varrho\sqrt{(L'^2+M'^2)}<0,\quad \varrho Z+\sqrt{(L'^2+M'^2)}>0.$$

D'un autre coté, en ayant égard à la première condition $(v.)$, la seconde peut s'écrire:

$$\varrho Z<-\sqrt{(L'^2+M'^2)};$$

ce qui vérifie à posteriori, et d'une manière générale, que le système $(v.)$ et le système $(x.)$ ou $(x'.)$ sont incompatibles.

Il reste encore à considérer l'hypothèse où le cylindre se détache entièrement du plan. Il faut alors (N°. 14.), 1° que les racines de l'équation finale, résultant de l'élimination entre l'équation $(w.)$ et celle $U=0$, ou $Z+K(\eta M'-\xi M')=0$, soient imaginaires; 2° que pour un point pris arbitrairement sur la circonférence $(w.)$ ou dans son intérieur, on ait $Z+K(\eta L'-\xi M')>0$. Effectuant les calculs relatifs à la première condition, et prenant ensuite pour le point arbitraire le centre même du cercle, il vient:

$$(z.)\quad Z^2-K^2\varrho^2(L'^2+M'^2)>0,\quad Z>0.$$

Cette dernière condition exclut l'existence simultanée des systèmes $(v.)$ et $(z.)$: en y ayant égard, l'autre peut s'écrire:

$$Z>K\varrho\sqrt{(L'^2+M'^2)};$$

ce qui démontre encore l'incompatibilité du système $(z.)$ avec celui $(x'.)$ ou $(x.)$.

Ajoutons à cela que la même analyse s'applique non seulement au cylindre, mais au cône droit, et généralement à tout corps de révolution homogène, reposant sur une base perpendiculaire à l'axe de révolution.

18. Ainsi qu'on l'a observé en commençant, il peut se faire que les points du corps qui exercent une percussion sur le plan, et dont la vitesse normale est nulle au premier instant du mouvement, s'en détachent avec une vitesse normale infiniment petite dans l'instant qui suit immédiatement, ce qui dépendra de l'intensité et de la direction des forces continues qui sollicitent le corps, comme aussi des vitesses acquises par l'impulsion initiale. Afin d'éclaircir cette observation par un exemple bien simple, on peut se représenter un corps pesant venant frapper de bas en haut un plan fixe horizontal. Il est clair que certains points du corps exerceront une percussion sur le plan, et que leur vitesses verticale deviendra nulle à l'instant du choc; ce qui ne les empêchera pas de se détacher du plan immédiatement après, par l'action de la pesanteur, avec une vitesse verticale infiniment petite.

Pour indiquer quelle serait, en pareil cas, la marche du calcul, supposons toujours que la pesanteur soit la force continue qui sollicite le corps, et ne considérons d'abord qu'un seul point de contact. Les équations $(a.)$ et $(b.)$ du N°. 1. s'appliqueront à cette hypothèse; et quand on y aura substitué les valeurs de p, q, r, relatives au premier instant du mouvement, et déterminées conformément à ce qu'on a vu dans les numéros précédens, de méme que celles de a, b, c, qui sont connues, elles donneront, par de simples calculs algébriques, les valeurs de

$$(l'.)\quad R,\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2},\ \frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial q}{\partial t},\ \frac{\partial r}{\partial t},$$

relatives au premier élément du temps. Il faut y joindre l'équation $(m'.)$ du N°. 7., dont nous représenterons le second membre par $-V$, en observant que, d'après les relations $(c.)$, on a:

$$V = (p\eta-q\xi)(qa-pb)+(r\xi-p\zeta)(pc-ra)+(q\zeta-r\eta)(rb-qc).$$

Selon que la valeur de R, déduite de ces sept équations, sera positive ou négative, le point $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ exercera ou non une pression sur le plan, et sa vitesse normale sera nulle, ou positive et infiniment petite, après l'élément ∂t.

Admettons que l'on ait, comme dans les N[os]. 15. et suivans, $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, et, de plus, que la force instantanée qui sollicite le corps à l'orgine passe par l'axe des z', ce qui entraîne $N' = 0$; d'où, en vertu de la troisième équation (b'.), $r = 0$. L'équation (m'.) se réduira à:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial p}{\partial t} - \xi \frac{\partial q}{\partial t} - \zeta(p^2+q^2) = 0,$$

ce qui donne

$$R = \frac{g \cos\varepsilon + \zeta(p^2+q^2)}{\frac{1}{M} + \frac{\eta^2}{A} + \frac{\xi^2}{B}}.$$

Remarquons maintenant qu'en vertu de nos hypothèses le corps est situé, par rapport au plan x, y, du côté des z positives, et que les z' sont comptées parallèlement aux z et dans le même sens, en sorte qu'on a z' ou $\zeta = z - \gamma$, γ étant positive. Relativement au point (ξ, η, ζ), qui repose sur le plan x, y, on a donc $\zeta = -\gamma$, et le terme $\zeta(p^2+q^2)$ est essentiellement négatif. Ainsi, R est négatif toutes les fois que ce terme est numériquement supérieur à $g \cos\varepsilon$, et, à plus forte raison, quand g est nul, ou quand on fait abstration de la pesanteur. Dans ce dernier cas, le corps se détache du plan, à la fin de l'élément ∂t, en vertu de la seule force d'impulsion, et avec une vitesse normale infiniment petite, égale à $-\zeta(p^2+q^2)\partial t$.

Si un second point (ξ', η', ζ') avait exercé une percussion contre le plan, on aurait une nouvelle équation de même forme que (m'.); et, en la retranchant de (m'.), il viendrait une autre équation de même forme que celle (o.) du N°. 10., par rapport aux inconnues du problème, sauf l'addition d'un terme constant $V - V'$ dans son premier membre; ce qui modifierait les résultats que nous avons obtenus dans ce numéro. Mais on aurait toujours le nombre d'équations suffisant pour déterminer individuellement R et R', et pour reconnaître, au signe de ces quantités, les points qui se détachent du plan, à la fin de ∂t. V est nul quand la direction de l'axe instantanée passe par le point (ξ, η, ζ); car alors

$$p\eta - q\zeta = 0, \quad r\xi - p\zeta = 0, \quad q\zeta - r\eta = 0.$$

Il est encore nul, quel que soit le point (ξ, η, ζ), lorsque l'axe instantané est perpendiculaire au plan fixe, puisqu'alors

$$qa - qb = 0, \quad pc - ra = 0, \quad rb - qc = 0.$$

Si donc il y a eu, à l'origine, plus de deux points non en ligne droite exerçant une percussion sur le plan, comme les termes V s'évanouis-

sent, on aura entre les inconnues $(l'.)$ des relations de même forme que celles des N^{os}. 12. et suivans, par rapport aux inconnues $(l.)$; ainsi, il suffira d'appliquer la même analyse pour en déduire les mêmes conséquences.

Au reste, les remarques de ce numéro s'étendent à telle époque du mouvement que l'on voudra considérer, pourvu qu'en cet instant les valeurs des six quantités p, q, r, a, b, c, soient données par l'intégration ou autrement.

Addition au numéro 15.

Comme le résultat auquel on parvient dans ce numéro, et sur lequel nous avons appelé l'attention en commençant, semblerait peut-être paradoxal, il ne sera pas hors de propos de le démontrer encore par une autre voie, et de le généraliser ainsi qu'il suit:

1°. Si le corps pouvait se soulever, en s'appuyant sur un point du contour de sa base, les équations $(b'.)$ et $(m.)$ donneraient, à cause de $0 = L' = M' = N'$, quelle que soit d'ailleurs la direction des axes principaux:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -P\Big(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}\Big).$$

P devrait être positif; donc $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ serait négatif, ce qui est en contradiction avec l'inégalité $(q''.)$ du numéro 13., qui subsiste sous la seule condition que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe tombe dans l'intérieur de la base.

2°. Le corps ne peut pas davantage se soulever en s'appuyant sur une arête rectiligne; car on aurait dans ce cas, en supposant $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$:

$$M\frac{\partial \gamma}{\partial t} = Z + \int P\partial s, \quad Ap = \int P\eta\partial s, \quad Bq = -\int P\xi\partial s.$$

Prenons pour équation de l'arête:

$$\eta = m\xi + n, \quad \text{d'où} \quad \int P\eta\partial s = m\int P\xi\partial s + n\int P\partial s;$$

l'équation $(o.)$ donnera:

$$-q(\xi - \xi') + p(\eta - \eta') = 0, \quad \text{ou} \quad mp = q,$$

et l'équation $(m.)$:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = q\xi - p\eta = -np.$$

De là on tire, toutes réductions faites:

$$\int P\partial s = -\frac{Z(A + m^2 B)}{A + m^2 B + n^2 M}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{n^2 Z}{A + m^2 B + n^2 M}.$$

Puisque $\int P \partial s$ doit toujours être positive, il résulte de la première de ces deux équations que Z est négative; et par suite, en vertu de la seconde, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ serait négative, ce qui est encore en contradiction avec l'inégalité (q''.). Quoique cette dernière partie de la démonstration s'appuie sur la condition que l'axe des z' soit perpendiculaire au plan x, y, on conçoit aisément qu'on pourrait, sauf la complication des calculs, lui donner la même généralité qu'à la première partie de cette démonstration: et il en résulte que le théorème du numéro 15. subsiste, quelle que soit la direction des axes principaux, sous la seule condition que la résultante passe par le centre de gravité, et que la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan fixe, tombe dans l'intérieur de la base. Ainsi ce que nous avons dit des prismes, cylindres et cônes droits, s'appliquera également aux prismes, cylindres et cônes obliques, pourvu que l'obliquité ne dépasse pas certaines limites. Ces corps pourront être supposés imparfaitement réguliers et homogènes, et le frottement exercé sur le plan, ou la résistance de l'air, seront les seules causes qui les feront chavirer.

Nous observerons encore que les forces instantanées, qui ont été designées dans tout ce qui précède par les lettres X, Y, Z, sont censées données en nombres; mais si l'on connaissait seulement la masse et la vitesse d'un autre corps qui vient frapper celui en repos sur le plan fixe, on déduirait sans peine de la théorie ordinaire des chocs les valeurs numériques des projections et des momens de la force instantanée, développée par ce choc. Enfin si le corps dont nous avons désigné la masse par M, au lieu d'être en repos sur le plan, et d'être tiré de cet état par l'action d'une force instantanée, venait lui-même choquer le plan fixe, nos formules seraient les mêmes, en remplaçant X, Y, Z, L', M', N', par les valeurs qu'avaient les quantités

$$M\frac{\partial \alpha}{\partial t},\quad M\frac{\partial \beta}{\partial t},\quad M\frac{\partial \gamma}{\partial t},\quad Ap,\quad Bq,\quad Cr.$$

immédiatement avant le choc.

(La suite dans le cahier prochain.)

10.
Bemerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen S. 96. 97. 98 im ersten Heft zweiten Bandes dieses Journals *).

(Vom Herrn *O. G. D. Aubert* zu Christiania in Norwegen.)

---

1. Aufgabe. *Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn* U, X, Y, Z *ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte* UX, XY *der Geraden ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.*

2. Aufgabe. *Wenn im Raume vier beliebige Kugeln einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn* U, X, Y, Z *die Puncte sind, in welchen sie den Kugelflächen aufserdem begegnet, ihre Abschnitte* UX, XY, YZ *gegebene Verhältnisse zu einander haben.*

Jede Gerade, die durch einen der Durchschnittspuncte C (Taf. II. Fig. 1.) der Kreise A und B gezogen wird, bildet mit den Linien, die ihre Endpuncte mit dem anderen Durchschnittspuncte D verbinden, ein Dreieck, welches dem Dreiecke ABD ähnlich ist, weil es mit ihm gleiche Winkel hat. Wenn man also AD und BD bis E und F verlängert, und die Gerade EF zieht, so wird dieselbe mit AB parallel sein, und durch den Punct C gehen, auch wird EF, weil $EF:GH = DE:DG$ ist, die gröfste unter allen Linien durch C sein, indem DE die gröfste unter allen Sehnen durch D im Kreise A ist. Ferner ist $EF = 2AB$, und $GH = EF.\frac{DG}{DE} = EF.\cos C$. Hierdurch wird es leicht sein, die obige Aufgabe zu lösen.

Es sollen nemlich auf der gesuchten Geraden, bei den Kreisen die zwei Abstände in einem gegebenen Verhältnifs $m:n$, und bei den Kugeln die drei Abstände in dem Verhältnisse $m:n:p$ sein. Stellt man

---

*) Dieser Aufsatz eines Freundes des leider viel zu früh dahin geschiedenen, so ausgezeichneten Mathematikers, Herrn Abel, wurde dem Herausgeber noch von diesem, nicht lange vor seinem Tode, mit seinem und des Herrn Verfassers Auftrage, den Aufsatz in das Journal einzurücken, mitgetheilt. Anm. d. Herausg.

sich die mit den Central-Linien durch den gemeinschaftlichen Schnittpunct parallel gezogenen Geraden vor, und bezeichnet sie bei den Kreisen durch C und C', bei den Kugeln durch C, C', C'', so werden die Cosinus der Winkel, die die gesuchte Gerade mit den bekannten C etc. bildet, in dem gegebenen Verhältnifs wie $\frac{m}{C}:\frac{n}{C'}$ bei den Kreisen, und wie $\frac{m}{C}:\frac{n}{C'}:\frac{p}{C''}$ bei den Kugeln stehen. Wenn man also auf den Linien C etc. von dem Puncte C Stücke in diesem Verhältnifs absetzt, und durch die Endpuncte und C einen Kreis oder eine Kugel construirt, so wird in beiden Fällen der durch C gezogene Durchmesser die gesuchte Gerade sein. Auch kann man leicht beweisen, dafs die Linien, die den Endpunct der gesuchten Geraden in einem der Kreise oder Kugeln, im ersten Falle mit den nicht gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten des gedachten Kreises mit den zwei übrigen, im zweiten Falle mit den dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Kugeln auf den Durchschnittskreisen der gedachten Kugel mit den drei anderen Kugeln diametral entgegengesetzten Puncten verbinden, sich wie die Cosinus der oben erwähnten Winkel verhalten, also wie $\frac{m}{C}$ etc. Der Ort der Puncte in einer Ebene, deren Abstände von zwei Puncten ein gegebenes Verhältnifs haben, ist bekanntlich ein Kreis, dessen Mittelpunct auf der Linie liegt, die die zwei constanten Puncte verbindet, im Raume also eine Kugel. Sollen also die Puncte von drei Puncten Abstände haben, die in gegebenem Verhältnifs stehen, so müssen sie auf zwei Kugeln liegen: ihr Ort wird also ein Kreis sein. Diese Ortskreise kann man leicht construiren, und also auch die gesuchte Gerade finden.

Von Kreisen, die einander in einem Puncte schneiden, will ich, des Folgenden wegen, noch einige Bemerkungen hinzufügen.

Die Kreise a, b, c, d, e etc. (Fig. 2.) schneiden einander in dem Puncte F. Aus einem beliebigen Puncte A im Kreise a ziehe man durch den (nicht gemeinschaftlichen) Durchschnittspunct der Kreise a und b, eine Gerade bis B, aus diesem Punct durch den Durchschnittspunct H der Kreise b und c, eine Gerade bis C, u. s. w., bis man zum Kreise a zurückkommt, so wird sich die letzte Gerade EA in A anschliefsen. Denn in den Vierecken wie $FBHG$ sind die entgegengesetzten Winkel $F+B=2R$. Die Zahl der Kreise sei n, so wird die Summe

aller Winkel in den verschiedenen Vierecken $= n.2R$ sein. Zieht man hiervon die Winkel um F, $= 4R$ ab, so wird $A + B + C \dots = n.2R - 4R$ sein, unter der Voraussetzung, daſs das Vieleck in A geschlossen sei. Wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde die Gerade EA die AB in einem anderen Puncte schneiden, also ihr Winkel gröſser oder kleiner sein, mithin die Summe der Winkel gröſser oder kleiner als $n.2R - 4R$; aber sie soll eben so groſs sein, weder gröſser noch kleiner. Das Vieleck muſs sich also, wie behauptet, schlieſsen. Die verschiedenen Vielecke die man durch Versetzung des Anfangspunctes A erhält, werden, wie man leicht sieht, unter sich und dem Centralvieleck $abcde$ ähnlich sein, denn die einzelnen Dreiecke, wie ABF, sind ähnlich. Das gröſste unter allen diesen Vielecken wird nach dem Vorhergehenden dasjenige sein, dessen Seiten mit den Centrallinien ab, bc etc. parallel sind, und welches $= 4abcde = M$ ist. Jedes andere Vieleck wie $ABCDE$, verhält sich zu M wie $AB^2 : A'B'^2$. Also ist

$$ABCDE = M.\cos v^2 = M.\sin^2 FGA.$$

6. Aufgabe. *Fället man aus irgend einem Peripheriepunct* P *des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fuſspuncte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden* G. *Man soll nun denjenigen Punct* P *finden, für welchen die ihm zugehörige Gerade* G *mit einer gegebenen Geraden parallel ist.*

Aus einem beliebigen Puncte D (Fig. 3.) des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises sind Linien unter gleichen Winkeln an einerlei Seite nach den Seiten gezogen, und schneiden sie in den Puncten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Der Winkel $\mathfrak{A}$ ist dem Winkel $\mathfrak{B}$ gleich, also der Bogen AB' dem Bogen $A'B$ oder $AB = A'B'$, mithin sind die Sehnen AB und $A'B'$ gleich, und AA' ist mit BB' und aus demselben Grunde mit CC' parallel (die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gleich). Nun sind in dem nach den Ecken centrischen Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}CD$ die Winkel $D\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $DC\mathfrak{B}$ gleich; aber $DC\mathfrak{B} = DA'A$, also $D\mathfrak{A}\mathfrak{B} = DA'A$, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallel mit AA'. Aus demselben Grunde müssen auch die Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ mit AA', BB' und CC' parallel sein; folglich können sie nur eine Gerade bilden, d. h. die Puncte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegen auf einer Geraden, parallel mit AA' etc. Verlangt man nun, daſs diese Gerade mit einer gegebenen Geraden parallel sein soll, so braucht man nur eine Linie von der gegebenen Lage

aus einer der Ecken des Dreiecks, zum Beispiel aus A nach A' zu ziehen: eine Linie aus diesem Puncte nach der A entgegengesetzten Seite unter dem gegebenen Winkel gezogen, bestimmt den gesuchten Punct D.

Wir haben im Vorbeigehen bewiesen, dafs die Puncte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf einer Geraden liegen. Directer und einfacher kann man dieses darthun, wenn man, wie oben, bemerkt, dafs $D\mathfrak{A}\mathfrak{B} = DCA = DBA$ (und da auch das Viereck $\mathfrak{A}B\mathfrak{C}D$ centrisch nach den Ecken ist) $= D\mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ bilden also den nemlichen Winkel mit der nemlichen Linie CD, machen also nur eine Gerade aus. Was nur von rechten Winkeln bewiesen war, ist auf diese Weise ohne Schwierigkeit auf beliebige gleiche Winkel erweitert worden. Auf dieselbe Art läfst sich der schöne polygonometrische Satz des Herrn Steiner (I. Band 1. Heft dieses Journals), der auch nur von rechten Winkeln behauptet war, auf beliebige gleiche Winkel erweitern. B und C (Fig. 4.) sind rechte Winkel, also läfst sich um das Viereck $ABCD$ ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunct E in AD liegt. Nun ist, wie leicht zu sehen, $BCD - ABC = 2BCE$, also $BE.CE.\sin BEC = AD^2.\frac{\sin 2BDC}{4}$; welches die Gleichung ist, von der Herr Steiner seinen Satz herleitet. Für den Fall wo B und C beliebige gleiche Winkel sind (nach derselben Seite), geht dieselbe über in:

$$\sin C^2 \sin 2D.(BCD - ABC) - \sin D^2 \sin 2C(ABD - ACD) = \sin D^2 AD^2.(\sin C^2 - \sin D^2),$$

woraus, so weit ich sehe, nichts für unsern Satz folgt. Aus den obigen Bemerkungen aber, von Kreisen die sich in einem Puncte schneiden, wird die Sache leicht klar. Es lassen sich nemlich, wenn nur die Winkel gleich sind, um die Vierecke $ABCD$ etc. (Fig. 3.) Kreise beschreiben, die alle den Punct D gemein haben, und sich übrigens in B, C etc. schneiden. Durch diese Puncte läfst sich, wie oben bemerkt, den Kreisen ein Vieleck einschreiben, dessen Seiten respective auf DB, DC senkrecht stehen. Der Inhalt dieses Vielecks (M) ist, wenn man das ursprüngliche Vieleck A nennt, $= \frac{A}{\sin C^2}$. Nennt man den constanten Inhalt des eingeschriebenen Vielecks B, so ist nach Herrn Steiner's Gleichung (II. Band S. 263.):

$$M - 2B = \frac{A}{\sin C^2} - 2B = \Sigma.\frac{AD^2 \sin A^2}{4},$$

wo das erste Glied, wie oben, constant ist. Die Schlüsse sind die nämlichen. Es ist wahrscheinlich, daſs der Satz einer noch gröſsern Erweiterung fähig ist. Daſs der Ort des Punctes D, im Falle beliebiger nicht gleicher Winkel ein Kegelschnitt sei, ist aus geometrischen Gründen leicht zu errathen, und analytisch nicht schwer zu beweisen. Es fragt sich, ob der Ort des Punctes D nicht ein Kreis werden könne, wenn auch die Winkel nicht gleich sind.

7. Lehrsatz. *Halbirt man in einem Viereck im Kreise sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschlieſsen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, 3 und 3 parallel.*

Da $x = y$ (Fig. 5.), so ist Bogen $DH - CG = FH - EG$ oder $DH + EG = FH + CG$, folglich

$$o = p.$$

Von den Linien, die die Winkel halbiren, muſs also die eine auf AH senkrecht, die andere mit ihr parallel sein.

8. Lehrsatz. *Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden, zu drei und drei genommen, vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punct, und diese 4 Puncte liegen allemal in einer Geraden.*

Von den Dreiecken wollen wir nur die drei, die eine der Geraden ABC (Fig. 6.) mit je zwei der übrigen bildet, und von den Lothen nur diejenigen betrachten, die von den Puncten A, B, C (den Durchschnittspuncten der Geraden ABC mit den drei andern) ausgehen. Von diesen 6 Lothen sind je zwei auf derselben Geraden perpendiculair, z. B. AD und BF etc., und also parallel. Der Satz läſst sich also auch so ausdrücken. Wenn in einem Sechseck, dessen entgegengesetzte Seiten parallel sind, die erste, dritte und fünfte Ecke in einer und derselben Geraden liegen, so liegen auch die zweite, vierte und sechste Ecke in einer und derselben Geraden, welches nur ein specieller Fall eines bekannten Satzes (Carnot *Géométrie de position, pag.* 456.) ist. Um ihn zu beweisen, will ich erst den umgekehrten Satz betrachten, nemlich: In einem Sechseck, welches in ein System von zwei Geraden eingeschrieben ist, und in welchem zwei Paare gegenüberstehender Seiten parallel sind, ist auch das dritte Paar parallel.

Es sei BE (Fig. 7.) mit DG, und CE mit DF parallel, so hat man

$$AB : AD = AE : AG,$$
$$AD : AC = AF : AE,$$

also
$$AB : AC = AF : AG,$$

und folglich ist BF mit CG parallel.

Vermittelst dieses Satzes läſst sich der obige Lehrsatz 8. leicht indirect beweisen.

Auf dieselbe Art wie für das Sechseck kann man von den in ein System zweier Geraden eingeschriebenen Zehn-Ecken, Vierzehn-Ecken u. s. w. (nemlich von jedem Vieleck, dessen Seitenzahl ein Product von Geraden und Ungeraden ist) beweisen, daſs, wenn alle Paare entgegengesetzter Seiten, auſser einem, parallel sind (oder, durch das Projections-Princip verallgemeinert: sich in Puncten schneiden, die in einer Geraden liegen), auch das letzte Paar parallel sein muſs (oder in einem Puncte sich schneiden muſs, der auf derselben Geraden liegt, wie die anderen).

9. *Vier beliebige Puncte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen, zu dreien genommen, vier Dreiecke. Die vier Puncte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen Kreise gleich ist.*

Carnot bemerkt (*Géométrie de position, pag.* 163.), daſs der Abstand EF (Fig. 8.) des Mittelpuncts E des um ein Dreieck ABC beschriebenen Kreises von einer der Seiten halb so groſs ist, als der Abstand CG der entgegengesetzten Winkelspitze C von dem Puncte wo die 3 Lothe aus den Winkelspitzen des Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten sich schneiden.

Man ziehe nemlich einen Durchmesser aus B nach H, so sind AH auf AB, CH auf CB senkrecht, und also respective mit CG und AG parallel. Die Figur $AHCG$ ist also ein Parallelogramm, und $AH = CG$. Man hat also $EF = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} CG$. $CG = 2 EF$ behält seine Gröſse, wenn E und AB constant bleiben, C aber eine andere Lage annimmt. Solchergestalt ist, wenn im Dreieck ABD die Lothe sich in H schneiden, DH parallel mit CG und gleich CG, also ist auch HG gleich und parallel mit CD.

Wenn man jetzt auch die zwei übrigen Lothpuncte (so wollen wir die Puncte nennen, wo die Lothe sich schneiden) bestimmt, so werden eben so die Geraden, die sie verbinden, mit den übrigen Seiten des

Vierecks parallel und gleich grofs sein, und begränzen also ein Viereck, das dem ursprünglichen gleich ist und sich also in einen, dem ursprünglichen Kreise gleichen Kreis einschreiben läfst.

10. Lehrsatz. *Fället man aus den Ecken eines beliebigen (irregulairen) Tetraëders auf die gegenüberliegenden Seiten-Ebenen Lothe, so schneiden diese vier Lothe einander im Allgemeinen nicht. Schneiden sich aber, in einem besonderen Falle, irgend zwei derselben, so schneiden alle vier einander in einem und demselben Puncte. Im Allgemeinen aber haben die genannten vier Lothe die merkwürdige Eigenschaft, dafs jede Gerade, welche durch irgend drei derselben geht, auch das vierte schneidet, d. h., dafs durch jeden beliebigen Punct, den man in einem der vier Lothe annimmt, allemal eine Gerade so gelegt werden kann, dafs sie die drei übrigen Lothe schneidet.*

Die Lothe AF und DG (Fig. 9.), aus A und D auf die gegenüberstehenden Seitenflächen, schneiden sich in H. Legt man durch diese Lothe eine Ebene, so wird dieselbe auf ABC und BCD, so wie auch auf ihrer Schnittlinie BC senkrecht stehen. Mithin werden die Geraden AE und DE, in welchen die Ebene ADE die Ebenen ABC und BCD schneidet, beide durch den nemlichen Punct E auf der Geraden BC gehen, und beide auf BC senkrecht stehen. Also wenn die Lothe aus A und D auf die entgegengesetzten Ebenen, einander schneiden, so werden sie immer durch die Lothe aus den nämlichen Puncten auf die der AD entgegengesetzten Seite BC gehen. Und umgekehrt: die beiden Lothe AF und DG werden sich schneiden, sobald sie durch die Lothe DE und AE gehen. Also ist es nicht nothwendig, dafs, wenn zwei Lothe sich schneiden, alle vier sich schneiden. Denn sollte dies der Fall sein, so würde AF z. B. wie durch DE auch durch die zwei übrigen Lothe des Dreiecks BCD gehen, also durch den Punct, in welchem sich alle drei schneiden, welches nach dem oben Angeführten nicht nothwendig ist, wenn man nur annimmt, dafs AF und DG einander schneiden. Es ist also AF auf DE, DG auf AE senkrecht, folglich auch die durch H gezogene Gerade EI, auf AD; und da BC auf der Ebene ADE senkrecht ist, so müssen auch BI und CI auf AD, und die Ebene BCI auf ABD und BCD senkrecht sein. Die aus B und C auf diese Ebenen gefällten Lothe müssen also in der nemlichen Ebene BCI liegen und einander schneiden, aber nicht nothwendig in H. Geht aber das eine von ihnen durch

H, z. B. das aus *B* gezogene Loth, so steht es im Dreieck *BCI* auf *CI* senkrecht, und also die durch *H* gezogene Gerade auf *BI*, und folglich auch auf der Ebene *ABD*. Also, wenn sich zwei Lothe schneiden, so schneiden sich auch die zwei übrigen, und wenn drei sich in einem Puncte schneiden, so geht auch das vierte durch den nämlichen Punct.

Nunmehr ist leicht einzusehen, dafs auch der andere Theil der Behauptung nicht zutrifft. Wir wollen uns den Fall vorstellen, wo zwei Lothe sich in einem, und die zwei übrigen in einem anderen Puncte schneiden, welches, wie bewiesen, möglich ist, so bildet jedes Paar Lothe eine Ebene, und jede Gerade, die alle vier Lothe schneiden soll, mufs in diesen beiden Ebenen liegen, also ihm Schnittlinie sein. Aber es giebt der Geraden, welche die 3 Lothe, und folglich nach der Behauptung auch das vierte schneiden, unstreitig unendlich viele (die man in diesem Falle durch den Schnittpunct der einen mit der Ebene der beiden übrigen ziehen kann), und die Ebenen hätten solchergestalt unendlich viele Schnittlinien.

11. *Vier der Gröfse und Lage nach gegebene Kugeln können im Allgemeinen von 16 bestimmten Kugeln berührt werden; gehen sie aber durch unendliche Vergröfserung in vier Ebenen über, die ein Tetraëder (beliebige dreiseitige Pyramide) bilden, so bleiben von jenen 16 Kugeln im Allgemeinen nur noch 8 übrig, d. h. es giebt im Allgemeinen 8 Kugeln, von denen jede die 4 Seiten-Ebenen eines gegebenen Tetraëders berührt. Von diesen 8 Kugeln ist 1) eine dem Tetraëder eingeschrieben, 2) von vier andern berührt jede die Aufsenseite einer Seiten-Ebene und die Verlängerungen der drei übrigen; und 3) jede der drei übrigen Kugeln berührt alle Seiten-Ebenen in ihrer Verlängerung, und zwar zwei Seiten-Ebenen auf ihrer Aufsenseite.*

Bezeichnet man nun den Radius der Kugel (1.) durch R, *die Radien der Kugeln (2.), nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch* R_1, R_2, R_3, R_4; *wo nemlich der letzte der gröfste ist, und die Radien der Kugeln (3.), nach der Ordnung ihrer Gröfse, durch* R_5, R_6, R_7, *so hat man zwischen diesen Radien unter anderen folgende merkwürdige Relationen:*

$$\text{I.}\quad \frac{1}{R}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_7},$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\pm\frac{1}{R_7}=0,$$

$$\text{III.}\quad \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2},\ \text{etc.}$$

Sind von den Seiten-Ebenen des Tetraëders drei zu einander senkrecht, so hat man z. B. auch noch folgende Gleichungen:

$$\text{IV.}\quad \frac{1}{\mathrm{R}_4-\mathrm{R}}=\frac{1}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_7}+\frac{1}{\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_6}+\frac{1}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_5},$$

$$\text{V.}\quad \frac{1}{\mathrm{R}\mathrm{R}_4}=\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_7}+\frac{1}{\mathrm{R}_2\mathrm{R}_6}+\frac{1}{\mathrm{R}_3\mathrm{R}_5}.$$

Wir wollen die Seiten-Ebenen des Tetraëders, nach der Ordnung ihrer Gröfse, s', s'', s''', s^{IV}, und den Inhalt des Tetraëders T nennen, so hat man, wie leicht zu sehen, folgende Gleichungen:

$$T=\frac{(s'+s''+s'''+s^{\mathrm{IV}})R}{3},\quad\text{also}\quad \frac{1}{R}=\frac{s'+s''+s'''+s^{\mathrm{IV}}}{3T}=S,$$

$$T=\frac{(-s'+s''+s'''+s^{\mathrm{IV}})R_1}{3},\ \text{also}\ \frac{1}{R_1}=S-p',$$

$$T=\frac{(s'-s''+s'''+s^{\mathrm{IV}})R_2}{3},\quad\text{also}\quad \frac{1}{R_2}=S-p'',$$

$$T=\frac{(s'+s''-s'''+s^{\mathrm{IV}})R_3}{3},\quad\text{also}\quad \frac{1}{R_3}=S-p''',$$

$$T=\frac{(s'+s''+s'''-s^{\mathrm{IV}})R_4}{3},\quad\text{also}\quad \frac{1}{R_4}=S-p^{\mathrm{IV}},$$

$$T=\frac{(-s'-s''+s'''+s^{\mathrm{IV}})R_5}{3},\ \text{also}\ \frac{1}{R_5}=S-(p'+p''),$$

$$\frac{(-s'-s''-s'''+s^{\mathrm{IV}})R_6}{3},\ \text{also}\ \frac{1}{R_6}=S-(p'+p'''),$$

$$\frac{\ldots s'+s''+s'''-s^{\mathrm{IV}})R_7}{3}$$

$$\text{oder}\ \frac{(s'-s''-s'''+s^{\mathrm{IV}})R_7}{3},\quad\text{also}\quad \frac{1}{R_7}=S-(p'+p^{\mathrm{IV}})\ \text{oder}\ S-(p''+p''')$$

(nemlich derjenige von beiden Ausdrücken, der positiv wird).

Hieraus lassen sich leicht die Formeln des Satzes beweisen. Der Kürze wegen übergehe ich die beiden ersten, und bemerke nur in Rücksicht auf die Zweideutigkeit von R_7, dafs man untersuchen mufs, welcher von den beiden Ausdrücken $s'+s^{\mathrm{IV}}$ und $s''+s'''$ der gröfsere sei.

Die Richtigkeit der dritten ergiebt sich aus folgender Rechnung:

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}=(S-p')^2+(S-p'')^2+(S-p''')^2$$
$$=4S^2-2S(p'+p''+p'''+p^{\mathrm{IV}})+p'^2+p''^2+p'''^2+p^{\mathrm{IV}2},$$

oder, da $p'+p''+p'''+p^{\mathrm{IV}}=2S$ ist,

$$=p'^2+p''^2+p'''^2+p^{\mathrm{IV}2}.$$

Welchen von den beiden entgegengesetzten Werthen von R_7 man nimmt, ist gleichgültig, da das doppelte Zeichen auf das Quadrat keinen Einflufs hat.

Es ist aber auch

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2}=S^2+(S-(p'+p''))^2+(S-(p'+p'''))^2+(S-(p'+p^{\text{IV}}))^2$$
$$=4S^2-2S(3p'+p''+p'''+p^{\text{IV}})+(p'+p'')^2+(p'+p''')^2+(p'+p^{\text{IV}})^2$$
$$=-4p'S+2p'^2+(p'^2+p''^2+p'''^2+p^{\text{IV}2})+2p'p''+2p'p'''+2p'p^{\text{IV}}$$
$$=-4p'S+4p'S+(p'^2+p''^2+p'''^2+p^{\text{IV}2})=p'^2+p''^2+p'''^2+p^{\text{IV}2},$$

folglich sind die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}\quad\text{und}\quad\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_5^2}+\frac{1}{R_6^2}+\frac{1}{R_7^2}$$

einander gleich.

Die Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen (IV. und V.) erhellet daraus, dafs, wenn drei Seiten-Ebenen auf einander senkrecht sind, nach einem bekannten Satze allemal

$$p^{\text{IV}2}=p'^2+p''^2+p'''^2$$

ist. Übrigens mufs man in diesen zwei Formeln, in welchen keine Quadrate von R_1, R_2, R_3, ... vorkommen, auf das doppelte Zeichen von R_7 Rücksicht nehmen. R_7 wird positiv, wenn $s'+s^{\text{IV}}$ gröfser ist als $s''+s'''$, und umgekehrt.

Ferner ist

$$(S-p')(S-(p''+p'''))+(S-p'')(S-(p'+p'''))+(S-p''')(S-(p'+p''))$$
$$=3S^2-3S(p'+p''+p''')+2(p'p''+p'p'''+p''p''')$$
$$=3S^2-3S(2S-p^{\text{IV}})+(2S-p^{\text{IV}})^2-p^{\text{IV}2},$$

[denn $p'+p''+p'''=2S-p$, und

$$2(p'p''+p'p'''+p''p''')=(p'+p''+p''')^2+(p'^2+p''^2+p'''^2)]$$
$$=-3S(S-p^{\text{IV}})+4S^2-4Sp^{\text{IV}}=S(S-p^{\text{IV}}).$$

Hieraus ergiebt sich die Richtigkeit der letzten Formel V. Denn man sieht leicht, dafs die einzelnen Glieder in V. nichts Anderes sind, als die Glieder in der oben stehenden Gleichung.

Es folgt aber auch die Richtigkeit der Gleichung IV., denn es ist:

$$R_1+R_7=\frac{1}{S-p'}+\frac{1}{S-(p''+p''')}=\frac{2S-(p'+p''+p''')}{(S-p')(S-(p''+p'''))}$$
$$=\frac{p^{\text{IV}}}{(S-p')(S-(p''+p'''))},\quad\text{also}\quad\frac{1}{R_1+R_7}=\frac{(S-p')(S-(p''+p'''))}{p^{\text{IV}}},$$

ferner $$R_2+R_6=\frac{1}{S-p''}+\frac{1}{S-(p'+p''')}=\frac{p^{\text{IV}}}{(S-p'')(S-(p'+p'''))},$$

also $$\frac{1}{R_2+R_6}=\frac{(S-p'')(S-(p'+p'''))}{p^{\text{IV}}},$$

endlich $$R_3+R_5=\frac{1}{S-p'''}+\frac{1}{S-(p'+p'')}=\frac{p^{\text{IV}}}{(S-p''')(S-(p'+p''))},$$

also $$\frac{1}{R_3+R_5} = \frac{(S-p''')(S-(p'+p''))}{p^{IV}}.$$

Wenn man addirt, so erhält man nach dem Obigen:

$$\frac{1}{R_1+R_7}+\frac{1}{R_2+R_6}+\frac{1}{R_3+R_5} = \frac{S(S-p^{IV})}{p^{IV}} = \frac{1}{\frac{1}{S-p^{IV}}-\frac{1}{S}} = \frac{1}{R_4-R},$$

wie zu beweisen war.

12. **Lehrsatz.** *Beschreibt man in einem beliebigen dreikantigen Körperwinkel eine Reihe Kugeln, von denen jede die drei Seiten-Ebenen desselben berührt, und die einander der Ordnung nach berühren, so bilden die Radien dieser Kugeln, ihrer Gröfse nach, eine geometrische Progression. Sind z. B.* a, b, c *die Winkel, welche die Kanten des Körperwinkels mit einander bilden, und setzt man die Radien zweier nach einander folgender Kugeln* R_1 *und* R_2, *und zur Abkürzung* $a+b+c=2s$, *so ist der Exponent der genannten Progression:*

$$\text{I.}\quad \frac{R_2}{R_1} = \left[\sqrt{\left(\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)} + \sqrt{\left(1+\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right)}\right]^2.$$

Oder sind A, B, C *die drei Flächenwinkel des Körperwinkels, und man setzt zur Abkürzung* $A+B+C=2S$, *so ist:*

$$\text{II.}\quad \frac{R_2}{R_1} = \left[\frac{\sqrt{(-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C))}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} + \sqrt{\left(1+\frac{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\right)}\right]^2.$$

Zur Erläuterung will ich den analogen Satz aus der Planimetrie in Erinnerung bringen. Nemlich: „Wenn man in einen Winkel Kreise einschreibt, welche der Reihe nach die Schenkel des Winkels und einander berühren, so bilden die Halbmesser dieser Kreise eine geometrische Progression, deren Exponent, wenn man den Winkel durch A bezeichnet,

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{3}} = \text{tang}^2\left(45^\circ+\frac{A}{4}\right)$$

ist. Denn

$$AF\ (\text{Fig. } 10.) = AB+BF = R_1\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+1\right) = AC-CF = R_2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-1\right),$$

folglich

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+1}{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}-1} = \frac{1+\sin\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}.\text{“}$$

Wenn man nun erwägt, dafs die Kugeln, welche die Seiten-Ebenen eines Körperwinkels berühren, in einen geraden Kegel eingeschrieben sind, der die Seiten-Ebenen berührt, so sieht man leicht, dafs der obige Lehrsatz 12. auf den ähnlichen aus der Planimetrie reducirt werden kann.

11.

Quelques observations sur les quatre droites données dans l'espace et non comprises deux à deux dans un même plan.

(Par Mr. *Garbinsky*, prof. à l'univ. et directeur de l'école polyt. à Varsovie.)

§. 1. Quoique l'on possède déjà trois solutions du problème suivant: „Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites A, B, C, D données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan *);" il ne sera peut-être pas sans quelque utilité de le considérer de nouveau comme on va le voir par ce qu'il suit:

Imaginons un hyperboloïde dont les trois directrices sont les trois droites A, B, C, et designons par d et d' les deux points d'intersection de cette surface avec la quatrième droite D; si maintenant par chacun de ces points et par l'une quelconque de trois directrices, par exemple C, on mène deux plans P et P', et que l'on désigne leurs intersections avec la directrice A par a et a', et leurs intersections avec la directrice B par b, b'; les deux droites ab, $a'b'$ seront les droites demandées, c'est à dire, les deux droites qui coupent à la fois les quatre droites données A, B, C, D. Donc en dernière analyse le problème proposé se trouve ramené à construire rigoureusement les intersections d'une droite D avec la surface gauche du second degré, nommée hyperboloïde à une nappe, et ayant pour ses trois directrices les droites A, B, C.

§. 2. Pour trouver les points d, d', menons par la droite A un plan M parallèle à la droite D, et par la droite D un plan M' parallèle à la droite A, ce dernier plan coupera évidemment l'hyperboloïde suivant une hyperbole, puisqu'il est parallèle à la droite A, et à une autre droite A' qui sera entierement sur cette surface, et qu'on déterminera, en menant une droite par les deux points d'intersection des lignes B et C avec le plan M'. Donc tout se réduit maintenant à déterminer les points d'in-

*) Ce problème a été résolu, dans les Annales de Mathématiques de Mr. Gergonne v. T. XVIII. p. 182. — 184. par Mr. Bobillier et moi, et dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* par Mr. Steiner *II. Band 3. Heft.*

tersection de l'hyperbole et de la droite D; car ces deux points seront évidemment les points d et d'. — Désignons par α, β, γ les trois points de l'hyperbole mentionnée, qu'on obtiendrait en cherchant l'intersection du plan M' avec les droites B, C, et une troisième droite quelconque B', qui coupe les trois droites A, B, C à la fois. Pour obtenir les asymptotes de l'hyperbole, il faut se rappeller qu'elles sont les intersections de deux plans passants respectivement par les droites A et A' et tangens à l'hyperboloïde aux points situés sur ces deux droites dans l'infini, avec un troisième plan M; car les lignes A et A' étant parallèles au plan M', sont coupées par ce plan dans l'infini. — Déterminons l'un de ces plans tangens, celui par exemple qui passe par la droite A: on sait, que le plan tangent à l'hyperboloïde passe toujours par deux droites situées entièrement sur la surface, et dont l'intersection est le point de contact. De là on conclut facilement, qu'en menant par chacune de deux droites B et C un plan, respectivement parallèle à la droite A, l'intersection commune de ces deux plans sera une autre droite qui coupe les droites B et C, et qui est parallèle à la ligne A: donc le plan passant par la droite ainsi déterminée et par la droite A, touchera l'hyperboloïde dans l'infini; donc enfin l'intersection de ce plan avec le plan M sera l'une des asymptotes de cette courbe. On déterminera l'autre asymptote en cherchant l'intersection du plan M' avec le plan passant par la droite A' et sa parallèle, située entièrement sur l'hyperboloïde; cette dernière droite doit être l'intersection de deux plans parallèles à la droite A', et dont l'un passe par la droite B' et l'autre par la droite C'. Les deux droites B' et C' sont quelconques, mais situées entièrement sur la surface, en coupant les droites données A, B, C, comme directrices de d'hyperboloïde. Menons par le point x, intersection de deux asymptôtes, une droite, qui partage l'angle de ces asymptôtes en deux parties égales, et de manière qu'elle ne coupe pas l'hyperbole, cette droite sera l'axe imaginaire de la courbe. Si maintenant l'hyperbole mentionnée fait une révolution autour de son axe imaginaire, elle engendrera un hyperboloïde de révolution, et les trois points α, β, γ decriront trois cercles S, S', S'', situés entièrement sur cette surface et dont les plans seront perpendiculaires à l'axe imaginaire. Mais on sait, que l'hyperboloïde de révolution n'est qu'un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe; donc, le même hyperboloïde de révolution pourrait encore être engendré par une droite quelconque qui

coupe à la fois tous les trois cercles S, S', S'', en faisant une révolution complète autour de l'axe imaginaire. — On déterminera l'une de ces droites de la manière suivante: Imaginons une surface conique ayant pour sommet un point du cercle S et pour directrice ou base le cercle S', on voit clairement que cette surface conique sera coupée par le plan du troisième cercle S'' suivant un autre cercle; après avoir construit les deux intersections de ce cercle avec le cercle S'', une droite ϱ passant par l'un de ces deux points et le sommet du cône, coupera à la fois tous les trois cercles S, S', S'', et sera par conséquent toute entière sur l'hyperboloïde de révolution. — Mais on voit, que les deux points cherchés d et d' sont situés en même temps sur l'hyperboloïde de révolution et sur la droite D qui coupe en un point γ l'axe imaginaire de l'hyperbole. On trouvera donc ces points si on détermine les deux cercles communs à l'hyperboloïde de révolution et au cône qui serait engendré par la révolution de la droite D autour de l'axe de révolution de l'hyperboloïde, car les intersections de ces deux cercles avec la droite D seront évidemment les deux points cherchés. Imaginons un plan passant par la droite ϱ et le sommet γ du cône et determinons les deux génératrices d'intersection de ce même plan avec le cône, elle seront coupées, généralement parlant, en deux points par la droite ϱ; abaissant de chacun de ces deux points une perpendiculaire à l'axe de rotation, on obtiendra les rayons des deux cercles cherchés, et les points situés sur ces cercles de la droite D seront les points démandés d et d'.

§. 3. Avant de donner une autre construction de la ligne demandée, il faut se rappeler quelques propositions dont les unes sont bien connues aux géomètres et les autres peuvent être démontrées aisément:

a. Un pôle et le milieu de sa pôlaire à l'égard d'une section conique quelconque, sont situés sur un même diamètre conjugué avec un autre diamètre parallèle à la pôlaire.

b. Si l'axe étant réel, F, F' sont les foyers d'une hyperbole quelconque et qu'un cercle est décrit du foyer F' comme centre avec un rayon égal à l'axe réel de l'hyperbole, après avoir ensuite décrit d'un point donné comme centre un cercle passant par l'autre foyer F, et déterminé ses deux points d'intersection t et t' avec le cercle primitif: si [illegible] on mène du point donné deux droites passant par les milieux des cordes

Ft et Ft': on obtiendra ainsi les deux tangentes qu'on pourra mener par le point donné à l'hyperbole; l'intersection de la droite $F't$ avec la première tangente donnera son point de contact, et le point de contact de l'autre tangente, sera son point d'intersection avec la droite $F't'$.

c. On démontre facilement que les deux tangentes trouvées sont respectivement perpendiculaires aux cordes Ft, Ft', d'où l'on tire une méthode très facile, pour mener une tangente à l'hyperbole, parallèlement à une droite donnée; car après avoir tiré du foyer F une droite perpendiculaire à la droite donnée, et après avoir construit les deux points u et u' d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle primitif, les deux parallèles à la droite donnée, tirées des milieux de deux cordes Fu, Fu' seront les tangentes demandées. On déterminera leurs points de contact comme précédemment *).

d. Si l'on observe que les milieux de toutes les cordes Ft, Ft', Fu, Fu' etc. sont situées sur un cercle décrit avec l'axe réel de l'hyperbole comme diamètre, on démontre sans aucune difficulté que, si de l'un quelconque de deux foyers F et F' on mène deux tangentes au cercle décrit sur l'axe de l'hyperbole pris pour diamètre, les deux rayons de ce cercle prolongés à l'infini et passant par les points de contact de deux tangentes, seront les asymptotes de la courbe; et vice versa: si des points d'intersection d'une des asymptotes avec le cercle, ayant l'axe réel de l'hyperbole pour diamètre, on mène des tangentes à ce cercle, les deux intersections de ces tangentes avec l'axe réel de la courbe seront ses deux foyers F et F'.

Partant de ce point, supposons pour le moment que la droite ϱ (§. 2.) soit déterminée d'une manière quelconque, qu'on a mené une perpendiculaire à l'axe de rotation par le milieu x de l'hyperbole sur laquelle se trouvent les deux points d, d' et qu'on ait déterminé la distance du point d'intersection de ce plan avec la droite ϱ au point x milieu de l'hyperbole, décrivant avec cette distance du point x comme milieu un cercle sur le plan de la courbe, et menant une tangente à ce cercle, au

---

*) Tout ce que je dis rélativement aux tangentes menées à l'hyperbole d'un point donné ou parallèlement à une droite donnée, a également lieu pour toutes les sections coniques, en observant seulement que pour la parabole le cercle primitif n'est autre chose que la droite directrice de cette courbe et que le cercle passant par les milieux des cordes Ft, Ft', Fu, Fu' etc. est une autre droite parallèle à la directrice et tirée du sommet de la parabole.

point où il est coupé par l'asymptote: l'intersection de cette tangente avec l'axe réel prolongé fera connoître l'un de foyers des l'hyperbole. Avec ces données on déterminera facilement les deux points de contact avec la courbe de deux tangentes parallèles à la droite D, et par cela même la grandeur du diamètre conjuguée avec celui qui est parallèle à la droite D. Je prends le diamètre conjugué que j'ai trouvé pour le diamètre d'un cercle et je mène du point z, intersection de ce diamètre avec la droite D, deux tangentes à ce cercle: il est bien clair que, la corde passant par les points de contact de ces tangentes avec le cercle, coupera le diamètre conjugué en un point z qui sera le pôle de la droite D à l'égard de l'hyperbole. Donc les deux points de contact de l'hyperbole avec ses deux tangentes tirées du point z, feront connoître les deux points cherchés d et d' *).

§. 4. Faisons voir maintenant comment on pourrait resoudre analytiquement le problème proposé, et quelles seraient les équations des conditions pour les diverses positions des quatre droites données A, B, C, D.

Si pour plus de commodité nous allons prendre la ligne A pour l'axe des coordonnées z, et pour les axes des coordonnées de y et x deux lignes menées d'un point quelconque de la droite A, parallèlement aux deux droites B et C, les équations des quatre droites données pouront être exprimées comme il suit:

$$1.\quad A.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} B.\begin{cases} z=c \\ x=a \end{cases} C.\begin{cases} y=b \\ z=c' \end{cases} D.\begin{cases} x=a'z+m \\ y=b'z+m'. \end{cases}$$

---

*) Cette manière de construire les points d'intersection d'une droite avec une hyperbole dont on connait l'axe réel et les foyers, s'applique également aux autres sections coniques, en observant, que pour trouver le pôle de la corde dd' rélativement à une éllipse, il faut décrire un cercle sur un diamètre conjugué avec le diamètre parallèle à la corde dd', élever une perpendiculaire sur ce diamètre du point d'intersection de ce diamètre avec la corde, déterminer les deux points d'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle; l'intersection commune des deux tangentes aux cercles menées par ces deux points, sera le pôle de la corde dd', rélativement à l'élipse donnée. Pour la parabole dont tous les diamètres sont parallèles à l'axe, la construction est très simple, car si après avoir déterminé le point de contact de la tangente parallèle à dd', on mène par ce point une parallèle au grand axe, et qu'on détermine son intersection z avec la corde dd', un autre point z' situé de coté opposé sur le prolongement du diamètre conjugué, à la même distance du point de contact que le premier point z, sera le pôle de la corde ou de la pôlaire dd' rél[illegible]vement à la parabole donnée.

Mr. Coste a donné une autre construction du même problème dans les An[illegible] [illegible]athématique de Mr. Gergonne T. VII. p. 304., mais je crois plus directe et [illegible] dans la pratique celle que nons venons de présenter.

Un plan quelconque passant par la droite A aura pour équation:

$$2.\quad y = qx.$$

Les deux points d'intersection de ce plan avec les droites B et C auront pour coordonnées:

$$3.\quad (x=a,\ y=qa,\ z=c);\ \left(x=\frac{b}{q},\ y=b,\ z=c\right).$$

Donc la droite déterminée par ces deux points, ayant pour équations:

$$4.\quad x-a=\frac{(qa-b)}{q(c-c')}(z-c);\ \ y-qa=\frac{q(qa-b)}{q(c-c')}(z-c),$$

coupera à la fois les trois droites A, B, C; donc pour une certaine valeur de q elle sera l'une des génératrices de l'hyperboloïde ayant les trois droites A, B, C pour directrices. Eliminant donc q entre les équations (4.) ou entre l'une quelconque de ces deux équations et entre celle (2.), on aura:

$$5.\quad (c-c')yx+(z-c)bx-(z-c')ay=0.$$

Cette équation exprimera évidemment une rélation entre tous les points de toutes les génératrices de l'hyperboloïde qui a les droites A, B, C, pour directrices, ou ce qui est la même chose: cette équation sera celle de l'hyperboloïde lui même.

Mettant dans cette équation pour x et y leurs valeurs correspondantes tirées des équations de la droite D, transposant et décomposant en facteurs, on aura:

$$6.\quad [a'b'(c-c')+a'b-ab']z^2+[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]z \\ +mm'(c-c')+ac'm'-bcm=0,$$

ce qui prouve que, généralement parlant, l'hyperboloïde (5.) sera coupé, en deux points d et d' par la droite D, et que les deux génératrices de l'hyperboloïde, qu'on menerait par ces points, resoudront le problème proposé.

§. 5. Considérons à présent les cas particuliers. On tire de l'équation (6.):

$$7.\quad z=-\frac{[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]}{2[a'b'(c-c')+a'b-ab']} \\ \pm\frac{\sqrt{\left\{\begin{matrix}[(b'm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2\\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm]\end{matrix}\right\}}}{2[a'b'(c-c')+a'b-ab']}$$

et on peut faire rélativement à la quantité comprise sous le radical les trois suppositions suivantes:

$$8.\quad\begin{cases} \quad 1)\ [(bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm]>0, \\ \quad 2)\ [(bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm]=0, \\ \quad 3)\ [bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m'-b'c')]^2 \\ -2[a'b'(c-c')+a'b-ab'][mm'(c-c')+ac'm'-bcm]<0. \end{cases}$$

Dans le premier cas la droite D sera une sécante de l'hyperboloïde et il y aura deux droites qui résoudront le problème; dans l'autre cas la droite D sera tangente et il n'y aura qu'une seule solution; dans le troisième cas les deux valeurs de z seront imaginaires et la droite D n'aura aucun point de commun avec l'hyperboloïde, où en d'autres termes, la solution du problème sera impossible.

§. 6. Si entre les coëfficients de l'équation (6.) on suppose une relation telle qu'on ait à la fois:

$$9.\quad\begin{cases} a'b'(c-c')+a'b-ab'=0, \\ (bm+a'm')(c-c')+b(m-a'c)-a(m-b'c')=0, \\ mm'(c-c')+ac'm'-bcm=0; \end{cases}$$

on suppose par là que z a une infinité de valeurs, ou que la droite D a une infinité de points sur l'hyperboloïde, ce qui veut dire en d'autres termes que cette droite D est entièrement sur l'hyperboloïde; donc les équations (8.) expriment les conditions nécéssaires de ce que les quatre droites A, B, C, D, soyent sur un même hyperboloïde.

§. 7. Enfin nous ferons remarquer que l'équation

$$10.\quad a'b'(c-c')+a'b-ab'=0,$$

peut subsister isolément, ou bien que les deux équations

$$11.\quad\begin{cases} a'b'(c-c')+a'b-ab'=0, \\ (bm+a'm')(c-c')-b(m-a'c)-a(m-b'c')=0 \end{cases}$$

peuvent avoir lieu en même tems. Dans le premier cas une des valeurs de z sera déterminée et l'autre infinie, dans le second cas toutes les deux valeurs de z seront infinies. Pour montrer clairement la différence entre ces deux cas, il faut se rappeler que par un point donné sur un hyporboloïde on peut mener deux lignes droites situées entièrement sur cette surface et que le plan déterminé par ces deux droites est un plan tangent à la surface au point donné. Si donc le point donné

étoit dans l'infini, les deux droites de la surface, dont le plan est un plan tangent à l'hyperboloïde dans ce point, seroient parallèles entre elles.

Cela posé, il est aisé de voir que dans les deux suppositions (10.) et (11.) il y aura sur l'hyperboloïde qui a A, B, C, pour directrices une génératrice parallèle à la droite D, mais que si dans le premier cas on fait passer un plan par la droite D et par sa génératrice parallèle, ce plan coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite, dont l'intersection avec la droite D sera un point déterminé; tandis que dans l'autre cas le plan passant par la droite D et par sa génératrice parallèle, coupera l'hyperboloïde suivant une autre droite qui sera aussi parallèle à la droite D. Donc dans la première supposition la ligne D quoiqu'elle ait à une distance infinie un point commun avec l'hyperboloïde, n'est qu'une sécante de cette surface, tandis que dans la seconde supposition cette droite est une asymptôte de la surface, où ce qui est la même chose, une des génératrices de la surface conique, asymptotique rélativement à l'hyperboloïde. On se rendra raison d'une manière encore plus évidente de tous ces résultats quand on remarque que l'hyperbole qui est l'intersection du plan M' avec l'hyperboloïde, ayant A, B, C, pour directrices (§. 2.), peut être remplacée dans des cas particuliers par un système de deux droites dont l'intersection commune sera ou déterminée ou dans l'infini.

Le 31. Août 1829, à Varsovie.

12.

Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten.

(Vom Hrn. *Adam Burg*, Professor der höhern Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.)

Bekanntlich läſst sich das Dasein von wenigstens einer reellen Wurzel in einer Gleichung von ungeraden, so wie das Vorhandensein von wenigstens zwei reellen Wurzeln in einer geordneten Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, sehr leicht und einfach nachweisen, so daſs es nur darauf ankommt, Gleichungen von gerader Ordnung, welche ihr letztes Glied positiv haben, in dieser Beziehung zu untersuchen. Da aber solche Gleichungen auch lauter imaginäre Wurzeln haben können, so handelt es sich, wie ebenfalls bekannt, bloſs darum, zu zeigen, daſs einer solchen Gleichung in jedem Falle ein Genüge geschieht, wenn man in ihr die Unbekannte $x = p + q\sqrt{-1}$ setzt, weil unter dieser Form nicht nur jede imaginäre (wenn nämlich p und q reelle Gröſsen bedeuten), sondern auch eine jede reelle Wurzel, wenn $q = 0$ ist, kann dargestellt werden; daher es auch nicht nothwendig ist, den Beweis von der Existenz einer Wurzel, welche im Allgemeinen die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat, bloſs auf Gleichungen von der letztgenannten Gattung zu beschränken, sondern es kann dieser, wie es auch sonst geschieht, sogleich auf alle Gleichungen ausgedehnt werden. Der allerdings scharfsinnige Beweis, welcher von Herrn Cauchy herrührt, und meines Wissens noch der einzige ist, welcher als genügend angesehen wird, erscheint mir doch keinesweges so einfach, als daſs es nicht wünschenswerth sein sollte, dafür einen wenigstens eben so strengen, aber weit einfacheren zu finden. Irre ich nicht, so hat der nachstehende Beweis, welcher sich auf Gleichungen von gerader Ordnung überhaupt, ohne auf das Zeichen des letzten Gliedes Rücksicht zn nehmen, bezieht, diese genannte Eigenschaft.

1. Der Ordnungs-Exponent N einer jeden Gleichung $X=0$ von gerader Ordnung ist immer in der Form enthalten $N=n.2^m$, wo n nur ungerade, m aber beliebig eine jede ganze positive Zahl bezeichnet. Transformirt man die gegebene Gleichung in eine andere $X=0$ mit quadrirten Differenzen, welche Gleichung wir, der Kürze wegen, die erste transformirte Gleichung nennen wollen, so ist diese, wie bekannt, von der Ordnung $N'=\frac{N(N-1)}{2}=n.2^{m-1}(n.2^m-1)$. Wird auch für diese Gleichung jene $X''=0$, deren Wurzeln die quadrirten Differenzen der Wurzeln der Gleichung $X=0$ sind, oder die zweite transformirte Gleichung gesucht, so ist diese von der Ordnung

$$N''=\frac{N'(N'-1)}{2}=n.2^{m-2}(n.2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1],$$

so wie wieder die dritte transformirte Gleichung den Ordnungs-Exponenten

$$\frac{N''(N''-1)}{2}$$
$$=n.2^{m-3}(n.2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1]\{n.2^{m-2}(n.2^m-1)[n.2^{m-1}(n.2^m-1)-1]-1\}$$

haben würde, u. s. w.

Man sieht leicht, dafs die $m$te formirte Gleichung $X^{(m)'}$ der quadrirten Differenzen von ungerader Ordnung sein mufs, weil sowohl der erste Factor $n.2^{m-m}=n$, als auch jeder der folgenden, welche sämmtlich von der Form $2^\gamma-1$ sind, ungerade ist.

2. Da nun diese $m$te transformirte Gleichung von ungerader Ordnung ist, also nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel x_a haben mufs, so hat die $(m-1)$te transformirte Gleichung wenigstens ein Paar Wurzeln x_a, x_b, für welche $x_a=(x_a-x_b)^2$, oder $x_a-x_b=\sqrt{x_a}$ ist. Es wird aber dieser Gleichung in jedem Falle, es mag die reelle Wurzel x_a positiv oder negativ sein, Genüge geleistet, wenn man setzt: $x_a=P+Q\sqrt{-1}$, $x_b=P_1+Q_1\sqrt{-1}$, weil dann $x_a-x_b=(P-P_1)+(Q-Q_1)\sqrt{-1}$, also von der Form $A+B\sqrt{-1}$ ist, wo $B=0$ wird, wenn x_a positiv ist.

Da aber, wenn wir nur eine dieser beiden Wurzeln weiter betrachten, die $(m-1)$te transformirte Gleichung eine Wurzel x_a von der Form $P+Q\sqrt{-1}$ hat, so giebt es in der $(m-2)$ten transformirten Gleichung ein Paar Wurzeln x'_a, x'_b, für welche wieder $x'_a-x'_b=\sqrt{x_a}=\sqrt{(P+Q\sqrt{-1})}$ sein mufs; und es wird auch dieser Gleichung wie-

der genug gethan, wenn man setzt: $x'_a = P' + Q'\sqrt{-1}$, $x'_b = P'_1 + Q'_1\sqrt{-1}$, weil $x'_a - x'_b$ wieder die Form $A' + B'\sqrt{-1}$ annimmt, und bekanntlich das Quadrat dieses Binoms ebenfalls von derselben Form ist.

Da aber ferner die $(m-2)$te transformirte Gleichung auf diese Weise wenigstens eine Wurzel x'_a von der Form $P' + Q'\sqrt{-1}$ hat, so mufs nach demselben Raisonnement die $(m-3)$te transformirte Gleichung wenigstens eine Wurzel von der Form $P'' + Q''\sqrt{-1}$ zulassen u. s. w., so, dafs man durch dieselben fortgesetzten Schlüsse endlich auf die $(m-m)$te transformirte, d. i. auf die ursprüngliche Gleichung $X=0$ selbst zurückkommt, von welcher auf diese Art erwiesen ist, dafs sie sofort wenigstens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ haben oder zulassen müsse.

13.

Démonstration d'un théorème d'arithmétique proposé dans les annales de mathématiques de Mr. Gergonne, tom. XIX. p. 256.

(Par Mr. *J. A. Grunert*, prof. des math. à Brandenbourg.)

Théorème. Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9 suivis de plusieurs zéros.

Démonstration. Désignons par p le nombre donné, diviseur du nombre cherché

$$Z = \overset{(x)}{9}\;\overset{(x-1)}{9}\;\overset{(x-2)}{9}\ldots\ldots\overset{(1)}{9}\;\overset{(0)}{9}\;\overset{(1)}{0}\ldots\ldots\overset{(y-1)}{0}\;\overset{(y)}{0}$$
$$= 9(1+10+10^2+\ldots\ldots+10^x).10^y = (10^{x+1}-1).10^y.$$

Décomposons le nombre donné p en facteurs premiers de sorte que $p = 2^\mu.5^\nu.\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots.$, où α, β, γ, ... ne soient ni $=2$, ni $=5$. Le nombre des nombres plus petits que $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots.$ et premiers à ce produit sera

$$= \alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots.\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$
$$= \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots.$$

(Legendre *Essai sur la théorie des nombres. Sec. éd. p.* 7.), donc en vertu du théorème de Fermat, généralisé par Mr. Gaufs (*Disquis. arithm. p.* 80. *art.* 83.), si

$$x+1 = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots.,$$

la différence $10^{x+1}-1$ sera divisible par $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots.$, 10 et $\alpha^m\beta^n\gamma^k\ldots.$ étant premiers entre eux suivant l'hypothèse.

Cela posé, soit $M(\mu,\nu)$ le plus grand des deux nombres μ, ν, il est clair, que l'expression $10^y = 10^{M(\mu,\nu)}$, y étant $M(\mu,\nu)$, sera toujours divisible par le produit $2^\mu.5^\nu$, et qu'on pourra trouver dans tous les cas deux nombres:

$$x = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\beta^{n-1}(\beta-1)\gamma^{k-1}(\gamma-1)\ldots.-1 \text{ et } y = M(\mu,\nu)$$

tels que

$$Z = \overset{(x)}{9}\,\overset{(x-1)}{9}\,\overset{(x-2)}{9}\ldots\ldots\overset{(1)}{9}\,\overset{(0)}{9}\,\overset{(1)}{0}\ldots\ldots\overset{(y-1)}{0}\,\overset{(y)}{0} = (10^{x+1}-1).10^{y}$$

soit divisible par le nombre arbitraire donné p.

Exemple. $p = 5^3.2^2.7.3$, $x = 7^0.6.3^0.2 - 1 = 11$, $y = 3$,

$$Z = 999999999999000$$
$$= p.95238095238.$$

Il est aussi clair, que dans ce cas et dans tous les cas semblables on peut toujours trouver un nombre plus petit qui soit divisible par p; car tout nombre de la forme demandée est divisible par 3, donc s'il est divisible par 7, il le sera aussi par $3.7 = 21$ (*Essai sur la théorie des nombres p.* 4. 5.). Donc il n'y a dans ce cas que de supposer

$$x = 7^0.6 - 1 = 5, \quad y = 3, \quad Z = 999999000 = p.95238.$$

14.

Mémoire sur la convergence de la série du binome; pour faire suite à la démonstration du théorème du binôme, donnée tome III. de ce journal, cahier 3., page 305.

(Par l'éditeur.)

Nous avons présenté à l'endroit cité une démonstration du théorème du binome, fondée uniquement sur une équation identique, exécutée seulement au moyen de transformations algébriques, et indépendante de toute supposition arbitraire. Elle semble ne rien laisser à désirer pour la généralité et la rigueur. Mais ce développement ayant été borné à présenter la forme générale de la série et l'expression identique du reste complémentaire, il s'agit encore de la convergence de la série. Elle sera l'objet de ce qui suit.

Nous reprendrons l'expression du développement du binome sous la forme (15. tome III. page 307.), savoir:

$$1.\quad (1+a)^k = 1^k(1+k_1 a+k_2 a^2+k_3 a^3 \ldots . + k_n a^n) \\ + k_n(k-n)\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=a)+k}-(1+a)^{x(=0)}1^k}{k}\right),$$

$k_1, k_2, k_3 \ldots . k_n$ étant les coëfficiens binomiaux

$$2.\quad \begin{cases} k_1 = k,\quad k_2 = \dfrac{k.(k-1)}{2},\quad k_3 = \dfrac{k(k-1)(k-2)}{2.3}\ \ldots . \\ k_n = \dfrac{k(k-1)(k-2)\ldots .(k-(n-1))}{2.3\ldots .n}. \end{cases}$$

Si l'on veut sousentendre les racines correspondantes de deux côtés de l'équation, on peut supprimer le facteur 1^k, et l'on aura simplement:

$$3.\quad (1+a)^k = 1+k_1 a+k_2 a^2+k_3 a^3 \ldots . + k_n a^n \\ + k_n(k-n)\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right).$$

Ici la quantité

$$\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right)$$

signifie la n^{me} différence des $n+1$ quantités

4. $\frac{(1+a)^k-1}{k}$, $\frac{(1+a)^k-(1+a)}{k-1}$, $\frac{(1+a)^k-(1+a)^2}{k-2}$ .... $\frac{(1+a)^k-(1+a)^n}{k-n}$

et si l'on veut désigner le reste qui suit le $n+1^{\text{me}}$ terme de la série, savoir

$$5.\quad k_n(k-n)\Delta^n\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k},$$

par R_n, on peut écrire

$$6.\quad (1+a)^k = 1+k_1a+k_2a^2+k_3a^3+\ldots\ldots+k_na^n+R_n.$$

Nous nous bornerons aux cas où l'exposant k et la base $=1+a$ sont réels.

Pour juger de la convergence de la série dans ces cas, nous emploierons la méthode de d'Alembert, savoir de chercher deux séries dont la convergence puisse être démontrée et dont l'une ait tous les termes plus grands, l'autre plus petits que la série donnée.

2.

Généralement il y a quatre cas. L'exposant k et la partie a de la base peuvent être positifs ou négatifs. Si k est positif, les signes des coëfficiens k_1, k_2, k_3 .... alternent dès le m^{me} coëfficient, m étant le premier nombre entier plus grand que k. Si k est négatif, les coëfficiens k_1, k_2, k_3 .... sont alternativement positifs et négatifs dès le premier terme. Donc les signes des coëfficiens binomiaux alternent dans tous les cas, au moins à partir d'une certaine limite. Il suit de là que si a est positif, les termes de la série du binôme sont alternativement positifs et négatifs dans tous les cas, au moins à commencer d'une certaine limite, et si a est négatif, ils ont tous leurs signes égaux, également au moins à partir d'une certaine limite, qui, tant que l'exposant k n'est pas infini, n'est jamais éloignée du commencement de la série que d'un nombre fini de termes. Donc il n'y a que deux cas à considérer, savoir a positif ou a négatif. Dans le premier cas on peut toujours supposer alternatifs les signes des termes de la série et dans le second cas égaux.

3.

Soit a négatif et $k_na^n=\tau_n$ un terme quelconque de ceux dont les signes sont égaux, la série, à partir du terme τ_n, que nous prendrons pour le reste R_n (6.), pourra être exprimée par

$$7.\quad R_n=\tau_n\left(1+a\frac{k-n}{n+1}+a^2\frac{(k-n)(k-n-1)}{(n+1)(n+2)}+a^3\frac{(k-n)(k-n-1)(k-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\ldots\right)$$

ou bien, si l'on fait

$$8.\quad a=-b,$$

où b est positif, par

$$9.\quad R_n = \tau_n\Big[1+b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)+b^2\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)$$
$$+b^3\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\dots\Big].$$

Puisque n a été supposé plus grand que $\pm k$, $k+1$ est toujours plus petit que $n+1$.

Si k est plus grand que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont positives et plus petites que $+1$, et la première fraction $\frac{k+1}{n+1}$ est plus grande que toutes les autres; donc tous les facteurs b, b^2, b^3, ... sont plus petits que 1, et le premier facteur $1-\frac{k+1}{n+1}$ est plus petit que tous les autres; donc la somme de la série R_n (9.) est plus petite que la somme

$$10.\quad s_2 = \tau_n(1+b+b^2+b^3\dots)$$

et plus grande que la somme

$$11.\quad s_3 = \tau_n\left[1+b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)+b^2\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2+b^3\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^3\dots\right].$$

Si k est plus petit que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont négatives et plus grandes que -1, et la première fraction $\frac{k+1}{n+1}$ est plus petite que toutes les autres; donc tous les facteurs de b, b^2, b^3, ... sont plus grands que $+1$, et le premier facteur $1-\frac{k+1}{n+1}$ est plus grand que tous les autres; donc la somme de la série R_n (9.) est plus grande que la somme de la série (10.) et plus petite que la somme de (11.).

Donc R_n est toujours compris entre s_2 et s_3 quel que soit k, positif ou négatif.

Mais les sommes s_2 et s_3 des séries (10. et 11.) peuvent être exprimées par

$$12.\quad s = \tau_n.\frac{1}{1-b} \quad\text{et}\quad s_3 = \tau_n\frac{1}{1-b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)},$$

et si l'on développe ces expressions par la division, on trouve que les valeurs de leurs restes, à partir du m^{me} terme, sont:

$$13.\quad \tau_n.\frac{b^m}{1-b} \quad\text{et}\quad \tau_n.\frac{b^m\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^m}{1-b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)},$$

de manière que les valeurs **exactes** des séries (10. et 11.) peuvent être exprimées par

14. $s_2 = \tau_n\left(1+b+b^2+b^3\ldots+\frac{b^m}{1-b}\right)$,

15. $s_3 = \tau_n\left(1+b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)+b^2\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2\ldots+\frac{b^m\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^m}{1-b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)}\right)$.

Si l'on veut que ces expressions donnent des limites finies de la valeur de la série pour R_n, qui, comme on l'a vu, est toujours comprise entre celles de s_2 et s_3, il faut que les séries (14. et 15.) soient convergentes, c'est à dire que leurs restes $\frac{b^m}{1-b}$ et $\frac{b^m\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^m}{1-b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)}$ soient zéro pour $m=\infty$. Cela n'a pas lieu, à moins que b ne soit respectivement compris entre 0 et 1 et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}$, savoir entre 0 et 1 si $k>-1$ et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k-1}{n+1}}$, si $k<-1$.

Si b est renfermé dans ces limites, les séries s_2 et s_3 (14. et 15.) seront convergentes, et la somme de la série R_n (9.) qui est **toujours** comprise entre s_2 et s_3 (12.), sera renfermée entre les limites

$$16.\quad \frac{\tau_n}{1-b} \text{ et } \frac{\tau_n}{1-b\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)},$$

où ce qui est la même chose, si $a=-b$ est compris entre 0 et -1, k étant >-1, ou entre 0 et $\frac{1}{\frac{k+1}{n+1}-1}$, k étant <-1, la somme de la série R_n (7.) sera comprise entre les limites

$$17.\quad \frac{\tau_n}{1+a} \text{ et } \frac{\tau_n}{1+a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)}.$$

Si l'on fait $n=\infty$, les limites (17.) et celles de a qui sont les conditions de la convergence des séries s_2 et s_3 coïncident.

Les dernières sont 0 et -1 pour un k quelconque et les limites (17.) rentrent toutes les deux dans $\frac{\tau_n}{1+a}$. Donc si a est négatif et

compris entre 0 et -1, la valeur du reste R_n de la série du binome est

$$18. \quad R_n = \frac{\tau_n}{1+a} \text{ pour } n = \infty.$$

Maintenant pour juger de la convergence de la série du binôme, il s'agit de savoir si $\frac{\tau_n}{1+a}$ est nul pour $n = \infty$.

Le terme τ_n, comme le fait voir l'expression (9.), n'est autre chose que

$$19. \quad \tau_n = \tau_m \left[b^\mu \left(1 - \frac{k+1}{m+1}\right)\left(1 - \frac{k+1}{m+2}\right)\left(1 - \frac{k+1}{m+3}\right) \ldots \text{ à l'infini} \right];$$

où m est arbitraire et $\mu = \infty$ et cette valeur de τ_n est toujours renfermée entre

$$20. \quad \tau_m b^\mu \text{ et } \tau_m b^\mu \left(1 - \frac{k+1}{m+1}\right)^\mu,$$

pour un k quelconque. Si $k > -1$, ces limites sont évidemment zéro toutes les deux, b étant supposé entre 0 et 1. Donc τ_n est nécessairement nul pour $n = \infty$, si $k > -1$. Si k est < -1, la seconde limite se présente sous la forme $\tau_m . 0 . \infty$. Donc les limites ne donnent pas la valeur de τ_∞ dans ce cas. Pour la trouver, reprenons l'expression $k_n b^n$ du terme τ_n, et supposons $b = \frac{1}{c}$, où c est plus grand que $+1$, puisque b doit être entre 0 et $+1$. Cette expression de τ_n, k étant supposé négatif, savoir < -1, pourra être présentée sous la forme:

$$21. \quad \tau_n = \pm \frac{k(k+1)(k+2) \ldots (k+\nu-2)}{c . 2c . 3c \ldots (\nu-1)c} \cdot \frac{(k+\nu-1)(k+\nu)(k+\nu+1) \ldots (k+n-1)}{\nu c . (\nu+1)c . (\nu+2)c \ldots nc} = P . Q,$$

où maintenant k est regardé comme positif et > 1. Donnons à ν une valeur telle que $\nu c > k + \nu - 1$, par exemple $\nu c = k + \nu - 1 + \varepsilon$ où ε est positif, ce qui est toujours possible, car il n'y a qu'à faire

$$22. \quad \nu = \frac{k-1+\varepsilon}{c-1},$$

où $\frac{k-1+\varepsilon}{c-1}$ sera toujours un nombre positif et fini, k et c étant > 1 et ε positif. Cela posé

$$23. \quad P = \frac{k(k+1)(k+2) \ldots (k+\nu-2)}{c . 2c . 3c \ldots (\nu-1)c}$$

sera toujours une quantité finie. L'autre facteur Q, si pour abréger l'on fait $k + \nu - 1 = \varkappa$, prendra la forme:

$$24. \quad Q = \frac{\varkappa}{\varkappa+\varepsilon} \cdot \frac{\varkappa+1}{\varkappa+\varepsilon+c} \cdot \frac{\varkappa+2}{\varkappa+\varepsilon+2c} \cdots \frac{\varkappa+n-\nu}{\varkappa+\varepsilon+(n-\nu)c}.$$

Dans cette expression tous les facteurs sans exception sont < 1, puis-

que $\varkappa$ et ε sont positifs et $c > 1$. Donc si l'on désigne par $\frac{1}{p}$ le plus grand des facteurs, Q sera moindre que $\left(\frac{1}{p}\right)^{n-\nu}$. Mais p étant >1, $\left(\frac{1}{p}\right)^{n-\nu}$ sera déja nul pour $n=\infty$, donc à plus forte raison Q sera nul dans ce cas. Donc τ_∞ est aussi zéro dans le cas $k<-1$, a étant entre 0 et -1.

La valeur de τ_∞ étant nulle dans tous les cas, et la valeur du reste R_n de la série du binôme dans l'infini, c'est à dire du reste R_∞, étant $\frac{\tau_\infty}{1+a}$ (18.), on voit, en nous résumant, que cette série sera toujours convergente quel que soit k, si a est compris entre les limites 0 et -1. La convergence ne cesse que dès $a=-1$, en allant aux valeurs négatives. Si k est >-1 et a entre 0 et -1, et également si $k<-1$ et a entre 0 et $\dfrac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n-k}$ la valeur de la série du binôme, à partir du terme $k_n a^n$, sera comprise entre les limites

$$25.\quad \frac{k_n a^n}{1+a} \text{ et } \frac{k_n a^n}{1+a.\frac{n-k}{n+1}}.$$

4.

Soit a positif et $k_n a^n = \tau_n$ un terme quelconque de ceux dont les signes sont alternativement positifs et négatifs, la série, à partir du terme τ_n, c'est à dire la valeur du reste R_n pourra être exprimée comme ci-dessus (7. et 9.) par

$$26.\quad R_n = \tau_n\Big[1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)+a^2\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)$$
$$-a^3\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)$$
$$+a^4\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+4}\right)$$
$$-a^5\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+3}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+4}\right)\left(1-\frac{k+1}{n+5}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big],$$

ou bien, si l'on prend les termes par couples:

$$27.\quad R_n = \tau_n\Big[1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)$$
$$+\Big(1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big)a^2$$
$$+\Big(1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+2}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)\Big(1-\frac{k+1}{n+4}\Big)a^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\Big],$$

Puisque n a été supposé plus grand que $\pm k$, $k+1$ est toujours plus petit que $n+1$.

Si k est plus grand que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont positives et

$$28.\quad \frac{k+1}{n+1}>\frac{k+1}{n+2}>\frac{k+1}{n+3}\ldots\ldots<1,$$

$$29.\quad 1-\frac{k+1}{n+1}<1-\frac{k+1}{n+2}<1-\frac{k+1}{n+3}\ldots<1,$$

$$30.\quad 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)>1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)>1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\ldots.>1-a.$$

Donc R_n (36.) est plus petit que la somme de la série

$$31.\quad s_2=\tau_n\Big[1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)\Big][1+a^2+a^4+a^6\ldots.]$$

et plus grand que la série

$$s_3=\tau_n\Big[1-a+a\frac{k+1}{n+1}+(1-a)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^2a^2+(1-a)\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^4a^4\ldots.\Big]$$

savoir

$$32.\quad s_3=\tau_n a\frac{k+1}{n+1}+\tau_n(1-a)\Big[1+\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^2a^2+\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^4a^4\ldots.\Big].$$

Si k est plus petit que -1, toutes les fractions $\frac{k+1}{n+1}$, $\frac{k+1}{n+2}$, $\frac{k+1}{n+3}$, ... sont négatives et

$$33.\quad \frac{k+1}{n+1}<\frac{k+1}{n+2}<\frac{k+1}{n+1}\ldots.>-1,$$

$$34.\quad 1-\frac{k+1}{n+1}>1-\frac{k+1}{n+2}>1-\frac{k+1}{n+3}\ldots.>1,$$

$$35.\quad 1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)<1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+3}\Big)<1-a\Big(1-\frac{k+1}{n+5}\Big)\ldots.<1-a.$$

Donc R_n (27.) est plus grand que la somme de la série (31.) et plus petit que la somme de (32.).

Donc R_n est toujours compris entre s_2 et s_3 quel que soit k, positif ou négatif.

Mais les sommes s_2 et s_3 des séries (31. et 32.) peuvent être exprimées par

$$36.\quad s_2 = \frac{\tau_n\left[1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\right]}{1-a^2} = \tau_n\frac{1-a\frac{n-k}{n+1}}{1-a^2},$$

$$37.\quad s_3 = \tau_n\left(a\cdot\frac{k+1}{n+1}+\frac{1-a}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right) = \tau_n\left(\frac{1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)-\frac{k+1}{n+1}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^3}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right)$$

$$= \tau_n\frac{1-a\frac{n-k}{n+1}-\frac{k+1}{n+1}\cdot\left(\frac{n-k}{n+1}\right)^2 a^3}{1-\left(\frac{n+k}{n+1}a\right)^2} = \tau_n\frac{1-a\frac{n-k}{n+1}\left(1-\frac{k+1}{n+1}\cdot\frac{n-k}{n+1}\cdot a^2\right)}{1-\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^2 a^2}$$

et si l'on développe ces expressions par la division, on trouve que les valeurs de leurs restes, à partir des m^{mes} termes, sont:

$$38.\quad \frac{\tau_n\left(1-a\frac{n-k}{n+1}\right)a^{2m}}{1-a^2} \quad \text{et}$$

$$39.\quad \frac{\tau_n(1-a)\left(\frac{n-k}{n+1}a\right)^{2m}}{1-\left(\frac{n-k}{n+1}a\right)^2},$$

de sorte que les valeurs exactes des séries (40. et 41.) peuvent être exprimées par

$$40.\quad s_2 = \tau_n\left[1-a\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)\right]\left[1+a^2+a^4+a^6+\ldots+\frac{a^{2m}}{1-a^2}\right] \quad \text{et}$$

$$41.\quad s_3 =$$

$$\tau_n a\frac{k+1}{n+1}+\tau_n(1-a)\left(1+\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2+\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^4 a^4\ldots+\frac{\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^{2m} a^{2m}}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}\right).$$

Si l'on veut que ces expressions donnent des limites finies de la valeur de R_n qui, comme on l'a vu, est toujours comprise entre s_2 et s_3 il faut que les séries s_2 et s_3 soient convergentes, c'est à dire que leurs restes $\frac{a^{2m}}{1-a^2}$ et $\frac{\left[\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)a\right]^{2m}}{1-\left(1-\frac{k+1}{n+1}\right)^2 a^2}$ soient zéro pour $m=\infty$. Cela n'a pas lieu, à moins que a ne soit respectivement compris entre 0 et 1 et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}$, savoir entre 0 et 1, si $k>-1$, et entre 0 et $\frac{1}{1-\frac{k+1}{n+1}}$, si $k<-1$. Si a est renfermé dans ces limites, les séries s_2 et s_3 (31. et 32.) seront convergen-

tes, et la somme de la série R_n (27.) puisqu'elle est toujours comprise entre s_2 et s_3, sera renfermée entre les limites (36. et 37.).

Si l'on fait $n=\infty$, les limites (36. et 37.) de R_n et celles de a, qui sont les conditions de la convergence des séries s_2 et s_3, coïncident. Les dernières sont 0 et 1 pour un k quelconque, et les limites (36. et 37.) rentrent toutes les deux dans

$$42. \quad \tau_n.\frac{1-a}{1-a^2}=\tau_n(1+a).$$

Donc si a est positif et compris entre 0 et $+1$, la valeur du reste R_n de la série du binôme est

$$43. \quad R_n=\tau_n(1+a) \text{ pour } n=\infty.$$

Mais nous avons vu plus haut que τ_n est toujours nul pour $n=\infty$; donc le reste R_n est également nul dans tous les cas. Donc la série du binôme sera toujours convergente, quel que soit k, si a est compris entre les limites 0 et $+1$. La convergence ne cesse que dès $a=+1$, en allant aux valeurs positives. Si k est >-1 et a entre 0 et $+1$, et également si $k<-1$, et a entre 0 et $\dfrac{1}{1-\dfrac{k+1}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n-k}$, la valeur de la série du binôme, à partir du terme $k_n a^n$, est comprise entre les limites:

$$44. \quad k_n a^n.\frac{1-a.\dfrac{n-k}{n+1}}{1-a^2} \text{ et } k_n a^n.\frac{1-a.\dfrac{n-k}{n+1}\left(1-\dfrac{k+1}{n+1}.\dfrac{n-k}{n+1}.a^2\right)}{1-\left(\dfrac{n+k}{n+1}\right)^2 a^2}.$$

5.

Les cas de $a=-1$ et $a=+1$ méritent une attention particulière, puisque dans ces cas les séries s_2 et s_3, qu'on a choisies pour servir de limites de la série du binôme, cessent d'être convergentes et que par conséquent les expressions (25. et 44.) ne donnent plus des limites finies pour la série du binôme, à partir d'un terme quelconque $k_n a^n$.

Nous remarquerons d'abord que, quoique les séries s_2 et s_3 ne soient plus convergentes dans le cas actuel, la valeur de la série du binôme sera néanmoins toujours comprise entre leurs valeurs respectives, et puisque s_2 et s_3 coïncident toujours pour $n=\infty$, l'expression de R_∞ sera encore la même comme ci-dessus (18. et 43.), savoir:

$$45. \quad R_\infty=\frac{\tau_\infty}{1+a}=\frac{\tau_\infty}{0}, \text{ si } a=-1, \text{ et}$$

$$46. \quad R_\infty=\tau_\infty(1+a)=2\tau_\infty, \text{ si } a=+1.$$

Mais ce qui a été dit plus haut de la valeur de τ_∞ n'est plus applicable aux cas actuels, puisque par exemple dans la formule (21.) c n'est plus >1, condition nécessaire du résultat ci-dessus. Il faut donc recourir à l'expression générale de τ_n. Elle est dans les cas actuels de $a=\pm 1$.

$$47.\quad \tau_n = \pm\frac{k(k-1)(k-2)\ldots\ldots k-(n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Cette expression donne pour $n=\infty$, comme l'on sait,

$$48.\quad \tau_n = 0, \text{ si } k>-1, \qquad 49.\quad \tau_n=\infty, \text{ si } k<-1,$$

Donc si $a=-1$, on a en vertu de (45.):

$$50.\quad R_\infty = \tfrac{0}{0}, \text{ pour } k>-1 \text{ et } R_\infty=\infty, \text{ pour } k<-1,$$

et si $a=+1$, on a, suivant (46.)

$$51.\quad R_\infty = 0, \text{ pour } k>-1 \text{ et } R_\infty=\infty, \text{ pour } k<-1.$$

Donc la série

$$52.\quad (1+a)^k = 1+k_1a+k_2a^2+k_3a^3\ldots\ldots$$

est divergente si $a=-1$ et $a=+1$, k étant <-1, et convergente si $a=+1$ et $k>-1$. Si $a=-1$ et $k>-1$, le problème de la convergence de la série (52.) est indéterminé et ne peut être resolu à moins qu'on ne connoisse la loi suivant laquelle $1+a$ converge vers la limite 0.

Les résultats que nous venous de trouver diffèrent comme on voit en plusieurs points de ceux qu'on donne ordinairement, surtout en ce qui regarde l'application de la méthode des séries-limites au cas où la partie a de la base $1+a$ est positive, et les limites entre lesquelles a doit être compris, s'il existe des limites finies du reste. Cette différence des résultats semble mériter l'attention, d'autant plus que l'objet du problème entre dans les élémens.

En appliquant, comme nous venons de le faire, la méthode de d'Alembert à la recherche de la convergence de la série du binôme, l'expression générale du reste du binôme $k_n.k-n.\Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k}-(1+a)^{x(=0)}}{k}\right)$, n'est pas entrée en calcul. A l'occasion nous reviendrons à notre problème, en opérant directement sur cette expression identique. Cela se fera par l'application de la méthode générale d'évaluer les restes des séries développées suivant les différences au lieu des différentielles, méthode que j'ai présentée dans un mémoire lu à l'Académie des sciences de Berlin en Janvier 1828. Elle s'applique au théorème général de Taylor d'une manière semblable à celle qu'a donnée Mr. Lagrange pour l'évaluation des restes de la série particulière de Taylor et qui a été perfectionnée par Mr. Ampère.

15.

Recherches sur les expressions des puissances des cosinus et sinus en cosinus et sinus des arcs multiples, et sur les expressions réciproques.

(Par l'éditeur.)

Dépuis quelques années on a beaucoup discuté les développements des puissances des fonctions angulaires à exposans quelconques et des cosinus et sinus des arcs multiples. Néanmoins cette matière ne semble pas encore avoir été mise dans tout son jour. Car, d'un côté les résultats auxquels on est parvenu ne s'accordent pas parfaitement entre eux, et de l'autre côté, les recherches par lesquelles on a peut-être le mieux approfondi le problème, ne jouissent pas partout de cette clarté et de cette élégante simplicité qui est le caractère essentiel de la vérité. Le problème n'étant donc pas épuisé, j'éspère qu'on ne me blâmera de le reprendre ici. Je vais offrir ce que j'ai trouvé en discutant de nouveau cet objet.

I. Expressions des puissances des cosinus et sinus en cosinns et sinus des arcs multiples.

1.

Puisque $(\cos x \pm i \sin x)(\cos x \mp i \sin x) = 1$, i étant $\sqrt{-1}$, on peut écrire $\frac{1}{\cos x \pm i \sin x}$ au lieu de $\cos x \mp i \sin x$, et par suite $\cos x \pm i \sin x + \frac{1}{\cos x \pm i \sin x}$ au lieu de $2\cos x$. Donc on a:

$$(2\cos x)^m = \left(\cos x \pm i \sin x + \frac{1}{\cos x \pm i \sin x}\right)^m,$$

et en vertu du théorème du binome

$$(2\cos x)^m = (\cos x \pm i \sin x)^m + m_1 (\cos x \pm i \sin x)^{m-2} + m_2 (\cos x \pm i \sin x)^{m-4} \ldots;$$

en désignant les coëfficiens binomiaux par m_1, m_2, m_3, ... Mais $(\cos x \pm i \sin x)^m$ étant égal à $\cos mx \pm i \sin mx$, on a

$$\begin{aligned}(2\cos x)^m = {} & \cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots \\ & \pm i(\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots)\end{aligned}$$

et $\cos(x+2\dot{n}\pi)$, où $\dot{n}$ est un nombre entier quelconque*), étant égal à $\cos x$, l'expression générale et complète de $(2\cos x)^m$ sera

$$1.\quad (2\cos x)^m = \cos m(x+2\dot{n}\pi)+m_1\cos(m-2)(x+2\dot{n}\pi)+m_2\cos(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\dots$$
$$\pm i[\sin m(x+2\dot{n}\pi)+m_1\sin(m-2)(x+2\dot{n}\pi)+m_2\sin(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\dots].$$

Pour abréger nous indiquerons la première ligne à droite par $S\cos m(x+2\dot{n}\pi)$ et la seconde ligne par $iS\sin m(x+2\dot{n}\pi)$. On écriroit pour une autre valeur de n, par exemple $\dot{\mu}$, $S\cos m(x+2\dot{\mu}\pi)$ et $iS\sin m(x+2\dot{\mu}\pi)$, et pour $\dot{n}=0$, $S\cos mx$ et $iS\sin mx$. De cette sorte on aura

$$2.\quad (2\cos x)^m = S\cos(m+2\dot{n}\pi) \pm iS\sin m(x+2\dot{n}\pi).$$

Les formules (1. et 2.) représentent, comme on sait, toutes les valeurs différentes que $(2\cos x)^m$ peut avoir. Il s'agit maintenant de réduire et de simplifier les expressions autant qu'il sera possible, et de trouver les valeurs particulières, toutes réelles et toutes imaginaires de $(2\cos x)^m$, s'il y en a.

2.

Nous nous bornerons aux cas où m et x sont réels. Il est vrai que les expressions ci-dessus ont également lieu si même x et m étoient de la forme générale $p+qi$, mais nous laisserons ces cas de côté.

L'exposant m peut être ou positif ou négatif, mais on peut le supposer toujours positif. Car si m étoit négatif, par ex. $m=-\mu$, il n'y auroit qu'à développer $\frac{1}{(2\cos x)^\mu}$, où l'exposant μ est positif.

La base $2\cos x$ de la puissance $(2\cos x)^m$ peut être également positive ou négative, suivant que l'arc x tombe entre $(2\dot{\tau}-\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$, ou entre $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{3}{2})\pi$, mais on peut toujours réduire le cas où $2\cos x$ est négatif à celui où cette quantité est positive. Car si x est un arc dont le cosinus est négatif, $x-\pi$ sera un arc dont il est positif et de la même grandeur. Donc on a pour ce cas $2\cos x=-2\cos(x-\pi)$ et par suite

$$3.\quad (2\cos x)^m = (-1)^m(2\cos(x-\pi))^m.$$

---

*) Toutes les fois qu'un point sera mis au dessus d'une lettre, ce sera pour indiquer que cette lettre doit exprimer un nombre entier quelconque. Par exemple $\dot{n}$, $\dot{\mu}$, $\dot{p}$, ... exprimeront des nombres entiers quelconques. Cette notation très simple, si elle était généralement adoptée, épargneroit beaucoup de mots et perfectionneroit l'art d'écrire algébriquement.

Donc on pourra appliquer immédiatement l'expression des puissances m des cosinus positifs aux puissances des cosinus négatifs, en écrivant seulement $x-\pi$ au lieu de x et multipliant par $(-1)^m$.

Un arc quelconque x et un autre, moindre ou plus grand d'un nombre pair quelconque $2\dot{\tau}$ de circonférences, ayant toujours précisément le même cosinus et le même sinus, on pourra toujours, si x est un arc plus grand que ceux qui sont compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, lui substituer un de ces derniers, sans diminuer la généralité des formules.

En dernier lieu, si x désigne un arc compris entre $-\pi$ et 0, l'arc $x+\frac{1}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc l'expression de $(2\cos x)^m$ pour tout arc entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, s'appliquera sur le champ à celle de $(2\sin x)^m$ pour tout arc entre $-\pi$ et 0, c'est-à-dire dont le sinus est négatif, si l'on y écrit seulement $x+\frac{1}{2}\pi$ au lieu de x et qu'on multiplie par $(-1)^m$. De la même manière si x est un arc compris entre 0 et π, l'arc $x-\frac{1}{2}\pi$ tombera entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc pour avoir l'expression de $(2\sin x)^m$ pour les arcs entre 0 et π, c'est-à-dire pour ceux, dont les sinus sont positifs, il n'y a qu'à écrire $x-\frac{1}{2}\pi$ au lieu de x dans la formule qui donne $(2\cos x)^m$ pour les arcs entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, ou dont les cosinus sont positifs.

Il suit de là, que toute la recherche des puissances des cosinus et sinus pour un exposant et un arc quelconque réels, peut être réduite à celle de $(2\cos x)^m$ pour un m positif et pour un x compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Donc tout ce qui va suivre sera soumis à cette restriction.

3.

Soit $\dot{n}=\dot{\mu}+\dot{\nu}$, on a

$$\cos m(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin m(x+2\dot{n}\pi)=$$
$$[\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)]\,[\cos 2\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2m\dot{\mu}\pi],$$
$$\cos(m-2)(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin(m-2)(x+2\dot{n}\pi)=$$
$$[\cos(m-2)(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin(m-2)(x+2\dot{\nu}\pi)]\,[\cos 2(m-2)\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2(m-2)\dot{\mu}\pi],$$
$$\cos(m-4)(x+2\dot{n}\pi)\pm i\sin(m-4)(x+2\dot{n}\pi)=$$
$$[\cos(m-4)(x+2\dot{\nu}\pi)\pm i\sin(m-4)(x+2\dot{\nu}\pi)]\,[\cos 2(m-4)\dot{\mu}\pi\pm i\sin 2(m-4)\dot{\mu}\pi]$$

etc.; et puisque

$$\cos 2m\dot{\mu}\pi=\cos 2(m-2)\dot{\mu}\pi=\cos 2(m-4)\dot{\mu}\pi\ldots\text{ et}$$
$$\sin 2m\dot{\mu}\pi=\sin 2(m-2)\dot{\mu}\pi=\sin 2(m-4)\dot{\mu}\pi\ldots,$$

cela donne

4. $(2\cos x)^m = (\cos 2m\dot{\mu}\pi \pm i\sin 2m\dot{\mu}\pi)\,[S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) \pm iS\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)]$.

D'un autre côté si dans la formule (1.) on fait $x=0$, on trouve

$$(+2)^m = \cos 2m\dot{n}\pi(1+m_1+m_2\ldots\ldots) \pm i\sin 2m\dot{n}\pi(1+m_1+m_2\ldots\ldots).$$

Mais $1+m_1+m_2\ldots\ldots = 2^m$, donc

$$5.\quad (+1)^m = \cos 2m\dot{n}\pi + i\sin 2m\dot{n}\pi.$$

Cela fait voir que le premier facteur à droite dans (4.) peut être représenté par $(+1)^m$ parceque $\dot{n}$ et $\dot{\mu}$ sont arbitraires tous les deux. Donc on aura

$$6.\quad (2\cos x)^m = (+1)^m\,[S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) \pm iS\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)].$$

4.

Cela posé, nous remarquerons que toute puissance a^m, dont l'exposant m et la base a sont réels et positifs, peut être présentée sous la forme

$$7.\quad a^m = (+1)^m |a|^m,$$

où $|a|^m$ désigne une valeur réelle unique et absolue. Cette expression représente toutes les valeurs que a^m peut avoir. Mais elle n'est pas la seule qui peut représenter a^m. On peut exprimer cette puissance également par

$$8.\quad a^m = (+1)^m(p+qi).$$

Voyons en quoi consiste la différence des deux expressions (7. et 8.). Les valeurs différentes de $(+1)^m$ ont, comme on sait et comme le fait voir l'expression (5.), la propriété que, l'une quelconque d'entre elles étant désignée par α, les autres sont α^2, α^3, α^4 .... 1, α, α^2 .... Donc en multipliant $(+1)^m$ par une puissance quelconque entière de α, on reproduira toujours toutes les valeurs de cette quantité. C'est le cas de la formule (8.). Dans cette formule la quantité $|a|^m$ de l'expression (7.) est multiplié par une puissance entière quelconque de α. C'est pourquoi le facteur de $|a|^m$ y paroit sous la forme $p \pm qi$. En effet cette quantité n'est autre chose que

$$9.\quad p \pm qi = |a|^m.(+1)^{\dot{\lambda}}.$$

Mais il y a une autre différence entre les deux expressions (7. et 8.). La quantité $(+1)^m$ peut avoir toujours une valeur toute réelle, car $\dot{n}$ dans (5.) peut être égal à zéro, et si m est tel que $2m\dot{n}$ puisse être $= \frac{2\dot{\varkappa}+1}{2}$, elle peut aussi avoir deux valeurs toutes imaginaires. Maintenant en

vertu de $a^m = (+1)^m |a|^m$, la puissance a^m doit avoir également des valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires, puisque $|a|^m$ est réel; et ces valeurs particulières doivent être exprimées également par les deux formules (7. et 8.). La différence de ces formules est, que dans (8.) les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ ne seront pas nécessairement combinées avec des valeurs semblables de $p \pm qi$; les valeurs particulières de $(+1)^m$ seront plutôt combinées avec des valeurs de $p \pm qi$ de cette dernière forme, et il faudra des valeurs de $(+1)^m$ de la forme $P \pm Qi$, combinées avec des valeurs de $p \pm qi$ de cette forme, pour donner les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de a^m. En effet, l'expression (8.) n'étant autre chose que

$$10. \quad a^m = (+1)^m (|a|^m . \alpha^{\dot{\lambda}}),$$

on voit que la valeur α^0 de $(+1)^m$ qui est toute réelle ne peut donner la valeur toute réelle de a^m. Elle en donne la valeur $\alpha^{\dot{\lambda}} |a|^m$ qui est de la forme $p + qi$. Ce n'est que la valeur $\alpha^{-\dot{\lambda}}$ de $(+1)^m$, qui produit la valeur particulière, et cette valeur $\alpha^{-\dot{\lambda}}$ est elle même de la forme $p + qi$. Dans la formule (7.) au contraire les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ donnent aussi nécessairement celles de a^m de cette forme.

5.

La formule (6.) présente la puissance $(2\cos x)^m$ sous la forme (8.), et c'est évidemment le nombre arbitraire $\dot{\nu}$ qui produit la multiplicité des valeurs du second facteur à droite. Si donc on veut connoître les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(2\cos x)^m$ et notamment les tirer de celles de $(+1)^m$, il faut chercher à réduire la forme de l'expression (6.) à celle de (7.), c'est-à-dire, il faut soumettre l'expression (6.) à la condition que les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ doivent comporter les valeurs semblables de $(2\cos x)^m$.

En vertu de cette condition on aura

$$11. \quad S \sin m(x + 2\dot{\nu}\pi) = 0,$$

car si $iS \sin m(x + 2\dot{\nu}\pi)$ n'étoit pas zéro, cette quantité se combineroit avec les valeurs toutes réelles ou toutes imaginaires de $(+1)^m$ et produiroit une partie imaginaire dans le premier et une partie réelle dans le second cas, qui, suivant l'hypothèse, ne doivent point exister.

L'expression de $(2\cos x)^m$ (6.) se réduit donc à

$$12. \quad (2\cos x)^m = (+1)^m S \cos m(x + 2\dot{\nu}\pi).$$

6.

Maintenant il s'agit de chercher la valeur du nombre arbitraire $\dot{\nu}$ pour laquelle la quantité $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)$ peut être zéro. Cette valeur de $\dot{\nu}$ donnera ensuite celle qui convient au facteur $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$ (12.).

En développant les deux quantités $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi)$ et $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$, on trouve:

13. $S\sin m(x+2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi\, S\sin mx + \sin 2m\dot{\nu}\pi\, S\cos mx$ etc.,

14. $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi\, S\cos mx - \sin 2m\dot{\nu}\pi\, S\sin mx$.

Puisque la première de ces quantités doit être nulle, on tire de l'équation (13.)

15. $\tang 2m\dot{\nu}\pi = -\frac{S\sin mx}{S\cos mx} = -\frac{\sin mx + m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x \ldots}{\cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x \ldots}$.

Dans cette équation la quantité $\tang 2m\dot{\nu}\pi$ à gauche est d i s c o n t i n u e, puisque $\dot{\nu}$ ne peut être qu'un n o m b r e e n t i e r. Elle ne peut varier que par intervalles. Au contraire la quantité $-\frac{S\sin mx}{S\cos mx}$ à droite est c o n t i n u e, et si elle varie avec x, cela ne peut se faire qu'insensiblement. Il suit de cette contradiction que la quantité à droite est i n v a r i a b l e et que parconséquent celle à gauche le doit être également, c'est-à-dire qu'une seule et même valeur de $\dot{\nu}$ doit convenir également à toutes les valeurs différentes de x, ou qu'au moins $\dot{\nu}$ ne peut avoir d'autres valeurs que celles qui donnent une seule ou même valeur à $\tang 2m\dot{\nu}\pi$, ou ce qui est la même chose, à $\sec 2m\dot{\nu}\pi$ ou bien à $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$.

On tirera la même conclusion de l'équation (12.). Dans cette équation la quantité $(2\cos x)^m$ à gauche est c o n t i n u e et celle $S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi)$ est en partie d i s c o n t i n u e et ne varie que par intervalles, si $\dot{\nu}$ change de valeur, puisque dans ce cas $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$ ne conservent pas la même grandeur; comme le fait voir l'expression (14.).

7.

Puisque les mêmes valeurs de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$ conviennent à toutes les valeurs différentes de x, on pourra choisir indifféremment une valeur quelconque de x pour trouver celles de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$. Choisissons la valeur zéro de x, parceque nous pourrons trouver pour cette valeur celle de $\dot{\nu}$. Si l'on fait $x=0$, on a $S\sin mx = 0$ et

$S\cos mx = 1 + m_1 + m_2 + \ldots = 2^m$, donc en vertu de l'équation (14.): $S\cos(x+2\dot{\nu}\pi) = \cos 2m\dot{\nu}\pi . 2^m$, et en vertu de celle (12.):

$$(+2)^m = (+1)^m \cos 2m\dot{\nu}\pi . 2^m.$$

De là on tire

$$16.\quad \cos 2m\dot{\nu}\pi = 1.$$

C'est la valeur cherchée de $\cos m\dot{\nu}\pi$. Elle donne $\sin 2m\dot{\nu}\pi = 0$, et puis en vertu des équations (13. et 14.):

$$17.\quad 0 = S\sin mx \text{ et}$$

$$18.\quad S\cos m(x+2\dot{\nu}\pi) = S\cos mx.$$

8.

En introduisant l'expression (18.) dans celle (12.), on aura

$$19.\quad (2\cos x)^m = (+1)^m S\cos mx,$$

c'est-à-dire

$$20.\quad (2\cos x)^m =$$
$$(\cos 2m\dot{n}\pi + i\sin 2m\dot{n}\pi)[\cos mx + m_1\cos(m-2)x + m_2\cos(m-4)x \ldots],$$

où $\dot{n}$ est un nombre entier arbitraire.

Voilà l'expression complète cherchée de $(2\cos x)^m$. Conjointement avec cette expression il subsistera toujours l'équation (17.), c'est à dire l'équation

$$21.\quad \sin mx + m_1\sin(m-2)x + m_2\sin(m-4)x \ldots = 0.$$

9.

Les équations (20. et 21.) supposent x compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Si x est compris entre $(2\dot{\tau}-\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2}\pi)$, il faut écrire $x-2\dot{\tau}$ au lieu de x dans les deux équations. Si x est compris entre $+\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{3}{2}\pi$, c'est à dire si $\cos x$ est négatif, il n'y a qu'à écrire $x-\pi$ au lieu de x et à multiplier par $(-1)^m$ comme nous l'avons fait voir (§. 2.). Donc on a pour les cosinus négatifs:

$$22.\quad (2\cos x)^m = (-1)^m[\cos m(x-\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\pi) \ldots],$$

ou bien

$$23.\quad (2\cos x)^m = (\cos 2m(\dot{n}+1)\pi \pm i\sin 2m(\dot{n}+1)\pi)$$
$$\times [\cos m(x-\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\pi) \ldots].$$

L'équation (21.) est dans ce cas

$$24.\quad \sin m(x-\pi) + m_1\sin(m-2)(x-\pi) + m_2\sin(m-4)(x-\pi) \ldots = 0.$$

Pour les puissances des sinus on aura en vertu de (§. 2.) pour les sinus positifs

$$25.\quad (2\sin x)^m =$$
$$(\cos 2m\dot{n}\pi \pm i\sin 2m\dot{n}\pi)[\cos m(x-\tfrac{1}{2}\pi) + m_1\cos(m-2)(x-\tfrac{1}{2}\pi) + m_2\cos(m-4)(x-\tfrac{1}{2}\pi) \ldots]$$

et pour les sinus négatifs:

26. $$(2\sin x)^m = (\cos 2m(\dot{n}+1)\pi \pm i\sin 2m(\dot{n}+1)\pi) \times [\cos m(x+\tfrac{1}{2}\pi) + m_1\cos(m-2)(x+\tfrac{1}{2}\pi) + m_2\cos(m-4)(x+\tfrac{1}{2}\pi)\ldots].$$

10.

En développant l'équation (21.) on trouve:

$$\left.\begin{array}{l} \sin mx + m_1\sin mx\cos 2x + m_2\sin mx\cos 4x\ldots \\ \quad - m_1\cos mx\sin 2x - m_2\cos mx\sin 4x\ldots \end{array}\right\} = 0,$$

et de là:

27. $$\operatorname{tang} mx = \frac{m_1\sin 2x + m_2\sin 4x + m_3\sin 6x\ldots}{1+m_1\cos 2x + m_2\cos 4x + m_3\cos 6x\ldots}.$$

Cette équation aura lieu pour une valeur quelconque de x, comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$.

Puisque la quantité $\sin mx + m_1\sin(m-2)x + m_2\sin(m-4)x\ldots$ est invariable et nulle, leurs différentielles le seront également. Cela donne:

28. $$\left\{\begin{array}{l} m\cos mx + m_1(m-2)\cos(m-2)x + m_2(m-4)\cos(m-4)x\ldots = 0, \\ m^2\sin mx + m_1(m-2)^2\sin(m-2)x + m_2(m-4)^2\sin(m-4)x\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et généralement:

29. $$m^{2\dot{\varepsilon}}\sin mx + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}}\sin(m-2)x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}}\sin(m-4)x\ldots = 0,$$

et

30. $$m^{2\dot{\varepsilon}+1}\cos mx + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1}\cos(m-2)x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}+1}\cos(m-4)x\ldots = 0.$$

De là on tire, en développant:

31. $$\operatorname{tang} mx = \frac{m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}}\sin 2x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}}\sin 4x + m_3(m-6)^{2\dot{\varepsilon}}\sin 6x\ldots}{m^{2\dot{\varepsilon}} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}}\cos 2x + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}}\cos 4x + m_3(m-6)^{2\dot{\varepsilon}}\cos 6x\ldots}$$

et

32. $$\operatorname{tang} mx = -\frac{m^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1}\cos 2x + m_2(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1}\cos 4x\ldots}{m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1}\sin 2x + m_2(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1}\sin 4x\ldots}.$$

L'équation (32.) donne, en supposant $x = 0$:

33. $$m^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_1(m-2)^{2\dot{\varepsilon}+1} + m_2(m-4)^{2\dot{\varepsilon}+1}\ldots = 0,$$

pour une valeur quelconque positive de m.

II. Expressions des cosinus et sinus des arcs multiples en puissances des cosinus et sinus des arcs simples.

11.

La formule

34. $$\cos mx \pm i\sin mx = (\cos x \pm i\sin x)^m$$

a lieu, comme on sait, pour un m et un x quelconques. Mais nous nous bornerons comme ci-dessus aux cas où x et m sont réels.

Puisque $\cos x = \cos(x+2\dot{n}\pi)$ et $\sin x = \sin(x+2\dot{n}\pi)$, la formule (34.) donne

35. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm \sin m(x+2\dot{n}\pi) = (\cos x \pm i \sin x)^m$,

et il s'agit de trouver les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ en puissances de $\cos x$ et $\sin x$.

12.

Nous remarquerons d'abord qu'on pourra toujours ramener les cas où $\cos x$ ou $\sin x$ est négatif à ceux où les cosinus et sinus sont positifs. Car si x est un arc dont le cosinus ou le sinus est négatif, le cosinus ou le sinus de $x-\pi$ sera positif, et on aura

36. $\cos mx = \cos m(x-\pi)\cos m\pi - \sin m(x-\pi)\sin m\pi$,

37. $\sin mx = \sin m(x-\pi)\cos m\pi + \cos m(x-\pi)\sin m\pi$,

et l'on pourra appliquer immédiatement à ces formules les expressions qu'on aura trouvées pour les cosinus et sinus positifs.

Les cas des m négatifs se réduisent sur le champ à ceux de m positifs, car $\cos -mx = \cos mx$, et $\sin -mx = -\sin mx$.

On pourra donc toujours supposer $\cos x$, $\sin x$ et m positifs.

13.

Mettons la formule (35.) sous la forme

$$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = (\cos x)^m (1 \pm i \operatorname{tang} x)^m, \text{ ou bien}$$

$$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (+1)^m (1 \pm i \operatorname{tang} x)^m:$$

puisque

$$(+1)^m = \cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi,$$

on aura

38. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (\cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi)(1 \pm i \operatorname{tg} x)^m$.

En développant le dernier facteur à droite, on trouve

39. $$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m (\cos 2m\dot{\nu}\pi \pm i \sin 2m\dot{\nu}\pi) \times \begin{bmatrix} 1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - m_6 \operatorname{tang} x^6 \dots \\ \pm i(m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 + m_5 \operatorname{tang} x^5 \dots) \end{bmatrix}$$

et en multipliant les deux derniers facteurs à droite:

40. $$\cos m(x+2\dot{n}\pi) \pm i \sin m(x+2\dot{n}\pi)$$
$$= |\cos x|^m \begin{pmatrix} \cos 2m\dot{\nu}\pi - m_1 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x - m_2 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 \\ + m_3 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \dots \\ \pm i(\sin 2m\dot{\nu}\pi + m_1 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x - m_2 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 \\ - m_3 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \dots) \end{pmatrix}$$

Puisque les parties réelles et les parties imaginaires de cette formule doivent être égales séparément, on en tire:

41. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m(\cos 2m\dot{\nu}\pi - m_1 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 + m_3 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots)$,

42. $\sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m(\sin 2m\dot{\nu}\pi + m_1 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^2 - m_3 \cos 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{\nu}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots)$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs de $\dot{\nu}$ qui conviennent à une valeur donnée de $\dot{n}$. Pour cela nous remarquerons que les formules (41. et 42.) ont été soumises à la condition que $\cos x$ soit p o s i t i f. Donc pour trouver $\dot{\nu}$, on y pourroit faire $x = 2\dot{\tau}\pi$; car en vertu de la condition établie, les valeurs de x doivent être comprises entre $(2\dot{\tau}-\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$, et d'ailleurs il est clair, que pour une valeur déterminée de $\dot{n}$, ou plutôt de $\cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{\nu}\pi$, et pour une valeur donnée de $\dot{\tau}$, il ne peut convenir qu'une seule et même valeur de $\dot{\nu}$ à tous les x compris entre $(2\dot{\tau}-\frac{1}{2})\pi$ et $(2\dot{\tau}+\frac{1}{2})\pi$; car sans cela la quantité à droite varieroit par intervalles, pendant que celle à gauche varie suivant la loi de la continuité, ce qui est impossible. Mais la valeur $2\dot{\tau}\pi$ de x ne donneroit pas explicitement la valeur correspondante de $\dot{\nu}$, comme cela est facile à voir. Il faut supposer $\dot{\tau}=0$ si l'on veut la trouver, c'est à dire $x=0$, et cela est p e r m i s, car on ne diminue pas la généralité des formules en écrivant seulement $2\dot{n}\pi$ au lieu de $2\dot{\tau}\pi+2\dot{n}\pi$. Mais il y a à remarquer qu'en supposant $x=0$, on réduit les formules à n'être désormais applicables qu'aux cas où x est renfermé entre les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$.

La supposition $x=0$, faite dans les formules (41. et 42.), donne:

43. $\cos 2m\dot{n}\pi = \cos 2m\dot{\nu}\pi$ et $\sin 2m\dot{n}\pi = \sin 2m\dot{\nu}\pi$,

donc on a

44. $\cos m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[\cos 2m\dot{n}\pi - m_1 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x$
$- m_2 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^2 + m_3 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots]$,

45. $\sin m(x+2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[\sin 2m\dot{n}\pi + m_1 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x$
$- m \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^2 - m_3 \cos 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^3 + m_4 \sin 2m\dot{n}\pi \operatorname{tang} x^4 \ldots]$,

où $\dot{n}$ est arbitraire. En supposant $\dot{n}=0$, on a

$$46. \quad \cos mx = |\cos x|^m (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - m_6 \operatorname{tang} x^6 \ldots),$$
$$47. \quad \sin mx = |\cos x|^m (m \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 + m_5 \operatorname{tang} x^5 \ldots).$$

Voilà les expressions complètes des cosinus et des sinus des arcs multiples en puissances de cosinus et sinus des arcs simples. Ces formules sont soumises à la condition que x soit compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$ et que m soit réel et positif.

Puisque $\cos mx$ à la même valeur pour un x positif ou négatif de la même grandeur, et que $\sin mx = -\sin mx$, si x est négatif, il faut que les formules (46. et 47.) se reproduisent, au signe près, si l'on y met $-x$ au lieu de $+x$. C'est ce qui a effectivement lieu comme il est facile de voir.

14.

Mais les résultats (46. et 47.) sont encore soumis à une autre restriction. Car en examinant le développement général (39.) on verra sans peine, que la série à droite cesse d'être convergente, si $\operatorname{tang} x$ est plus grand que l'unité. Donc, passé $x = \pm\frac{1}{4}\pi$, les expressions (46. et 47.) ne sont plus hors de doute. Il faut donc borner leur application aux arcs compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$ et il s'agit de trouver d'autres formules pour les arcs plus grands.

Cela se fera comme suit:

I. Si x est un arc entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$, l'arc $x - \frac{1}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, et les expressions (46. et 47.) seront applicables à ce dernier arc. Puisque

$$48. \quad \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi) = +\sin x \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(x - \tfrac{1}{2}\pi) = -\cot x,$$

les formules (46. et 47.) donneront

$$49. \begin{cases} \cos m(x - \frac{1}{2}\pi) = |+\sin x|^m (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots) \quad \text{et} \\ \sin m(x - \frac{1}{2}\pi) = -|+\sin x|^m (m_2 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots). \end{cases}$$

Mais

$$50. \begin{cases} \cos mx = \cos m(x - \frac{1}{2}\pi)\cos\frac{1}{2}m\pi + \sin m(x - \frac{1}{2}\pi)\sin\frac{1}{2}m\pi, \quad \text{et} \\ \sin mx = \sin m(x - \frac{1}{2}\pi)\cos\frac{1}{2}m\pi + \cos m(x - \frac{1}{2}\pi)\sin\frac{1}{2}m\pi, \end{cases}$$

donc dans ce cas

$$51. \quad \cos mx = |+\sin x|^m [+\cos\tfrac{1}{2}m\pi(1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots) \\ -\sin\tfrac{1}{2}m\pi(m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots)].$$

$$52. \quad \sin mx = |+\sin x|^m [-\cos\tfrac{1}{2}m\pi(m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots) \\ -\sin\tfrac{1}{2}m\pi(1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots)].$$

II. Si l'arc x tombe entre $\frac{3}{4}\pi$ et $\frac{5}{4}\pi$, l'arc $x-\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc on peut se servir des formules (46. et 47.).

On a

53. $\cos(x-\pi) = -\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

$$54.\quad \begin{cases} \cos m(x-\pi) = |-\cos x|^m (1-m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) \text{ et} \\ \sin m(x-\pi) = |-\cos x|^m (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.). \end{cases}$$

Mais

$$55.\quad \begin{cases} \cos mx = \cos m(x-\pi)\cos m\pi + \sin m(x-\pi)\sin m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\pi)\cos m\pi - \cos m(x-\pi)\sin m\pi; \end{cases}$$

donc:

$$56.\quad \cos mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (1-m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.) \\ + \sin m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

$$57.\quad \sin mx = |-\cos x|^m [\cos m\pi (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots.) \\ - \sin m\pi (1-m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

III. Si l'arc x tombe entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{7}{4}\pi$, l'arc $x-\frac{3}{2}\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, donc les formules (46. et 47.) conviendront à ce dernier.

On a

58. $\cos(x-\frac{3}{2}\pi) = -\sin x$ et $\operatorname{tang}(x-\frac{3}{2}\pi) = -\cot x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

$$59.\quad \begin{cases} \cos m(x-\frac{3}{2}\pi) = +|-\sin x|^m (1-m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) \\ \sin m(x-\frac{3}{2}\pi) = -|-\sin x|^m (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.). \end{cases}$$

Mais

$$60.\quad \begin{cases} \cos mx = \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi + \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-\frac{3}{2}\pi)\cos \frac{3}{2}m\pi - \cos m(x-\frac{3}{2}\pi)\sin \frac{3}{2}m\pi, \end{cases}$$

donc

$$61.\quad \cos mx = |-\sin x|^m [+\cos \tfrac{3}{2}m\pi (1-m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.) \\ - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.)] \text{ et}$$

$$62.\quad \sin mx = |-\sin x|^m [-\cos \tfrac{3}{2}m\pi (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots.) \\ - \sin \tfrac{3}{2}m\pi (1-m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots.)]$$

dans ce cas.

IV. Si l'arc x tombe entre $\frac{7}{4}\pi$ et 2π l'arc $x-2\pi$ sera compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et 0; donc les formules (46. et 47.) seront applicables à ce dernier.

On a

63. $\cos(x-2\pi) = +\cos x$ et $\operatorname{tang}(x-2\pi) = +\operatorname{tang} x$,

donc en vertu des formules (46. et 47.):

$$64.\quad \begin{cases} \cos m(x-2\pi) = |+\cos x|^m (1-m_2 \tang x^2 + m_4 \tang x^4 \ldots) \text{ et} \\ \sin m(x-2\pi) = |+\cos x|^m (m_1 \tang x - m_3 \tang x^3 \ldots). \end{cases}$$

Mais

$$65.\quad \begin{cases} \cos mx = \cos m(x-2\pi)\cos 2m\pi + \sin m(x-2\pi)\sin 2m\pi \text{ et} \\ \sin mx = \sin m(x-2\pi)\cos 2m\pi - \cos m(x-2\pi)\sin 2m\pi, \end{cases}$$

donc

$$66.\quad \cos mx = |+\cos x|^m [\cos 2m\pi(1-m_2 \tang x^2 + m_4 \tang x^4 \ldots) + \sin 2m\pi(m_1 \tang x - m_3 \tang x^3 \ldots)] \text{ et}$$

$$67.\quad \sin mx = |+\cos x|^m [\cos 2m\pi(m_1 \tang x - m_3 \tang x^3 \ldots) - \sin 2m\pi(1-m_2 \tang x^2 + m_4 \tang x^4 \ldots)]$$

dans ce cas.

V. Si l'arc x est plus grand qu'un autre compris entre 0 et 2π, d'un nombre $2\dot{n}$ de civconférences, l'arc $x-2\dot{n}\pi$ sera compris entre 0 et 2π; donc l'une ou l'autre des formules ci dessus lui sera applicable.

En supposant pour abréger:

$$68.\quad 1-m_2 \tang x^2 + m_4 \tang x^4 \ldots = P_1, \quad m_1 \tang x - m_3 \tang x^3 \ldots = Q_1,$$

$$69.\quad 1-m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots = P_2, \quad m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots = Q_2,$$

les formules trouvées donnent les suivantes:

$$70.\quad \begin{cases} \text{I.} \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m P_1, \\ \sin mx = |+\cos x|^m Q_1, \end{cases} \\ \text{pour les arcs entre 0 et } \tfrac{1}{4}\pi; \\ \text{II.} \begin{cases} \cos mx = +|+\sin x|^m [+P_2 \cos \tfrac{1}{2} m\pi - Q_2 \sin \tfrac{1}{2} m\pi], \\ \sin mx = -|+\sin x|^m [+P_2 \sin \tfrac{1}{2} m\pi + Q_2 \cos \tfrac{1}{2} m\pi], \end{cases} \\ \text{pour les arcs entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ et } \tfrac{3}{4}\pi; \\ \text{III.} \begin{cases} \cos mx = +|-\cos x|^m [+P_1 \cos m\pi + Q_1 \sin m\pi], \\ \sin mx = -|-\cos x|^m [+P_1 \sin m\pi - Q_1 \cos m\pi], \end{cases} \\ \text{pour les arcs entre } \tfrac{3}{4}\pi \text{ et } \tfrac{5}{4}\pi; \\ \text{IV.} \begin{cases} \cos mx = +|-\sin x|^m [+P_2 \cos \tfrac{3}{2} m\pi - Q_2 \sin \tfrac{3}{2} m\pi], \\ \sin mx = -|-\sin x|^m [+P_2 \sin \tfrac{3}{2} m\pi + Q_2 \cos \tfrac{3}{2} m\pi], \end{cases} \\ \text{pour les arcs entre } \tfrac{5}{4}\pi \text{ et } \tfrac{7}{4}\pi; \\ \text{V.} \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m [+P_1 \cos 2m\pi + Q_1 \sin 2m\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m [-P_1 \sin 2m\pi + Q_1 \cos 2m\pi], \end{cases} \\ \text{pour les arcs entre } \tfrac{7}{4}\pi \text{ et } 2\pi. \end{cases}$$

Maintenant on a:

$$71.\quad \begin{cases} \cos(x-2\dot{n}\pi) = +\cos x, \quad \tang(x-2\dot{n}\pi) = +\tang x, \\ \sin(x-2\dot{n}\pi) = +\sin x, \quad \cot(x-2\dot{n}\pi) = +\cot x, \end{cases}$$

donc les quantités P_1, Q_1, P_2, Q_2 et les facteurs $|\pm\cos x|^m$ et $|\pm\sin x|^m$ sont les mêmes pour les arcs x et pour les arcs $x-2\dot{n}\pi$. On a en second lieu:

$$72.\quad \begin{cases} \cos mx = \cos m(x-2\dot{n}\pi)\cos 2m\dot{n}\pi + \sin m(x-2\dot{n}\pi)\sin 2m\dot{n}\pi \quad \text{et} \\ \sin mx = \sin m(x-2\dot{n}\pi)\cos 2m\dot{n}\pi - \cos m(x-2\dot{n}\pi)\sin 2m\dot{n}\pi. \end{cases}$$

Donc si dans ces dernières formules on substitue au lieu de $\cos m(x-2\dot{n}\pi)$ et $\sin m(x-2\dot{n}\pi)$, les expressions ci-dessus de $\cos mx$ et $\sin mx$, on trouve:

$$73.\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{I.} & \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m[P_1\cos 2m\dot{n}\pi + Q_1\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m[Q_1\cos 2m\dot{n}\pi - P_1\sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{II.} & \begin{cases} \cos mx = |+\sin x|^m[(P_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi - Q_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi + Q_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |+\sin x|^m[-(P_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi + Q_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_2\cos\tfrac{1}{2}m\pi - Q_2\sin\tfrac{1}{2}m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{III.} & \begin{cases} \cos mx = |-\cos x|^m[(P_1\cos m\pi + Q_1\sin m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_1\sin m\pi - Q_1\cos m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |-\cos x|^m[-(P_1\sin m\pi - Q_1\cos m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_1\cos m\pi + Q_1\sin m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{IV.} & \begin{cases} \cos mx = |-\sin x|^m[(P_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi - Q_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi + Q_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |-\sin x|^m[-(P_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi + Q_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_2\cos\tfrac{3}{2}m\pi - Q_2\sin\tfrac{3}{2}m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{V.} & \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m[(P_1\cos 2m\pi + Q_1\sin 2m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad +(-P_1\sin 2m\pi + Q_1\cos 2m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m[(-P_1\sin 2m\pi + Q_1\cos 2m\pi)\cos 2m\dot{n}\pi \\ \qquad\qquad -(P_1\cos 2m\pi + Q_1\sin 2m\pi)\sin 2m\dot{n}\pi]. \end{cases}
\end{array}\right.$$

Cela donne, en réduisant:

$$74.\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{I.}\ \begin{cases} \cos mx = |+\cos x|^m[+P_1\cos 2m\dot{n}\pi + Q_1\sin 2m\dot{n}\pi], \\ \sin mx = |+\cos x|^m[+Q_1\cos 2m\dot{n}\pi - P_1\sin 2m\dot{n}\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } 2\dot{n}\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi; \\
\text{II.}\ \begin{cases} \cos mx = |+\sin x|^m[+P_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi - Q_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi], \\ \sin mx = |+\sin x|^m[-Q_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi - P_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi], \end{cases} \\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi;
\end{array}\right.$$

$$74.\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{III.}\ \begin{cases}\cos mx = |-\cos x|^m\,[+P_1\cos(2\dot{n}+1)m\pi + Q_1\sin(2\dot{n}+1)m\pi],\\ \sin mx = |-\cos x|^m\,[+Q_1\cos(2\dot{n}+1)m\pi - P_1\sin(2\dot{n}+1)m\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi;\\
\text{IV.}\ \begin{cases}\cos mx = |-\sin x|^m\,[+P_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - Q_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi],\\ \sin mx = |-\sin x|^m\,[-Q_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - P_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi \text{ et } (2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi;\\
\text{V.}\ \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m\,[+P_1\cos 2(\dot{n}+1)\pi + Q_1\sin 2(\dot{n}+1)\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m\,[+Q_1\cos 2(\dot{n}+1)\pi - P_1\sin 2(\dot{n}+1)\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } (2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi \text{ et } 2(\dot{n}+1)\pi.
\end{array}\right.$$

Si x est négatif, P_2, Q_2, $\sin x$ et $\sin mx$ changent de signes, mais P_1, Q_1, $\cos x$ et $\cos mx$ conservent les leurs; donc on trouve dans ce cas:

$$75.\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{I.}\ \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m\,[+P_1\cos 2m\dot{n}\pi + Q_1\sin 2m\dot{n}\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m\,[-Q_1\cos 2m\dot{n}\pi + P_1\sin 2m\dot{n}\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } -2\dot{n}\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi;\\
\text{II.}\ \begin{cases}\cos mx = |-\sin x|^m\,[-P_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi + Q_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi],\\ \sin mx = |-\sin x|^m\,[-Q_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi - P_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{1}{2})m\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{1}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi;\\
\text{III.}\ \begin{cases}\cos mx = |-\cos x|^m\,[+P_1\cos(2\dot{n}+1)m\pi + Q_1\sin(2\dot{n}+1)\pi],\\ \sin mx = |-\cos x|^m\,[-Q_1\cos(2\dot{n}+1)m\pi + P_1\sin(2\dot{n}+1)\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{3}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi;\\
\text{IV.}\ \begin{cases}\cos mx = |+\sin x|^m\,[-P_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi + Q_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi],\\ \sin mx = |+\sin x|^m\,[-Q_2\cos(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi - P_2\sin(2\dot{n}+\tfrac{3}{2})\pi],\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{5}{4})\pi \text{ et } -(2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi;\\
\text{V.}\ \begin{cases}\cos mx = |+\cos x|^m\,[+P_1\cos 2(\dot{n}+1)\pi + Q_1\sin 2(\dot{n}+1)\pi],\\ \sin mx = |+\cos x|^m\,[-Q_1\cos 2(\dot{n}+1)\pi + P_1\sin 2(\dot{n}+1)\pi].\end{cases}\\
\text{pour les arcs entre } -(2\dot{n}+\tfrac{7}{4})\pi \text{ et } 2(\dot{n}+1)\pi.
\end{array}\right.$$

Les formules (74.) offrent le tableau complet des expressions des cosinus et sinus des arcs multiples p o s i t i f s, et celles (75.) le tableau des expressions des cosinus et sinus des arcs multiples n é g a t i f s.

15.

En passant nous ferons remarquer les formules suivantes, qu'on tire aisément des expressions ci-dessus. En quarrant les expressions correspondantes de $\cos mx$ et $\sin mx$, et ajoutant les quarrés, on trouve respectivement

$$76.\quad |\sec x|^{2m} = P_1^2 + Q_1^2 \quad \text{et} \quad |\operatorname{cosec} x|^{2m} = P_2^2 + Q_2^2,$$

c'est-à-dire:

$$77.\quad |\sec x|^{2m} = (1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots)^2 + (m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots)^2,$$

pour les arcs entre $\pm 2\dot{n}\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$, entre $\pm(2\dot{n} + \frac{3}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{5}{4})\pi$ et entre $\pm(2\dot{n} + \frac{7}{4})\pi$ et $\pm 2(\dot{n} + 1)\pi$, et

$$78.\quad |\operatorname{cosec} x|^{2m} = (1 - m_2 \cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots)^2 + (m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots)^2$$

pour les arcs entre $\pm(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{3}{4})\pi$, et entre $\pm(2\dot{n} + \frac{5}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{n} + \frac{7}{4})\pi$

Si $x = \pm\frac{1}{4}\pi$, ou $x = \pm\frac{7}{4}\pi$, on a $\operatorname{tang} x = \cot x = 1$ et $\sec x = \operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$, donc ce cas donne:

$$79.\quad 2^m = (1 - m_2 + m_4 \ldots)^2 + (m_1 - m_3 + m_5 \ldots)^2,$$

pour un m quelconque réel et positif.

Les formules (46. et 47.) donnent séparément:

$$80.\quad (1 - m_2 + m_4 \ldots)^2 = 2^m (\cos\tfrac{1}{4} m\pi)^2, \quad (m_1 - m_3 + m_5 \ldots)^2 = 2^m (\sin\tfrac{1}{4} m\pi)^2.$$

On peut tirer encore d'autres expressions remarquables des formules (74. et 75.), en calculant les valeurs de $\cos mx^2 - \sin mx^2 = \cos 2mx$, et de $2\cos mx \sin mx = \sin 2mx$. Nous ne nous y arrêterons pas.

16.

Les formules (74. et 75., §. 14.) expriment $\cos mx$ et $\sin mx$ par les cosinus et les sinus de l'arc x même. Si l'on veut y introduire un arc x compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, auquel les formules (46. et 47.) sont applicables, on trouvera les expressions suivantes:

I. Pour x même compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$ les formules (46., 47. et 68.) donnent:

$$81.\quad \cos mx = |\cos x|^m P \quad \text{et} \quad \sin mx = |\cos x|^m Q,$$

où

$$82.\quad P = 1 - m_2 \operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 - \ldots \quad \text{et} \quad Q = m_1 \operatorname{tang} x - m_3 \operatorname{tang} x^3 \ldots,$$

x étant désormais toujours compris entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, et les quantités P_1 et Q_1 étant désignées simplement par P et Q dans ce cas.

II. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n} - \frac{1}{4})\pi$ et $(2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$ ou entre $(-2\dot{n} - \frac{1}{4})\pi$ et $(-2\dot{n} + \frac{1}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x \pm 2\dot{n}\pi$. Mais

$$83.\ \begin{cases}\cos m(x\pm 2\dot{n}\pi) = \cos mx\cos 2m\dot{n}\pi \mp \sin mx \sin 2m\dot{n}\pi,\\ \sin m(x\pm 2\dot{n}\pi) = \sin mx\cos 2m\dot{n}\pi \pm \cos mx \sin 2m\dot{n}\pi,\end{cases}$$

donc:

$$84.\ \begin{cases}\cos m(x\pm 2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[P\cos 2m\dot{n}\pi \mp Q\sin 2m\dot{n}\pi],\\ \sin m(x\pm 2\dot{n}\pi) = |\cos x|^m[Q\cos 2m\dot{n}\pi \pm P\sin 2m\dot{n}\pi].\end{cases}$$

III. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi$, et l'on trouve d'une manière semblable:

$$85.\ \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+\frac{1}{2})\pi].\end{cases}$$

IV. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{3}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+1)\pi$, et on aura:

$$86.\ \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+1)\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+1)\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+1)\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+1)\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+1)\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+1)\pi].\end{cases}$$

V. Si l'arc donné tombe entre $(2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $(2\dot{n}\pm\frac{7}{4})\pi$, ou entre $(-2\dot{n}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $(-2\dot{n}\pm\frac{7}{4})\pi$, on pourra l'exprimer par $x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi$, et l'on aura:

$$87.\ \begin{cases}\cos m(x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi) = |\cos x|^m[P\cos m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi \mp Q\sin m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi],\\ \sin m(x\pm(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi) = |\cos x|^m[Q\cos m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi \pm P\sin m(2\dot{n}+\frac{3}{2})\pi].\end{cases}$$

Les quatre couples de formules (84. 85. 86. 87.) embrassent tous les cas, et il ne s'y présente que $\cos x$ et les quantités P et Q (82.), prises toutes les trois pour une valeur de x comprise entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$.

17.

Les séries trouvées ci-dessus pour $\cos mx$ et $\sin mx$ vont en croissant suivant les puissances ascendentes des tangentes et des cotangentes de l'arc x. On peut demander des séries qui aillent suivant les puissances ascendentes ou descendantes des cosinus et des sinus. Cherchons ces séries, s'il en existe.

D'abord nous remarquerons qu'il ne s'agit que des séries:

$$88.\ \begin{cases}P = 1 - m_2\operatorname{tang} x^2 + m_4 \operatorname{tang} x^4 \ldots\ \text{et}\\ Q = m_1\operatorname{tang} x - m_3\operatorname{tang} x^3 + m_5\operatorname{tang} x^5 \ldots\end{cases}$$

pour un x entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $+\frac{1}{4}\pi$, car à l'aide de ces séries on peut, comme nous l'avons vu (§. 16.), exprimer $\cos mx$ et $\sin mx$ dans tous les cas.

18.

Les expressions (46. et 47.) donnent:

89. $\cos mx = \cos x^m \left(1 + m_2 \frac{\cos x^2 - 1}{\cos x^2} + m_4 \frac{(\cos x^2 - 1)^2}{\cos x^4} + m_6 \frac{(\cos x^2 - 1)^3}{\cos x^6} \dots\right)$ et

90. $\sin mx =$

$$\cos x^{m-1} \sin x \left(m_1 + m_3 \frac{\cos x^2 - 1}{\cos x^2} + m_5 \frac{(\cos x^2 - 1)^2}{\cos x^4} + m_7 \frac{(\cos x^2 - 1)^3}{\cos x^6} \dots\right).$$

Pour plus de simplicité nous avons écrit $\cos x^m$ au lieu de $|\cos x|^m$; la valeur **absolue** ou **toute réelle** $|\cos x|^m$ de $(\cos x)^m$ est sous-entendue. La forme des expressions (89. et 90.) semble annoncer que $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent être exprimés sous cette forme:

91. $\cos mx = a_1 \cos x^m + a_2 \cos x^{m-2} + a_3 \cos x^{m-4} \dots$

92. $\sin mx = \sin x (b_1 \cos x^{m-1} + b_2 \cos x^{m-3} + b_3 \cos x^{m-5} \dots).$

Cherchons les coëfficiens $a_1, a_2 \dots b_1, b_2 \dots$

En développant les expressions (89. et 90.), on trouve:

93.
$$\begin{aligned}\cos mx = &\cos x^m (1 + m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + m_{10} \dots)\\ &- \cos x^{m-2} (m_2 + 2_1 m_4 + 3_1 m_6 + 4_1 m_8 + 5_1 m_{10} \dots)\\ &+ \cos x^{m-4} (+ m_4 + 3_2 m_6 + 4_2 m_8 + 5_2 m_{10} \dots)\\ &- \cos x^{m-6} (+ m_6 + 4_3 m_8 + 5_3 m_{10} \dots)\\ &+ \cos x^{m-8} (m_8 + 5_4 m_{10} \dots)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

94.
$$\begin{aligned}\frac{\sin mx}{\sin x} = &\cos x^{m-1} (m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 + m_{11} \dots)\\ &- \cos x^{m-3} (m_3 + 2_1 m_5 + 3_1 m_7 + 4_1 m_9 + 5_1 m_{11} \dots)\\ &+ \cos x^{m-5} (m_5 + 3_2 m_7 + 4_2 m_9 + 5_2 m_{11} \dots)\\ &- \cos x^{m-7} (m_7 + 4_3 m_9 + 5_3 m_{11} \dots)\\ &+ \cos x^{m-9} (m_9 + 5_4 m_{11} \dots).\end{aligned}$$

Cela posé, soit z une variable quelconque, on a:

95.
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left((1 + z^{\frac{1}{2}})^m + (1 - z^{\frac{1}{2}})^m\right) = 1 + m_2 z + m_4 z^2 + m_6 z^3 \dots \text{ et} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{(1 + z^{\frac{1}{2}})^m - (1 - z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}\right) = m_1 + m_3 z + m_5 z^2 + m_7 z^3 \dots \end{cases}$$

Si dans ces expressions on fait $z = 1$, les séries à droite donnent les coëfficiens de $\cos x^m$ dans $\cos mx$ et de $\cos x^{m-1}$ dans $\frac{\sin mx}{\sin x}$ (93. et 94.), et il est aisé de voir que si l'on prend les différentielles du premier ordre et des ordres suivans des expressions (95.), qu'on y fait $z = 1$, et qu'on les divise successivement par 1; 2; 3.2; 4.3.2 etc., elles donneront les coëfficiens de $\cos x^{m-2}$, $\cos x^{m-3}$ etc. de (93. et 94.). Mais on voit en même tems que

les différentielles des parties $(1-z^{\frac{1}{2}})^m$ et $\frac{(1-z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}$ des expressions (95.) conservent toujours la quantité $1-z^{\frac{1}{2}}$ comme facteur, et cette quantité est nulle pour $z=1$, tant que leur exposant est positif. Donc pour trouver les coëfficiens de (93. et 94.), il ne s'agit que des différentielles des premières parties $(1+z^{\frac{1}{2}})^m$ et $\frac{(1+z^{\frac{1}{2}})^m}{z^{\frac{1}{2}}}$ des expressions (95.). Soit $\frac{1}{2}(1+z^{\frac{1}{2}})^m=p$ et $\frac{(1+z^{\frac{1}{2}})^m}{2z^{\frac{1}{2}}}=q$, on a $\partial p=\frac{m(1+z^{\frac{1}{2}})^{m-1}}{2^2 z^{\frac{1}{2}}}$, et cela fait voir que ∂p donne q, si, après avoir divisé par m et multiplié par 2, on y met m au lieu de $m-1$. Donc aussi $\partial^2 p$, $\partial^3 p$, $\partial^4 p$ etc. donneront ∂q, $\partial^2 q \ldots\ldots$ sous la même condition, et il ne s'agit que des différentielles de p. Puisque $\partial p=\frac{m(1+z^{\frac{1}{2}})^{m-1}}{2^2 z^{\frac{1}{2}}}=\frac{mp}{2z^{\frac{1}{2}}(1+z^{\frac{1}{2}})}$, on a:

96.
$$\begin{cases}
\text{I.} & (2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial p=mp, \text{ donc} \\
& (z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^2 p=m\partial p, \text{ ou bien} \\
\text{II.} & (2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^2 p=(m-2-z^{-\frac{1}{2}})\partial p, \text{ et de là} \\
& (z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial^2 p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^3 p=\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial p+(m-2-z^{-\frac{1}{2}})\partial^2 p, \text{ ou bien} \\
\text{III.} & (2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^3 p=(m-4-2z^{-\frac{1}{2}})\partial^2 p+\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial p, \text{ et de là} \\
& (z^{-\frac{1}{2}}+2)\partial^3 p+(2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^4 p=z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p+(m-4-2z^{-\frac{1}{2}})\partial^3 p-\frac{3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}}\partial p \\
& \qquad +\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p, \text{ et de là} \\
\text{IV.} & (2z^{\frac{1}{2}}+2z)\partial^4 p=(m-6-3z^{-\frac{1}{2}})\partial^3 p+\frac{3}{2}z^{-\frac{3}{2}}\partial^2 p-\frac{3}{2.2}z^{-\frac{5}{2}}\partial p, \\
& \text{etc.}
\end{cases}$$

Si dans ces formules on fait $z=1$, elles donnent:

97.
$$\begin{cases}
\text{I.} & p=\frac{1}{2}2^m=2^{m-1}, \\
\text{II.} & \partial p=\frac{m.2^{m-1}}{2.2}=m.2^{m-3}, \\
& 2^2\partial^2 p=(m-3)\partial p, \text{ donc} \\
\text{III.} & \partial^2 p=m.(m-3)2^{m-5}, \\
& 2^2\partial^3 p=(m-6)\partial^2 p+\frac{1}{2}\partial p=m(m-3)(m-6)2^{m-5}+m.2^{m-4} \\
& \qquad =m(m-4)(m-5)2^{m-5}, \text{ donc:} \\
\text{IV.} & \partial^3 p=m(m-4)(m-5)2^{m-7}, \\
& 2^2\partial^4 p=(m-9)\partial^3 p+\frac{3}{2}\partial^2 p-\frac{3}{2.2}\partial p \\
& \qquad =m(m-4)(m-5)(m-9)2^{m-7}+3m(m-3)2^{m-6}-3m2^{m-5}, \\
\text{V.} & \partial^4 p=m(m-5)(m-6)(m-7)2^{m-9}, \\
& \text{etc.}
\end{cases}$$

et de là on tire en vertu de la remarque ci-dessus, savoir: qu'après avoir divisé par m et multiplié par 2, il faut mettre m au lieu de $m-1$ dans

$\partial p, \partial^2 p \ldots$

$$98. \begin{cases} \text{I.} & q = 2^{m-1}, \\ \text{II.} & \partial q = (m-2)2^{m-3}, \\ \text{III.} & \partial^2 q = (m-3)(m-4)2^{m-5}, \\ \text{IV.} & \partial^3 q = (m-4)(m-5)(m-6)\,2^{m-7}, \\ & \text{etc.} \end{cases}$$

En introduisant ces expressions dans (93. et 94.), on trouve

$$99. \quad 2\cos mx = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\cos x)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos x)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}(2\cos x)^{m-8} \ldots$$

$$100. \quad \sin mx = \sin x\Big[(2\cos x)^{m-1} - (m-2)(2\cos x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2\cos x)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3}(2\cos x)^{m} \ldots\Big].$$

Voilà des expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ de la forme (91. et 92.), c'est à dire à puissances descendantes de $\cos x$. Mais il faut bien avoir attention que ces expressions n'ont pas lieu si m n'est un nombre entier. Car si m étoit une fraction ou irrationnel, la quantité $(1-z^2)^m$ dans (95.), en différentiant ces formules, entreroit dans le dénominateur, dès la n^{me} différentiation, si par exemple m est plus petit que n, donc si l'on y faisoit $z=1$, on auroit des valeurs infinies pour tous les coëfficiens, passé le $n-1^{\text{me}}$. Donc les séries (91. et 92.) sont divergentes toutes les fois que m n'est un nombre entier, c'est à dire, elles ne subsistent que dans ce dernier cas.

19.

D'ailleurs si l'on suppose que m soit un nombre entier, on peut trouver avec moins de peine les coëfficiens de (91. et 92.) de la manière suivante. D'abord les formules (74. et 75.) font voir que dans ce cas les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent avoir effectivement la forme (91. et 92.) pour une valeur quelconque de x. Car si m est entier, une des deux parties du second facteur à droite dans les formules (74. et 75.) s'évanouit dans tous les cas et il ne reste que la seconde; donc en substituant les valeurs de P_1, P_2, Q_1, Q_2 (68. 69.), les formules prendront la forme:

$$101. \begin{cases} \cos mx = \pm\cos x^m(1 - m_2\tang x^2 + m_4\tang x^4 \ldots), \\ \sin mx = \pm\cos x^m(m_1\tang x - m_3\tang x^3 \ldots), \end{cases}$$

ou celle-ci:

$$102.\quad \begin{cases}\cos mx = \pm \sin x^m(1 - m_2\cot x^2 + m_4 \cot x^4 \ldots),\\ \sin mx = \pm \sin x^m(m_1 \cot x - m_3 \cot x^3 \ldots),\end{cases}$$

et cela fait voir que les expressions de $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent avoir toujours la forme (91. et 92.). Donc on peut supposer indifféremment, pour une valeur quelconque de x:

$$103.\quad \begin{cases}\cos mx = a_1 \cos x^m + a_2 \cos x^{m-2} + a_3 \cos x^{m-4} \ldots \text{ et}\\ \sin mx = \sin x(b_1 \cos x^{m-1} + b_2 \cos x^{m-3} + b_3 \cos x^{m-5} \ldots).\end{cases}$$

Cela posé, on trouve, en différentiant la première de ces formules:

$$104.\ m \sin mx = m a_1 \cos x^{m-1} \sin x + (m-2) a_2 \cos x^{m-3} \sin x + (m-4) a_3 \cos x^{m-5} \sin x \ldots,$$

et en différentiant celle-ci:

$$\begin{aligned}105.\ m^2 \cos mx = m a_1 \cos x^m &+ (m-2) a_2 \cos x^{m-2} + (m-4) a_3 \cos x^{m-4} \ldots\\ &- m(m-1) a_1 \cos x^{m-2} \sin x^2 - (m-2)(m-3) a_2 \cos x^{m-4} \sin x^2\\ &- (m-4)(m-5) a_3 \cos x^{m-6} \sin x^2 \ldots\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}106.\ m^2 \cos mx = &\ (m + m(m-1)) a_1 \cos x^m\\ &+ [(m-2+(m-2)(m-3)) a_2 - m(m-1) a_1] \cos x^{m-2}\\ &+ [(m-4+(m-4)(m-5)) a_3 - (m-2)(m-3) a_2] \cos x^{m-4}\\ &+ [(m-6+(m-6)(m-7)) a_4 - (m-4)(m-5) a_3] \cos x^{m-6}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En égalant cette expression de $m^2 \cos mx$ à celle que fournit la première des équations (103.), savoir à

$$107.\quad m^2 \cos mx = m^2 a_1 \cos x^m + m^2 a_2 \cos x^{m-2} + m^2 a_3 \cos x^{m-4} \ldots,$$

on trouvera les valeurs des coëfficiens $a_1, a_2, a_3 \ldots$; car puisque les suppositions (103.) qu'on a faites, sont admissibles pour une valeur quelconque de x, il est permis de supposer aussi $\cos x = 0$, comme cela est toujours nécessaire, si l'on veut tirer d'une série, égalée à une autre, les coëfficiens indéterminés qu'elle renferme.

Nous remarquerons en parenthèse, que dans les cas d'un m fractionnaire ou irrationnel, les expressions des $\cos mx$ et $\sin mx$, qui peuvent prendre la forme (103.) sont bornées aux valeurs de x comprises entre $\pm(2\dot{\tau} - \frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau} + \frac{1}{4})\pi$, c'est à dire à celles auxquelles conviennent les formules (74. I. III. V. et 75. I. III. V.), car les autres expressions (74 II. IV. et 75. II. IV.) ne peuvent pas prendre la forme (103.) à cause du facteur $|\sin x|^m$ qui, développé, n'a pas des termes de la forme $|\cos x|^m$. Mais si x est compris entre $\pm(2\dot{\tau} - \frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau} + \frac{1}{4})\pi$, sa valeur ne peut pas s'évanouir, donc on ne peut pas se servir du développement actuel des coëfficiens dans ce cas (103.). Nous revenons à notre objet.

Les coëfficiens de $\cos x^m$, $\cos x^{m-2}$ etc. dans les deux équations (106. et 107.) étant égaux, on trouve

$$108.\quad \begin{cases} m^2 a_1 = m^2 a_1, \\ (m-2)^2 a_2 - m(m-1) a_1 = m^2 a_2, \\ (m-4)^2 a_3 - (m-2)(m-3) a_2 = m^2 a_3, \\ (m-6)^2 a_4 - (m-4)(m-5) a_3 = m^2 a_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations donnent:

$$109.\quad \begin{cases} a_2 = -\frac{m}{4} a_1, \\ a_3 = -\frac{m-3}{8} a_2 = +\frac{m(m-3)}{2^5} a_1, \\ a_4 = -\frac{(m-4)(m-5)}{12(m-3)} a_3 = -\frac{m(m-4)(m-5)}{2^7.3} a_1, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Le premier coëfficient a_1 reste indéterminé, mais on le tire immédiatement de $\cos mx$ exprimé sous la forme (89.). Il est $1 + m_2 + m_4 + m_6 \ldots.$ et cette quantité est comme on sait, $= 2^{m-1}$ (97. I.). Donc on a:

$$110.\quad 2\cos mx = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\cos x)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2\cos x)^{m-6} \ldots.,$$

et l'équation (104.) donne:

$$111.\quad \sin mx = \sin x \Big[(2\cos x)^{m-1} - (m-2)(2\cos x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2\cos x)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3}(2\cos x)^{m-7} \ldots.\Big].$$

Ces expressions s'accordent avec celles (103. et 104.) ci-dessus, et elles ont lieu pour tout m entier positif et pour un x quelconque.

20.

Les équations fondamentales (101. et 102.) donnent aussi sur le champ les expressions connues de $\cos mx$ et $\sin mx$ de la forme

$$112.\quad \begin{cases} \cos mx = a_1 \cos x^m + a_2 \cos x^{m-2} \sin x^2 + a_3 \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots. \\ \sin mx = (b_1 \cos x^{m-1} + b_2 \cos x^{m-3} \sin x^2 + b_3 \cos x^{m-5} \sin x^4 \ldots.) \sin x. \end{cases}$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

21.

On peut aussi chercher des expressions de la forme:

$$113.\quad \begin{cases} \cos mx = (\alpha_1 \sin x^{m-1} + \alpha_2 \sin x^{m-3} \cos x^2 \ldots.) \cos x, \text{ et} \\ \sin mx = \beta_1 \sin x^m + \beta_2 \sin x^{m-2} \cos x^2 \ldots. \end{cases}$$

ou

$$114. \begin{cases}\cos mx = \alpha_1 \sin x^m + \alpha_1 \sin x^{m-2} \cos x^2 + \alpha_3 \sin x^{m-4} \cos x^4 \dots \\ \sin mx = (\beta_1 \sin x^{m-1} + \beta_2 \sin x^{m-3} \cos x^2 + \beta_3 \sin x^{m-5} \cos x^4 \dots) \cos x.\end{cases}$$

Mais les expressions (113.), de même que celles (112., 110. et 111.), ne subsistent que pour un m entier positif. Car les valeurs de x, pour lesquelles les expressions générales (74. et 75.) pourroient prendre cette forme à cause des facteurs $|\cos x|^m$ et $|\sin x|^m$, sont compris entre $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{1}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{3}{4})\pi$ et entre $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{5}{4})\pi$ et $\pm(2\dot{\tau}\pm\frac{7}{4})\pi$, et de toutes ces valeurs de x aucune n'a zéro pour sinus.

22.

Généralement les expressions (74. et 75. I. III. V.) et (74. II. IV.) ont respectivement les formes:

$$115. \begin{Bmatrix}\cos mx \\ \sin mx\end{Bmatrix} = \cos x^m \Big[p_1\Big(1 - m_2 \frac{\sin x^2}{\cos x^2} + m_2 \frac{\sin x^4}{\cos x^4} \dots\Big) + q_1\Big(m_1 \frac{\sin x}{\cos x} - m_3 \frac{\sin x^3}{\cos x^3} \dots\Big)\Big] \text{ et}$$

$$116. \begin{Bmatrix}\cos mx \\ \sin mx\end{Bmatrix} = \sin x^m \Big[p_2\Big(1 - m_2 \frac{\cos x^2}{\sin x^2} + m_4 \frac{\cos x^4}{\sin x^4} \dots\Big) + q_2\Big(m_1 \frac{\cos x}{\sin x} - m_3 \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \dots\Big)\Big].$$

Mais $\cos x^m$, quel que soit m, peut être développé suivant les puissances ascendantes des **sinus**, et $\sin x^m$ suivant celles des **cosinus**. Donc $\cos mx$ et $\sin mx$ peuvent prendre la forme d'une série qui va en croissant suivant les puissances, respectivement de $\sin x$ et de $\cos x$, c'est à dire on peut supposer pour un m quelconque

$$117. \begin{cases}\cos mx = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin x^2 + a_3 \sin x^3 + \dots \\ \sin mx = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin x^2 + b_3 \sin x^3 + \dots\end{cases}$$

dans les cas (74. et 75. I. III. et V.) et

$$118. \begin{cases}\cos mx = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos x^2 + \alpha_3 \cos x^3 \dots \\ \sin mx = \beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos x^2 + \beta_3 \cos x^3 \dots\end{cases}$$

dans les cas (74. et 75. II. et IV.), et il s'agit de trouver les valeurs de coëfficiens indéterminés de ces séries.

En différentiant la première des séries (117.), on a:

$$119. \; -m.\sin mx = a_1 \cos x + 2a_2 \sin x \cos x + 3a_3 \sin x^2 \cos x + 4a_4 \sin x^3 \cos x \dots$$

et en différentiant de nouveau, on trouve:

$$-m^2 \cos mx = -a_1 \sin x - 2a_2 \sin x^2 - 3a_3 \sin x^3 - 4a_4 \sin x^4 - 5a_5 \sin x^5 \dots$$
$$+ 2a_2 \cos x^2 + 3.2.a_3 \sin x \cos x^2 + 4.3.a_4 \sin x^2 \cos x^2 + 5.4.a_5 \sin x^3 \cos x^2 \dots$$

ou bien:

$$120.\quad m^2\cos mx = a_1\sin x + 2a_2\sin x^2 + 3a_3\sin x^3 + 4a_4\sin x^4 \ldots\ldots$$
$$+ 2a_2\sin x^2 + 3.2.a_3\sin x^3 + 4.3.a_4\sin x^4 \ldots\ldots$$
$$-2a_2 - 3.2.a_3\sin x - 4.3.a_4\sin x^2 - 5.4.a_5\sin x^3 - 6.5.a_6\sin^4 \ldots\ldots$$

En égalant cette expression à celle

$$121.\quad m^2\cos mx = m^2a_0 + m^2a_1\sin x + m^2a_2\sin x^2 + m^2a_3\sin x^3 + m^2a_4\sin x^4 \ldots\ldots$$

que fournit la première des équations (117.), on trouve:

$$122.\ \begin{cases} m^2a_0 = -2a_2, & \text{donc } a_2 = -\frac{m^2}{2}a_0, \\ m^2a_1 = a_1 - 3.2.a_3, & \text{donc } a_3 = -\frac{m^2-1}{2.3}a_1, \\ m^2a_2 = 4a_2 - 4.3.a_4, & \text{donc } a_4 = -\frac{m^2-4}{3.4}a_2 = +\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}a_0, \\ m^2a_3 = 9a_3 - 5.4.a_5, & \text{donc } a_5 = -\frac{m^2-9}{4.5}a_3 = +\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}a_1 \\ m^2a_4 = 16a_4 - 6.5.a_6, & \text{donc } a_6 = -\frac{m^2-16}{5.6}a_4 = -\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}a_0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$

ou la loi de la formation des coëfficiens est facile à saisir. Les deux premiers coëfficiens a_0 et a_1, qu'on n'a pas trouvés, peuvent être tirés des équations (117. 119.). En effet $\sin x$ est zéro pour $x = \pm\dot{\tau}\pi$, et x peut avoir cette valeur dans les cas (74. et 75. I. III. V.) pour lesquels les suppositions (117.) ont été faites. Donc en supposant $x = \pm\dot{\tau}\pi$, la première équation (117.) et celle (119.) donnent:

$$123.\ \begin{cases} a_0 = \cos m\dot{\tau}\pi, \\ a_1 = -m.\frac{\sin m\dot{\tau}\pi}{\cos\dot{\tau}\pi} = \pm m\sin m\dot{\tau}\pi, \end{cases}$$

selon que $\dot{\tau}$ est impair ou pair.

En introduisant les valeurs trouvées des coëfficiens dans (117. et 119.), on a:

124. $\cos mx =$

$$\cos m\dot{\tau}\pi\left(1 - \frac{m^2}{2}\sin x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}\sin x^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin x^6 \ldots\ldots\right)$$
$$\pm\sin m\dot{\tau}\pi\left(\sin x - \frac{m^2-1}{2.3}\sin x^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\sin x^5,\ldots\right),$$

125. $\sin mx =$

$$\cos m\dot{\tau}\pi\left(m^2\sin x - \frac{m^2(m^2-4)}{2.3}\sin x^3 + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4}\sin x^3\ldots\right)\cos x$$
$$\pm\sin m\dot{\tau}\pi\left(1 - \frac{m^2-1}{2}\sin x^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}\sin x^4,\ldots\right)\cos x.$$

Ces formules ont lieu pour les arcs compris entre $\pm(\dot{\tau}-\frac{1}{4})\pi$ et $(\dot{\tau}+\frac{1}{4})\pi$. Il reste à chercher les valeurs des coëfficiens α_0, α_1, α_2, ... β^0, β_1, β_1 .... des équations (118.). Si l'on y écrit $\frac{1}{2}\pi\pm x$, la forme des équations (118.) rentre dans celle des expressions (117.); donc les équations qui donnent ces coëfficiens coïncideront avec celles (122.). Seulement les valeurs des deux premiers coëfficiens α_0 et α_1 différeront de a_0 et a_1. Elles seront:

$$126.\quad \begin{cases}\alpha_0 = \cos m(\dot{\tau}\pm\frac{1}{2})\pi \text{ et} \\ \alpha_1 = m\pm m\sin m(\dot{\tau}\pm\frac{1}{2})\pi,\end{cases}$$

donc on aura:

127. $\cos mx =$

$$\cos m(\dot{\tau}\pm\tfrac{1}{2})\pi\left(1-\frac{m^2}{2}\cos x^2+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}\cos x^4-\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}\cos x^6\ldots\right)$$
$$\pm\sin m(\dot{\tau}\pm\tfrac{1}{2})\pi\left(\cos x-\frac{m^2-1}{2.3}\cos x^3+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}\cos^5\ldots\right),$$

128. $\sin mx =$

$$\cos m(\dot{\tau}\pm\tfrac{1}{2})\pi\left(m^2\cos x-\frac{m^2(m^2-4)}{2.3}\cos x^3+\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4}\cos x^5\ldots\right)\cos x$$
$$\mp\sin m(\dot{\tau}\pm\tfrac{1}{2})\pi\left(1-\frac{m^2-1}{2}\cos x^2+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}\cos x^4\ldots\right)\cos x$$

Ces formules conviendront aux cas ou l'arc x est compris entre $\pm(\dot{\tau}+\frac{1}{4})\pi$ et $\pm(\dot{\tau}+\frac{3}{4})\pi$ et entre $\pm(\dot{\tau}+\frac{5}{4})\pi$ et $\pm(\dot{\tau}+\frac{7}{4})\pi$.

Voilà un tableau à peu près complet des points essentiels du développement des puissances des cosinus et sinus des arcs simples en cosinus et sinus des arcs multiples, et des expressions réciproques. Les résultats qu'on vient de trouver diffèrent comme on voit essentiellement de ceux auxquels on parvient ordinairement. Néanmoins ils ne semblent pas être défectueux. Les développemens des fonctions angulaires sont de ces parties de l'analyse qui appartiennent aux élémens, et il semble être de toute nécessité et de la plus grande importance de poser inébranlablement les principes et les théorèmes surtout dans les élémens, et de les éclaircir parfaitement; car on ne peut pas aller en avant avec sûreté sans avoir bien posé le fondemens. Donc il seroit beaucoup à désirer, que les géomètres éclairés, et surtout ceux qui autrefois ce sont occupés des problèmes que nous venons de traiter, voulussent bien accorder leur attention aux remarques ci-dessus et faire connoître leurs objections, s'il y en a.

Berlin le 15. Septembre 1829.

16.
Aufgabe.

Bekanntlich läſst sich, wenn fx eine beliebige Function der veränderlichen Gröſse x bezeichnet, und x und $x+a$ zwei um a von einander verschiedene Werthe von x sind, $f(x+a)$ durch folgende Reihe ausdrücken.

$$f(x+a) = fx + \frac{a}{\varepsilon}\Delta fx + \frac{a(a-\varepsilon)}{2\varepsilon^2}\Delta^2 fx + \frac{a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)}{2.3.\varepsilon^3}\Delta^3 fx \ldots$$
$$\ldots + \frac{a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots(a-(n-1)\varepsilon)}{2.3\ldots n.\varepsilon^n}\Delta^n fx \ldots,$$

wo ε willkürlich ist, und Δfx, $\Delta^2 fx$ etc. die Differenzen von fx nach ε von den verschiedenen Ordnungen bedeuten, nemlich so, daſs $\Delta fx = f(x+\varepsilon) - fx$, $\Delta^2 fx = f(x+2\varepsilon) - 2f(x+\varepsilon) + fx$ etc. ist.

Nun läſst sich aber auch die nemliche Gröſse $f(x+a)$ auf folgende andere Weise ausdrücken:

$$f(x+a) = fx + a.\frac{\partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2}.\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{a^3}{2.3}.\frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \ldots + \frac{a^n}{2.3\ldots n}.\frac{\partial^n fx}{\partial x^n} \ldots,$$

wo $\frac{\partial fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}$ .... die Differentiale von fx von den verschiedenen Ordnungen sind.

Da nun die Differentiale $\frac{\partial fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}$ .... nichts Anderes sind, als $\frac{\Delta fx}{\varepsilon}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\varepsilon^2}$ .... für ε gleich Null, so müſste die erste Reihe in die zweite übergehen, wenn man darin $\varepsilon = 0$ setzt. Man sieht aber nicht, auf welche Weise nothwendig $a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots(a-(n-1)\varepsilon)$ gleich a^n ist für $n=\infty$; denn wenn man z. B. das willkürliche ε gleich $\frac{a}{n-1}$ setzt, was auch Null ist für $n=\infty$, so ist der letzte Factor in $a(a-\varepsilon)(a-2\varepsilon)\ldots(a-(n-1)\varepsilon)$ nicht a, sondern Null, und das Product kann also nicht a^n sein, so daſs es scheint, es müsse auſser der Bedingung $\varepsilon = 0$ noch eine andere Bedingung für diese Gröſse erfüllt werden, damit die Differenzen von fx in die Differentiale übergehen.

Die Aufgabe wäre, diesen Umstand zu erläutern und auf eine befriedigende Weise zu zeigen, wie die zweite Reihe aus der ersten in aller Strenge hergeleitet werden könne. Diese Nachweisung ist zu wünschen, weil die obigen Reihen die Grund-Formeln eines groſsen Theiles der Analysis sind.

17.

Du mouvement d'un corps sur un plan fixe, quand on a égard à la résistance du frottement, et qu'on ne suppose qu'un seul point de contact.

(Par Mr. *A. A. Cournot*, Dr. ès sciences à Paris.)

(Suite du mémoire No. 9. cah. precéd.)

---

1. Désignons, comme dans le N°. 1. du Mémoire N°. 9. cah. précéd., par M la masse du corps, et par A, B, C, ses moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z'; par ξ, η, ζ les coordonnées suivant les mêmes axes du point de contact entre le corps et le plan fixe; par α, β, γ les coordonnées du centre de gravité rapportées aux axes des x, y, z, fixes dans l'espace, le plan fixe étant pris pour celui des xy; par p, q, r les composantes du mouvement de rotation suivant les axes principaux des x' y', z'; par X, Y, Z, les composantes suivant les axes des x, y, z de la résultante des forces continues qui sollicitent le corps; par L', M', N' les sommes des moments de ces forces, estimés relativement aux axes des x', y', z'; par R la résistance du plan fixe, ou la pression qu'il supporte au point de contact. Désignons en outre par f la résistance due au frottement, qui s'exerce en sens contraire de la vitesse du point de contact; et par f_1, f_2, les composantes de cette résistance suivant les axes des x, y. Faisons enfin

$$a = \cos zx',\quad b = \cos zy'\quad c = \cos zz',$$
$$a_1 = \cos xx',\quad b_1 = \cos xy',\quad c_1 = \cos xz',$$
$$a_2 = \cos yx',\quad b_2 = \cos yy',\quad c_2 = \cos yz'$$

On aura, pour les six équations du mouvement:

$$1.\quad M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1,\quad M\frac{d^2\beta}{dt^2} = Y + f_2,\quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R;$$

$$2.\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = L' + \eta(Rc + f_1c_1 + f_2c_2) - \zeta(Rb + f_1b_1 + f_2b_2), \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = M' + \zeta(Ra + f_1a_1 + f_2a_2) - \xi(Rc + f_1c_1 + f_2c_2), \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = N' + \xi(Rb + f_1b_1 + f_2b_2) - \eta(Ra + f_1a_1 + f_2a_2). \end{cases}$$

Les quantités $p, q, r; a, b, c; a_1$, etc. pouvant s'exprimer en fonction de trois angles θ, φ, ψ, ainsi qu'on le trouve expliqué dans les traités de mécanique, ces six équations ne renferment implicitement que neuf inconnues α, β, γ; θ, φ, ψ; R, f_1, f_2, dont il faudrait obtenir la valeur en fonction du temps t. Mais d'abord, au moyen de ce que la vitesse du point (ξ, η, ζ) suivant les z, doit être détruite par la résistance du plan, on aura (1^{er} mém. N°. 7.):

$$\frac{d\gamma}{dt}+\xi(rb-qc)+\eta(pc-ra)+\zeta(qa-pb)=0;$$

et comme la variation infiniment petite de cette vitesse, due à l'action des forces continues pendant l'instant dt, doit pareillement être détruite, on aura, en différentiant l'équation précédente:

$$3.\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\frac{dp}{dt}(\eta c-\zeta b)+\frac{dq}{dt}(\zeta a-\xi c)+\frac{dr}{dt}(\xi b-\eta a)\\&=-\left\{p\frac{d(\eta c-\zeta b)}{dt}+q\frac{d(\zeta a-\xi c)}{dt}+r\frac{d(\xi b-\eta a)}{dt}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Maintenant deux cas se présentent, selon que la résistance due au frottement, sera ou ne sera pas suffisante pour anéantir la vitesse du point (ξ, η, ζ) parallèlement au plan fixe. Dans le premier cas il est clair qu'on aura, relativement aux axes des x, y, des équations analogues à celles que nous venons d'obtenir relativement à l'axe des z, c'est-à-dire:

$$4.\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dt}+\xi(rb_1-qc_1)+\eta(pc_1-ra_1)+\xi(qa_1-pb_1)=0,\\&\frac{d\beta}{dt}+\xi(rb_2-qc_2)+\eta(pc_2-ra_2)+\xi(qa_2-pb_2)=0;\end{aligned}\right.$$

et par suite

$$5.\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{dp}{dt}(\eta c_1-\zeta b_1)+\frac{dq}{dt}(\zeta a_1-\xi c_1)+\frac{dr}{dt}(\xi b_1-\eta a_1)\\&=-\left\{p\frac{d(\eta c_1-\zeta b_1)}{dt}+q\frac{d(\zeta a_1-\xi c_1)}{dt}+r\frac{d(\xi b_1-\eta a_1)}{dt}\right\},\\&\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{dp}{dt}(\eta c_2-\zeta b_2)+\frac{dq}{dt}(\zeta a_2-\xi c_2)+\frac{dr}{dt}(\xi b_2-\eta a_2)\\&=-\left\{p\frac{d(\eta c_2-\zeta b_2)}{dt}+q\frac{d(\zeta a_2-\xi c_2)}{dt}+r\frac{d(\xi b_2-\eta a_2)}{dt}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Dès lors on conçoit, abstraction faite des difficultés de l'intégration, que les neuf équations (1., 2., 3. et 5.) suffisent pour déterminer complètement les neuf inconnues du problême, c'est-à-dire pour assigner

en chaque instant la position du corps, l'intensité de la pression et celle du frottement, ainsi que la tangente de l'angle que fait avec les x la droite suivant laquelle le frottement exerce son action: ces deux dernières quantités étant respectivement égales à $\sqrt{(f_1^2+f_2^2)}$ et $\frac{f_2}{f_1}$. Il faudra que la valeur de la pression soit positive, sans quoi le plan fixe cesserait de gêner le mouvement du corps au point (ξ, η, ζ), et ce point se détacherait. De même aussi, d'après la manière dont nous concevons le mode d'action du frottement, il faudra que celui qui a lieu en pareil cas, et qui suffit pour anéantir la vitesse du point de contact, soit moindre que celui qui aurait lieu, si ce point prenait un mouvement, et surmontait la résistance que le frottement lui oppose. On devra donc avoir

$$f_1^2+f_2^2 < h^2,$$

h étant une quantité déterminée par l'observation et par la théorie physique du frottement, ainsi que nous allons l'expliquer.

Si le frottement ne suffit pas pour anéantir la vitesse du point de contact, les équations (4. et 5.) ne subsisteront plus, mais en revanche on aura

$$6.\quad f_1^2+f_2^2 = h^2;$$

et comme alors le frottement ne peut s'exercer qu'en sens contraire de la vitesse du point (ξ, η, ζ), estimée parallèlement au plan fixe, il viendra

$$7.\quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}+\xi(rb_1-qc_1)+\eta(pc_1-ra_1)+\zeta(qa_1-pb_1)}{\frac{d\beta}{dt}+\xi(rb_2-qc_2)+\eta(pc_2-ra_2)+\zeta(qa_2-pb_2)},$$

d'où, en faisant pour abréger:

$$\frac{d\alpha}{dt}+\xi(rb_1-qc_1)+\eta(pc_1-ra_1)+\zeta(qa_1-pb_1) = I,$$

$$\frac{d\beta}{dt}+\xi(rb_2-qc_2)+\eta(pc_2-ra_2)+\zeta(qa_2-pb_2) = J,$$

on tire

$$f_1 = -\frac{hI}{\sqrt{(I^2+J^2)}},\quad f_2 = -\frac{hJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}}.$$

h et le radical $\sqrt{(I^2+J^2)}$ doivent être considérés comme des quantités essentiellement positives, afin que f_1, f_2 soient toujours respectivement de signes contraires à I et J. D'ailleurs la pression R ne doit pas cesser d'être positive.

2. D'après ce qui a été expliqué dans le mémoire précédent (N°. 5.), les formules qu'on vient d'écrire subsistent de même, soit que les coor-

données ξ, η, ζ aient des valeurs constantes ou variables; en autres termes: soit que le contact du corps avec le plan ait lieu par une pointe vive, ou par un point d'une surface continue. Dans le premier cas, et lorsque d'ailleurs la résistance du frottement n'est pas surmontée, il serait plus avantageux d'intégrer d'abord les formules par lesquelles on détermine d'ordinaire le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, qui serait ici le point (ξ, η, ζ). Quand on aurait obtenu de cette manière les valeurs de α, β, γ en fonction de t, celles de f_1, f_2, R seraient données immédiatement par les équations (1.).

Si la surface du corps est continue, et que le contact ait lieu successivement par une suite de points de cette surface, les coordonnées variables ξ, η, ζ, seront déterminées 1° par l'équation de la surface; 2° par deux autres équations qui expriment que le plan tangent à cette surface, au point (ξ, η, ζ), se confond avec celui des xy. Lorsqu'en outre la résistance du frottement n'est par surmontée, ou que la vitesse du point de contact demeure nulle, on dit que le corps roule parfaitement, ou sans glisser; et au contraire il roule avec glissement, quand la vitesse du point de contact ne s'évanouit pas.

A la rigueur, on ne peut pas réaliser physiquement l'hypothèse d'une pointe parfaitement vive; et même il ne paraît pas qu'on ait déterminé par des expériences un peu précises, la nature du frottement des corps qui glissent en s'appuyant sur des aspérités anguleuses. On n'a étudié avec quelque soin que le frottement des corps qui glissent en s'appuyant sur une face plane, ce qu'on nomme le frottement de la première espèce; et encore en supposant que le corps se meut parallèlement à lui même, sans éprouver de rotation autour d'une droite perpendiculaire au plan fixe. En conséquence on pose sur un plan uniformément poli, un corps tel qu'un prisme ou un cylindre droit, construit et situé de manière à ce que le plan vertical, mené par le centre de gravité du corps perpendiculairement au plan de support, divise le corps en deux parties symétriques; puis l'on fait croître graduellement l'inclinaison du plan, jusqu'à ce que la résistanee du frottement soit vaincue par l'effort de la pesanteur, et que le corps commence à glisser. Il est clair qu'en cet instant l'énergie du frottement sera égale au poids du corps, multiplié par le sinus de l'angle que le plan fait avec l'horizon. On a été conduit ainsi à admettre que l'intensité du frottement surmonté, ou

la quantité désignée par h dans le N°. précédent était sensiblement indépendante de l'étendue des surfaces frottantes et de la vitesse du mobile; qu'on pouvait la supposer proportionnelle à la pression, et la représenter par εR; ε étant un nombre donné par l'observation, qui dans beaucoup de cas diffère peu de la fraction $\frac{1}{3}$, et qui paraît dépendre du degré de poli des surfaces frottantes, de leur contexture physique, peut-être aussi de leur nature chimique et de la durée du contact. On peut consulter à ce sujet le *Cours de Mathématiques* de Bezout, à l'usage de l'Artillerie, T. IV., N°. 734., et le *Précis élémentaire de Physique* de M. Biot, T. I., livre II., chap. 23.

Le frottement dit de la seconde espèce, c'est-à-dire celui des corps qui roulent en glissant, est encore moins bien connu; on admet par analogie que son intensité h peut aussi être représentée par une fonction de la forme εR, ε ayant, toutes circonstances égales d'ailleurs, une valeur moindre que pour le frottement de la première espèce. Au reste notre objet, dans cet article, n'est point d'exposer de nouvelles recherches sur la cause et la nature physique du frottement, mais de déduire les conséquences mathématiques des hypothèses communément admises. Pour étudier ces consequences, il faut encore ici, et à plus forte raison, recourir à des considérations indirectes, telles que celles que nous avons employées dans le mémoire précédent: car les équations du N°. 1. sont rebelles à toute intégration, hormis dans un si petit nombre de cas, qu'on ne pourrait se borner à les considérer, sans courir le risque de trop particulariser la question.

3. Examinons d'abord ce qui arrive à l'origine du mouvement, quand le corps, posé sur le plan fixe, est tiré de l'état de repos par l'action des forces continues X, Y, Z. Dans ce premier instant, les valeurs de p, q, r sont nulles; celles de a, b, c, a_1, etc. sont censées connues; les équations (2., 3. et 5.) se réduisent à

$$8.\quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = L' + \eta(Rc + f_1 c_1 + f_2 c_2) - \zeta(Rb + f_1 b_1 + f_2 b_2), \\ B\frac{dq}{dt} = M' + \zeta(Ra + f_1 a_1 + f_2 a_2) - \xi(Rc + f_1 c_1 + f_2 c_2), \\ C\frac{dr}{dt} = N' + \xi(Rb + f_1 b_1 + f_2 b_2) - \eta(Ra + f_1 a_1 + f_2 a_2); \end{cases}$$

$$9.\quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dp}{dt}(\eta c - \zeta b) + \frac{dq}{dt}(\zeta a - \xi c) + \frac{dr}{dt}(\xi b - \eta a) = 0,$$

$$10.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}+\dfrac{dp}{dt}(\eta c_1-\zeta b_1)+\dfrac{dq}{dt}(\zeta a_1-\xi c_1)+\dfrac{dr}{dt}(\xi b_1-\eta a_1)=0, \\ \dfrac{d^2\beta}{dt^2}+\dfrac{dp}{dt}(\eta c_2-\zeta b_2)+\dfrac{dq}{dt}(\zeta a_2-\xi c_2)+\dfrac{dr}{dt}(\xi b_2-\eta a_2)=0. \end{cases}$$

Si le frottement détruit la vitesse du point (ξ, η, ζ), les neuf équations (1., 8., 9. et 10.) détermineront les valeurs des neuf inconnues

$$11.\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2},\ \frac{d^2\beta}{dt^2},\ \frac{d^2\gamma}{dt^2};\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt},\ \frac{dr}{dt};\ R,\ f_1,\ f_2,$$

relatives au premier instant du mouvement; et il faudra que ces valeurs satisfassent aux deux inégalités

$$12.\quad R>0,\quad f_1^2+f_2^2<\varepsilon^2R^2.$$

Si au contraire le frottement est surmonté, les équations (10.) ne subsisteront plus; on aura en leur place les équations (6. et 7.), dont la première devient, au moyen de la valeur adoptée pour h^2:

$$f_1^2+f_2^2=\varepsilon^2R^2.$$

A l'égard de la seconde, son second membre prend dans ce cas la forme $\frac{0}{0}$, attendu que les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, p, q, r s'évanouissent; mais en différentiant les numérateur et dénominateur de ce second membre par rapport à t, et faisant:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{dp}{dt}(\eta c_1-\zeta b_1)+\frac{dq}{dt}(\zeta a_1-\xi c_1)+\frac{dr}{dt}(\xi b_1-\eta a_1)=I',$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{dp}{dt}(\eta c_2-\zeta b_2)+\frac{dq}{dt}(\zeta a_2-\xi c_2)+\frac{dr}{dt}(\xi b_2-\eta a_2)=J',$$

on a

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{I'}{J'},$$

d'où

$$13.\quad f_1=-\frac{\varepsilon RI'}{\sqrt{(I'^2+J'^2)}},\quad f_2=-\frac{\varepsilon RJ'}{\sqrt{(I'^2+J'^2)}}.$$

Le nombre des équations nécessaires pour la détermination de toutes les inconnues, se trouvera ainsi complété; et quand on en aura déduit leurs valeurs, il n'y aura plus qu'à vérifier l'inégalité $R>0$.

Avant d'aller plus loin, nous insisterons sur une remarque essentielle pour ce qui doit suivre. Admettons que le corps ne parte point de l'état de repos, mais qu'à l'origine du mouvement il subisse une percussion de la part d'un corps étranger, ou qu'il vienne choquer le plan fixe avec une vitesse connue: l'effet de cette impulsion ou de ce choc se produira dans un intervalle de temps inappréciable, durant lequel on

pourra négliger l'action des forces continues analogues à la pesanteur. Cet effet équivaudra à celui d'un certain système de forces, dont on peut assigner la résultante et le couple résultant, et qui agiraient sur le corps, aussi dans un intervalle de temps inappréciable: pour la commodité du langage, nous les désignerons sous le nom de forces instantanées. Désignons aussi par X_0, Y_0, Z_0, les projections de la résultante de ces forces, parallèlement aux axes des x, y, z; et par L'_0, M'_0, N'_0, les sommes de leurs moments relativement aux axes des x', y', z'. Les valeurs initiales des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt};\ p,\ q,\ r$$

ne seront plus nulles; et il faudra assigner ces valeurs pour déterminer celles des constantes arbitraires qui entreraient dans les équations du mouvement, après la première intégration. Pour cela il faut tenir compte de la résistance que le plan offre au point (ξ, η, ζ) dans le sens des z positives, résistance qui est la somme des pressions exercées pendant la durée inappréciable de l'action des forces instantanées: cette somme de pressions sera ce que l'on appèle d'ordinaire une percussion, et nous la désignerons par P. De même le frottement total, correspondant à la percussion P, sera la somme des frottements qui correspondent à chacune des pressions dont P se compose. Nous représenterons par F sa valeur numérique, par F_1, F_2, ses projections sur les axes des x, y; par H la valeur de F, quand le point (ξ, η, ζ) surmonte la résistance que le frottement lui oppose; et enfin nous admettrons que H est de la forme εP, ce qui résulte, si non d'expériences précises, au moins de l'analogie.

Cela posé, en vertu des principes connus de dynamique, les valeurs initiales des quantités

$$14.\quad \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt};\ p,\ q,\ r;\ P,\ F_1,\ F_2,$$

seront données par les équations suivantes:

$$15.\quad M\frac{d\alpha}{dt} = X_0 + F_1,\quad M\frac{d\beta}{dt} = Y_0 + F_2,\quad M\frac{d\gamma}{dt} = Z_0 + P;$$

$$16.\quad \begin{cases} Ap = L'_0 + \eta(Pc + F_1c_1 + F_2c_2) - \zeta(Pb + F_1b_1 + F_2b_2), \\ Bq = M'_0 + \zeta(Pa + F_1a_1 + F_2a_2) - \xi(Pc + F_1c_1 + F_2c_2), \\ Cr = N'_0 + \xi(Pb + F_1b_1 + F_2b_2) - \eta(Pa + F_1a_1 + F_2a_2); \end{cases}$$

$$17.\quad \frac{d\gamma}{dt} + p(\eta c - \zeta b) + q(\zeta a - \xi c) + r(\xi b - \eta a) = 0;$$

auxquelles il faudra joindre, quand le frottement détruit la vitesse du point de contact:

$$18.\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} + p(\eta c_1 - \zeta b_1) + q(\zeta a_1 - \xi c_1) + r(\xi b_1 - \eta a_1) = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} + p(\eta c_2 - \zeta b_2) + q(\zeta a_2 - \xi c_2) + r(\xi b_2 - \eta a_2) = 0; \end{cases}$$

ce qui comportera les inégalités

$$19.\quad P > 0,\quad F_1^2 + F_2^2 < \varepsilon^2 P^2.$$

Si au contraire le point (ξ, η, ζ) prend une vitesse parallèle au plan fixe, on aura, en conservant aux lettres I, J, la signification qui leur a été attribuée précédemment:

$$20.\quad F_1 = -\frac{\varepsilon PI}{\sqrt{(I^2+J^2)}},\quad F_2 = -\frac{\varepsilon PJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}}.$$

Maintenant il est visible que les formules (15. — 20.) se changeront dans celles (1., 8. — 13.), si l'on écrit

$$X, Y, Z;\ L', M', N';\ R, f_1, f_2,$$

au lieu de

$$X_0, Y_0, Z_0;\ L'_0, M'_0, N'_0;\ P, F_1, F_2,$$

et qu'on substitue les inconnues (11.) aux inconnues (14.). Ainsi, lorsqu'on se borne à considérer les circonstances du premier instant du mouvement, la question est absolument la même, soit que les forces qui tirent le corps du repos, lui communiquent dans ce premier instant une vitesse finie ou infiniment petite. Ce point au reste semble assez évident, pour que nous n'ayons pas cru devoir y insister dans le précédent mémoire; mais en raison des difficultés que peut amener la considération du frottement, il n'était pas inutile d'y revenir ici avec plus de détails.

4. Reprenons l'hypothèse où le corps est tiré du repos par des forces continues. Si le frottement détruit la vitesse du point de contact, la résolution des neuf équations (1., 8., 9. et 10.) ne saurait offrir d'embarras, puisqu'il ne s'agira que d'éliminer entre des équations linéaires; mais dans le cas contraire, les équations (10.) étant remplacées par celles (13.), et les inconnues du problême, qui entrent dans I', J', se trouvant enveloppées d'un radical carré placé en dénominateur, on voit que l'élimination conduirait en général à des équations finales de degrés élevés, et susceptibles de plusieurs racines réelles. Cependant on conçoit que la question, de sa nature, ne peut comporter qu'une solution et qu'un seul système de valeurs pour chacune des inconnues. Il faut donc que

les équations finales n'aient qu'une seule racine réelle, ou, si elles en ont plusieurs, que toute soient exclues, hormis une, par des conditions d'inégalité telles que celle $R > 0$: c'est ce que nous aurons lieu de vérifier dans la suite.

Les formules se simplifieraient beaucoup, si l'on connaissait a priori la direction du mouvement que doit prendre le point (ξ, η, ζ); car en menant suivant cette direction l'axe des x dont la position sur le plan fixe est arbitraire, J' s'évanouirait ainsi que f_2; f_1 se réduirait à

$$-\frac{\varepsilon R I'}{\sqrt{(I'^2)}}$$

ou à $\mp \varepsilon R$, selon que I' serait positif ou négatif, à cause que le radical doit toujours être pris positivement. Toutes les équations redeviendraient linéaires, mais il en résulterait une ambiguité dans la valeur de f_1: car il faut bien remarquer que la valeur et le signe de f_1 dépendent de la valeur de R et du signe de I', qui peuvent varier à leur tour, selon qu'on a substitué pour f_1, dans les équations (1., 8., 9.), la valeur $-\varepsilon R$ ou celle $+\varepsilon R$.

Généralement on observe en analyse que lorsqu'un terme algébrique, affecté d'un signe radical, devient pour certaines valeurs particulières un carré parfait, il en résulte une discontinuité dans l'expression des fonctions qui en dépendent. C'est ainsi que les formules pour l'attraction des sphéroïdes, quand elles peuvent s'obtenir en termes finis, changent brusquement de forme, dans le passage des points intérieurs aux points extérieurs. C'est encore ainsi que, dans le mouvement d'un point matériel pesant, la direction de la vitesse varie d'une manière continue, si le point décrit une parabole, tandis qu'elle varie brusquement, quand le point, après s'être élevé en ligne droite, retombe verticalement en sens contraire; ce qui est dû à une circonstance semblable à celle qui nous occupe ici.

Désignons par I'_1, I'_2, les deux valeurs que prend I', selon qu'on substitue pour f_1 la valeur $-\varepsilon R$ ou celle $+\varepsilon R$, et par R_1, R_2, les valeurs correspondantes de R, il faudra que les deux systèmes d'inégalités

$$21.\quad \begin{cases} R_1 > 0, & I'_1 > 0, \\ R_2 > 0, & I'_2 < 0, \end{cases}$$

ne soient pas simultanément satisfaits; car autrement il s'en suivrait qu'on n'aurait aucune raison de décider si le point (ξ, η, ζ) se meut dans le sens des x positives ou dans celui des x négatives, ce qui serait absurde.

Par la même raison, s'il a été reconnu que le point ne peut, ni se détacher du plan fixe, ni être rendu immobile par la résistance du frottement, il faudra que l'un des deux systèmes (21.) soit nécessairement vérifié.

Quand on considère d'autres instants du mouvement, ou lorsqu'à l'origine de ce mouvement le corps a déjà pris une vitesse finie par l'action de forces instantanées, les mêmes difficultés ne se présentent plus: car alors les valeurs de f_1, f_2 sont données par les équations

$$f_1 = -\frac{\varepsilon RI}{\sqrt{(I^2+J^2)}},\quad f_2 = -\frac{\varepsilon RJ}{\sqrt{(I^2+J^2)}},$$

dans les quelles I, J sont des nombres, censés connus pour l'instant que l'on considère. On n'a plus qu'à éliminer entre des équations linéaires; et si l'un de ces nombres, J par exemple, devient nul, le signe connu de I détermine immédiatement celui qu'il faut donner à f_1. On voit donc qu'il existe une différence essentielle entre les formules relatives au premier instant du mouvement, et celles qui se rapportent aux instants subséquents.

5. Il existe un cas où l'on peut être certain a priori que le mouvement du point de contact aura lieu constamment en ligne droite, et où par conséquant l'on peut choisir la direction de l'axe des x, de manière à ce que la composante f_2 du frottement soit constamment nulle. C'est celui où le plan des $x'z'$ est perpendiculaire au plan xy, et comprend le point de contact aussi bien que la résultante des forces qui sollicitent le corps. Il est clair qu'il n'y aurait aucune raison pour que le point de contact sortît de la ligne droite qui fait l'intersection des deux plans $x'z'$ et xy, et c'est d'ailleurs ce que le calcul montre. En effet, faisant alors coïncider le plan des xz avec celui des $x'z'$, on aura d'après les hypothèses admises:

22. $0=\eta=Y=L'=N'=b=b_1=a_2=c_2,\quad b_2=1,$

ce qui réduira les équations (1. 8. et 9.) à

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2}=X+f_1,\quad M\frac{d^2\beta}{dt^2}=f_2,\quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2}=Z+R;$$

$$A\frac{dp}{dt}=-\zeta f_2,\quad C\frac{dr}{dt}=\xi f_2,\quad B\frac{dq}{dt}=M'+\zeta(Ra+f_1a_1)-\xi(Rc+f_1c_1);$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\frac{dq}{dt}(\zeta a-\xi c)=0.$$

On aura

$$J'=\frac{d^2\beta}{dt^2}-\zeta\frac{dp}{dt}+\xi\frac{dr}{dt}=f_2\left(\frac{1}{M}+\frac{\zeta^2}{A}+\frac{\xi^2}{B}\right);$$

il serait donc impossible que f_2 fut de signe contraire à J', et par conséquent ceci entraîne

$$0 = f_2 = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Le signe de f_1 se déterminera d'après ce qui a été dit précédemment.

Les mêmes conséquences pouvant se déduire de proche en proche pour tous les instants du mouvement, il en faut conclure que p et r demeureraient constamment nuls, ensorte que les équations à intégrer se réduiraient dans ce cas à

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = X + f_1, \quad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = Z + R;$$

$$B\frac{dq}{dt} = M' + \zeta(Ra + f_1 a_1) - \xi(Rc + f_1 c_1), \quad \frac{d\gamma}{dt} + q(\zeta a - \xi c) = 0;$$

dans lesquelles on aurait, d'après les formules connues:

$$q = \frac{d\theta}{dt}, \quad a = -\sin\theta, \quad c = \cos\theta, \quad a_1 = -\cos\theta, \quad c_1 = \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des deux plans xy, $x'y'$. Il faudrait en outre y faire $f_1 = \mp \varepsilon R$, selon que I', ou

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dq}{dt}(\zeta a_1 - \xi c_1)$$

serait, dans le premier instant du mouvement, une quantité positive ou négative. Ainsi dans ce cas, avant d'intégrer les formules du mouvement, il faudrait déterminer le signe de la vitesse du point de contact au premier instant. Quelquefois ce signe sera évident sans calcul; mais plus généralement on devra construire les deux systèmes d'inégalités (21.), et reconnaître lequel est vérifié.

6. Lorsque, dans un instant quelconque du mouvement, la vitesse du point de contact deviendra nulle, il faudra, selon l'observation déjà faite par Mr. Poisson *), examiner si, à partir de cet instant, une partie du frottement εR ne suffit pas pour maintenir nulle la vitesse du point; et, si cela est, employer les équations (5.) propres à ce cas. Autrement, et quand le point (ξ, η, ζ) doit continuer à se mouvoir, l'intensité et la direction de la vitesse se détermineront par des formules analogues à celles qui se rapportent au premier instant du

*) Voyez un Mémoire intitulé: *Formules relatives aux effets du tir d'un canon sur les différentes parties de son affût*, imprimé à Paris en 1826, et une note du même Géomètre, *sur le frottement des corps qui tournent*, insérée dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, etc. T. IV. N°. 93.

mouvement, et sujettes aux mêmes observations. Dans le cas où le mouvement du point de contact a lieu constamment suivant la même droite, il pourra se faire que la vitesse change de signe, après avoir été nulle.

Enfin il peut arriver que la vitesse du point de contact, quand une fois elle est nulle, demeure nulle en suite sans qu'il y ait frottement; et dans ce cas il faudra que les valeurs de f_1, f_2, résultant des équations (5.), s'évanouissent. Cette circonstance se présente dans l'exemple traité par Mr. Poisson (*Bulletin des sc. math.* T. VI. p. 165.), où il s'agit d'une sphère homogène, pesante, qui roule sur un plan horizontal, en vertu d'une impulsion dirigée dans un plan vertical mené par le centre de gravité, abstraction faite d'ailleurs de la résistance de l'air. A partir de l'instant où la vitesse du point de contact se trouve nulle, les deux mouvements de translation et de rotation deviennent uniformes et dirigés en sens contraires, en sorte que la vitesse du point de contact reste nulle d'elle-même et sans l'action du frottement. Le savant auteur observe à cette occasion: „Que le frottement qui suffit pour ramener au repos les corps qui glissent sans tourner, ne fait donc que réduire à l'uniformité les mouvements de ceux qui tournent en glissant." Mais il est clair que cette remarque ne peut s'appliquer dans les mêmes termes, qu'aux cas très particuliers, où s'évanouissent les valeurs de f_1, f_2, données par les formules générales.

Nous ferons encore observer qu'il serait beaucoup plus commode pour le calcul, de supposer le frottement proportionnel à la vitesse du point de contact. Alors les valeurs de f_1, f_2 seraient de la forme $-\varepsilon I$, $-\varepsilon J$; toutes les équations redeviendraient linéaires, et quand J s'évanouirait, il n'y aurait pas d'ambiguité de signe dans la valeur de f_1. A la vérité, si le corps partait de l'état de repos, le frottement se trouverait nul dans le premier instant du mouvement, supposition qu'il semble peu naturel d'admettre. Pour échapper à cette conséquence, on pourrait supposer que f_1, f_2 deviennent alors égaux à $-\varepsilon I'$, $-\varepsilon J'$. L'hypothèse de la proportionnalité du frottement à la vitesse s'est présentée d'elle-même aux Géomètres qui se sont occupés les premiers d'introduire dans le calcul la considération du frottement. L'expérience montre qu'elles n'est pas admissible, quand il s'agit du frottement de la première espèce; mais il pourrait se faire qu'elle ne s'éloignât pas autant de la réalité physique, pour le frottement de la seconde espèce.

7. Reprenons plus specialement le cas où le corps est tiré du repos par l'action de forces instantanées, et pour simplifier, supprimons les indices qui affectent les lettres X'_0, L'_0, etc. Par la même raison faisons

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha', \quad \frac{d\beta}{dt} = \beta', \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma';$$

$$23. \quad \begin{cases} \eta c - \zeta b = \lambda, \ \zeta a - \xi c = \mu, \ \xi b - \eta a = \nu; \\ \eta c_1 - \zeta b_1 = \lambda_1, \ \ldots\ldots \ \eta c_2 - \zeta b_2 = \lambda_2, \text{ etc.} \end{cases}$$

les équations (15. — 18.) prendront la forme:

$$24. \quad M\alpha' = X + F_1, \quad M\beta' = Y + F_2, \quad M\gamma' = Z + P;$$

$$25. \quad \begin{cases} Ap = L' + P\lambda + F_1\lambda_1 + F_2\lambda_2, \\ Bq = M' + P\mu + F_1\mu_1 + F_2\mu_2, \\ Cr = N' + P\nu + F_1\nu_1 + F_2\nu_2; \end{cases}$$

$$26. \quad \gamma' + p\lambda + q\mu + r\nu = 0,$$

$$27. \quad \begin{cases} \alpha' + p\lambda_1 + q\mu_1 + r\nu_1 = 0, \\ \beta' + p\lambda_2 + q\mu_2 + r\nu_2 = 0. \end{cases}$$

Il est bien entendu, d'après tout ce qui précède, que les mêmes équations sont propres à déterminer les circonstances du premier instant du mouvement, quand le corps est tiré du repos par des forces continues; pourvu que X, Y, etc. représentent des forces de cette nature; α', β', γ' les valeurs initiales de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$; et pourvu enfin qu'on remplace p, q, r, F_1, F_2, P, par $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, f_1, f_2, R.

Ainsi, dans le cas où le frottement détruit la vitesse du point de contact, en éliminant entre les neuf équations précédentes, et faisant pour abréger:

$$S = \frac{1}{M} + \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C}, \quad S_1 = \frac{1}{M} + \frac{\lambda_1^2}{A} + \frac{\mu_1^2}{B} + \frac{\nu_1^2}{C}, \text{ etc.}$$

$$T_{0,1} = \frac{\lambda\lambda_1}{A} + \frac{\mu\mu_1}{B} + \frac{\nu\nu_1}{C}, \quad T_{0,2} = \frac{\lambda\lambda_2}{A} + \frac{\mu\mu_2}{B} + \frac{\nu\nu_2}{C}, \text{ etc.}$$

$$U = \frac{Z}{M} + \frac{L'\lambda}{A} + \frac{M'\mu}{B} + \frac{N'\nu}{C}, \quad U_1 = \frac{X}{M} + \frac{L'\lambda_1}{A} + \ldots, \quad U_2 = \frac{Y}{M} + \frac{L'\lambda_2}{A} \ldots$$

$$G = SS_1S_2 - ST_{1,2}^2 - S_1T_{0,2}^2 - S_2T_{0,1}^2 + 2T_{0,1}T_{0,2}T_{1,2},$$

il viendra:

$$P = -\frac{1}{G}\{U(S_1S_2 - T_{1,2}^2) + T_{0,2}(U_1T_{1,2} - S_1U_2) + T_{0,1}(U_2T_{1,2} - S_2U_1)\},$$

$$F_1 = -\frac{1}{G}\{U_1(SS_2 - T_{0,2}^2) + T_{0,1}(U_2T_{0,2} - S_2U) + T_{1,2}(UT_{0,2} - SU_2)\},$$

$$F_2 = -\frac{1}{G}\{U_2(SS_1 - T_{0,1}^2) + T_{0,2}(U_1T_{0,1} - S_1U) + T_{1,1}(UT_{0,2} - SU_1)\}.$$

Si les nombres $T_{0,1}$, $T_{0,2}$, $T_{1,2}$ venaient à s'évanouir, les valeurs de P, F_1, F_2 se réduiraient simplement à

$$-\frac{U}{S}, -\frac{U_1}{S_1}, -\frac{U_2}{S_2},$$

et elles seraient respectivement de signes contraires à U, U_1, U_2, attendu que S, S_1, S_2 sont des quantités positives de leur nature.

Lorsque la vitesse du point de contact n'est pas détruite, les deux équations (27.) ne subsistent plus, et l'on a en leur place;

$$F_1^2 + F_2^2 = \varepsilon^2 P^2, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{U_1 + PT_{0,1} + F_1 S_1 + F_2 T_{1,2}}{U_2 + PT_{0,2} + F_1 T_{1,2} + F_2 S_2};$$

mais la détermination des valeurs générales de P, F_1, F_2 entraînerait un calcul pénible, en raison du degré auquel monteraient les équations finales.

8. Eclaircissons d'abord la question par quelques exemples fort simples; et pour considérer en premier lieu le plus simple de tous, admettons que le corps soit une sphère homogène, d'un rayon égal à ϱ. La direction des axes principaux devenant arbitraire, on pourra supposer qu'ils sont parallèles à l'origine du mouvement à ceux des x, y, z, et que celui des z' en particulier coïncide avec l'axe des z. La condition du parallélisme donne en général:

$$0 = a = b = b_1 = c_1 = a_2 = c_2, \quad 1 = c = a_1 = b_2,$$

et par suite

28. $\lambda = \eta$, $\mu = -\xi$, $\nu = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \zeta$, $\nu_1 = -\eta$; $\lambda_2 = -\zeta$, $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = \xi$.

On a de plus, pour le cas particulier de la sphère:

$$29. \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\varrho; \quad A = B = C;$$

au moyen de quoi les équations (25., 26. et 27.) deviennent:

$$30. \quad \begin{cases} Ap = L' + \varrho F_2, \quad Aq = M' - \varrho F_1, \quad Ar = N'; \\ \gamma' = 0; \quad \alpha' - \varrho q = 0, \quad \beta' + \varrho p = 0. \end{cases}$$

Attendu que γ' s'évanouit, la troisième équation (24.) donne $P = -Z$: cette valeur de P est la même, que la résistance du frottement soit surmontée ou non. Pour que la sphère ne se détache pas du plan, il faut qu'on ait $Z < 0$.

Quand la vitesse du point de contact est anéantie par le frottement, l'élimination entre les équations (24. et 30.) donne, en substituant pour M, A, leurs valeurs connues en fonction de ϱ:

$$F_1 = \frac{5M' - 2\varrho X}{7\varrho}, \quad F_2 = -\frac{5L' + 2\varrho Y}{7\varrho}.$$

Il faut qu'on ait
$$F_1^2+F_2^2<\varepsilon^2 P^2,$$
ou
$$31.\quad (5M'-2\varrho X)^2+(5L'+2\varrho Y)^2<49\varrho^2\varepsilon^2 Z^2.$$

Si la vitesse du point de contact n'est pas détruite, les deux dernières équations (30.) n'auront plus lieu; elles seront remplacées par
$$32.\quad F_1^2+F_2^2=\varepsilon^2P^2=\varepsilon^2Z^2,\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{\alpha'-\varrho q}{\beta'+\varrho p}.$$
En substituant dans cette dernière équation les valeurs de α', β', p, q, tirées des équations (24. et 30.), il vient
$$33.\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{\frac{X}{M}-\varrho\frac{M'}{A}+\left(\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}\right)F_1}{\frac{Y}{M}+\varrho\frac{L'}{A}+\left(\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}\right)F_2},$$
d'où l'on déduit immédiatement par la théorie des proportions:
$$34.\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}}{\frac{Y}{M}+\frac{\varrho L'}{A}}=\frac{2\varrho X-5M'}{2\varrho Y+5L'}.$$

Observons maintenant que l'équation (33.) étant la même que la seconde équation (32.), les numérateur et dénominateur de son second membre expriment les composantes, suivant les axes des x et des y, de la vitesse prise par le point de contact. Dès lors, d'après la manière dont agit le frottement, il faut que F_1, F_2 soient respectivement de signes contraires aux numérateur et dénominateur de ce second membre, ce qui suppose 1°: que F_1, F_2 sont respectivement de signes contraires à
$$\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A},\quad \frac{Y}{M}+\frac{\varrho L'}{A};$$
2° que F_1, F_2 sont numériquement plus petits que
$$\frac{\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}}{\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}},\quad \frac{\frac{Y}{M}+\frac{\varrho L'}{A}}{\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}},$$
ou que
$$\frac{2\varrho X-5M'}{7\varrho},\quad \frac{2\varrho Y+5L'}{7\varrho}.$$
En vertu des équations (32. et 34.), et au moyen de ce que Z doit être une quantité négative, on satisfait à la première condition, en prenant
$$F_1=\frac{(2\varrho X-5M')\varepsilon Z}{\sqrt{[(2\varrho X-5M')^2+(2\varrho Y+5L')]^2}},$$
$$F_2=\frac{(2\varrho Y+5L')\varepsilon Z}{\sqrt{[(2\varrho X-5M')^2+(2\varrho Y+5L')]^2}}.$$

La seconde condition se trouve alors satisfaite d'elle même. En effet, si elle ne l'était pas, et qu'on eût par exemple:

$$F_1^2\left(\frac{1}{M}+\frac{\varrho^2}{A}\right)^2 > \left(\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}\right)^2,$$

ou

$$49\varrho^2 F_1^2 > (2\varrho X - 5M')^2,$$

F_1 se trouverait de même signe que le numérateur du second membre de l'équation (33.); il faudrait donc, pour que cette équation pût subsister, que F_2 fût aussi de même signe que le dénominateur de ce second membre, et par suite que l'on eût

$$49\varrho^2 F_2^2 > (2\varrho Y + 5L')^2.$$

Ajoutant ces deux dernières inégalités, et substituant pour $F_1^2+F_2^2$ sa valeur $\varepsilon^2 Z^2$, il viendrait

$$49\varrho^2\varepsilon^2 Z^2 > (2\varrho X - 5M')^2 + (2\varrho Y + 5L')^2;$$

mais puisque, par hypothèse, la vitesse du point de contact n'est pas détruite, cette inégalité, qui est la même que celle (31.) ne saurait être vérifiée.

Si maintenant nous comparons les équations (32. et 34.), nous en tirerons

$$35.\quad \frac{\alpha'-\varrho q}{\beta'+\varrho p} = \frac{\frac{X}{M}-\frac{\varrho M'}{A}}{\frac{Y}{M}+\frac{\varrho L'}{A}},$$

et comme le premier membre de cette dernière équation est la même chose que le second membre de l'équation (33.), il résultera de l'analyse précédente, que les numérateurs et dénominateurs des deux membres de l'équation (35.) seront respectivement de mêmes signes.

Or, dans le cas où l'on supposerait que la sphère vient choquer le plan fixe avec une vitesse connue, il faudrait, pour avoir les éléments de son mouvement après le choc, remplacer dans les formules qui précèdent, X, Y, L', M', par $M\alpha_0'$, $M\beta_0'$, Ap_0, Aq_0; α_0' désignant la valeur de α' immédiatement avant le choc, et ainsi de suite. L'équation (35.) donnerait donc

$$\frac{\alpha'-\varrho q}{\beta'+\varrho p} = \frac{\alpha_0'-\varrho q_0}{\beta_0'+\varrho p_0},$$

on en devroit conclure „que la vitesse du point de contact, décomposée parallèlement au plan fixe, serait dirigée suivant la même droite, et dans le même sens, avant et après le choc:" propriété remarquable et particulière à la sphère.

En admettant, ce qui est le cas déjà traité par Mr. Poisson (*Bulletin*, T. VI. p. 172.), que Y, L', et par suite F_2 s'évanouissent, on a, quand la vitesse du point de contact est détruite, à la place de l'inégalité (31.), celle:

$$36. \quad \pm(5M' - 2\varrho X) < -7\varrho\varepsilon Z,$$

le signe $\pm$ étant choisi de manière à rendre le premier membre positif, et le second l'étant toujours, à cause de $Z < 0$. Si cette inégalité n'est pas satisfaite et que le frottement soit surmonté, on aura $F_1 = \pm\varepsilon Z$, selon que

$$\alpha' - \varrho q \gtrless 0.$$

Mais dans la première supposition

$$\alpha' - \varrho q = \frac{X}{M} - \frac{\varrho M'}{A} + \varepsilon Z\left(\frac{1}{M} + \frac{\varrho^2}{A}\right) = \frac{1}{2M\varrho}\cdot(2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z),$$

et dans la seconde au contraire

$$\alpha' - \varrho q = \frac{1}{2M\varrho}\cdot(2\varrho X - 5M' - 7\varrho\varepsilon Z).$$

Il faut que les deux inégalités

$$37. \quad \begin{cases} 2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z > 0, \\ 2\varrho X - 5M' - 7\varrho\varepsilon Z < 0, \end{cases}$$

ne puissent pas être satisfaites simultanément, et que l'une d'elles le soit toujours. Or supposons, pour fixer les idées:

$$2\varrho X - 5M' > 0,$$

l'inégalité (36.) pourra s'écrire

$$2\varrho X - 5M' + 7\varrho\varepsilon Z < 0,$$

et puisqu'elle n'est pas vérifiée, la première inégalité (37.) le sera nécessairement; tandis que la seconde ne saurait l'être, puisque son premier membre est la somme de deux nombres positifs: $2\varrho X - 5M'$ et $-7\varrho\varepsilon Z$. L'inverse aurait eu lieu, si l'on avait supposé $2\varrho X - 5M' < 0$.

9. Si la sphère venait choquer le plan fixe, et qu'elle fût douée d'élasticité, ainsi que cela arrive toujours dans la nature, la percussion au point de contact, au lieu d'être égale à $-Z$, ou à $-M\gamma'_0$ (γ'_0 désignant la valeur de γ' immédiatement avant le choc), prendrait pour valeur $-(1+\omega)M\gamma'_0$, en indiquant par ω le coëfficient de l'élasticité, qui deviendrait égal à 1, si l'élasticité était parfaite. Il semble naturel d'admettre, avec Mr. Poisson, que le frottement total F est toujours proportionnel dans ce cas à la percussion ou à la somme des pressions,

et de la forme εP. En partant de ce principe, qu'il serait bon toutefois de voir vérifier par l'expérience, la condition qui doit subsister pour que la vitesse du point de contact s'évanouisse après le choc, sera, au lieu de l'inégalité (31.):

$$(5q_0-2\varrho\alpha'_0)^2+(5p_0+2\varrho\beta'_0)^2<49\varrho^2\varepsilon^2(1+\omega)^2\gamma'^2_0.$$

On aura d'ailleurs, d'après ce qu'on a vu dans le N°. précédent:

$$F_1=\frac{5Aq_0-2\varrho M\alpha'_0}{7\varrho},\quad F_2=-\frac{5Ap_0+2\varrho M\beta'_0}{7\varrho};$$

et si l'on fait la substitution des valeurs de F_1, F_2, P dans les équations (24.) qui deviennent ici

38. $M\alpha'=M\alpha'_0+F_1,\quad M\beta'=M\beta'_0+F_2,\quad M\gamma'=M\gamma'_0+P;$

puis qu'on remplace M et A par leurs valeurs en fonction de ϱ, il viendra, toutes réductions faites:

$$\alpha'=\tfrac{1}{7}(5\alpha'_0+2\varrho q_0),\quad \beta'=\tfrac{1}{7}(5\beta'_0-2\varrho p_0),\quad \gamma'=-\omega\gamma'_0.$$

Désignant par ϖ l'angle de réflexion du centre de la sphère, on aura

$$\operatorname{tang}\varpi=\frac{\gamma'}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}}=\frac{-7\omega\gamma'_0}{\sqrt{[(5\alpha'_0+2\varrho q_0)^2+(5\beta'_0-2\varrho p_0)^2]}}.$$

Au contraire, quand la vitesse du point de contact ne s'évanouit pas, on a, d'après ce qui a été dit précédemment:

$$F_1^2+F_2^2=\varepsilon^2P^2=\varepsilon^2(1+\omega)^2M^2\gamma'^2_0,\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{\alpha'_0-\varrho q_0}{\beta'_0+\varrho p_0};$$

ce qui, joint aux équations (38.), donne:

$$\alpha'-\alpha'_0=-\frac{\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0(\alpha'_0-\varrho q_0)}{\sqrt{[(\alpha'_0-\varrho q_0)^2+(\beta'_0+\varrho p_0)^2]}},$$

$$\beta'-\beta'_0=-\frac{\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0(\beta'_0+\varrho p_0)}{\sqrt{[(\alpha'_0-\varrho q_0)^2+(\beta'_0+\varrho p_0)^2]}}.$$

Dans le cas particulier où β'_0, p_0, et par suite β' et F_2 sont nuls, on en déduit:

$$\operatorname{tang}\varpi=\frac{\gamma'}{\alpha'}=-\frac{\omega\gamma'_0}{\alpha'_0-\varepsilon(1+\omega)\gamma'_0},$$

en sorte que l'angle de réflexion est alors indépendant de la vitesse de rotation de la sphère, comme Mr. Poisson en a fait la remarque dans le mémoire cité (p. 175.); mais ce résultat ne subsiste pas pour les valeurs générales de α', β', telles que nous venons de les écrire.

10. L'analyse du N°. 8. s'applique non seulement à la sphère, mais à tout corps de révolution homogène, dont l'axe de révolution est perpendiculaire au plan fixe. Considérons maintenant un ellipsoïde, dont l'un des axes principaux, celui des z', coïncide encore avec l'axe des z,

ensorte qu'on puisse prendre les x, y, respectivement parallèles aux x', y'. En désignant par 2ϱ la valeur numérique de l'axe des z', les équations (28.) et les trois premières (29.) subsisteront toujours; on en déduira de même $\gamma' = 0$, $P = -Z$, et $Z < 0$, condition pour que l'ellipsoïde ne soit pas soulevé, et qui doit avoir lieu, soit que la vitesse du point de contact s'évanouisse ou non.

Dans le premier de ces deux cas, on aura

$$39. \quad \begin{cases} Ap = L' + \varrho F_2, \quad Bq = M' - \varrho F_1, \quad Cr = N'; \\ \alpha' - \varrho q = 0, \quad \beta' + \varrho p = 0; \end{cases}$$

et ces équations, jointes à celles (24.), donneront:

$$F_1 = \frac{K'\varrho M' - X}{1 + K'\varrho^2}, \quad F_2 = -\frac{K\varrho L' + Y}{1 + K\varrho^2},$$

expressions dans les quelles on a fait, pour simplifier:

$$\frac{M}{A} = K, \quad \frac{M}{B} = K',$$

Il faudra de plus que l'inégalité

$$40. \quad \left(\frac{K'\varrho M' - X}{1 + K'\varrho^2}\right)^2 + \left(\frac{K\varrho L' + Y}{1 + K\varrho^2}\right)^2 < \varepsilon^2 Z^2$$

se trouve vérifiée.

Si elle ne l'est pas, et que le frottement soit surmonté, on aura, au lieu des deux dernières équations (39.), celles (32.), dont la seconde devient, par la substitution des valeurs de α', β', p, q:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{X - K'\varrho M' + (1 + K'\varrho^2) F_1}{Y + K\varrho L' + (1 + K\varrho^2) F_2}.$$

Posons, pour un instant:

$$F_1 = x_{,}, \quad F_2 = y_{,}, \quad \varepsilon Z = h, \quad X - K'\varrho M' = m, \quad 1 + K'\varrho^2 = n,$$
$$Y + K\varrho L' = m', \quad 1 + K\varrho^2 = n',$$

on aura, pour déterminer $x_{,}$ et $y_{,}$, les deux équations:

$$41. \quad x_{,}^2 + y_{,}^2 = h^2, \quad \frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{m + n x_{,}}{m' + n' y_{,}}.$$

Le lieu de la première est un cercle, ayant son centre à l'origine des coordonnées rectangulaires $x_{,}$, $y_{,}$; la seconde peut s'écrire:

$$42. \quad (n' - n) x_{,} y_{,} + m' x_{,} - m y_{,} = 0,$$

et sous cette forme elle est évidemment celle d'une hyperbole équilatère, ayant ses asymptotes parallèles aux axes des coordonnées, et passant par l'origine. Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$:

$$x_{,,} = \frac{m}{n' - n}, \quad y_{,,} = -\frac{m'}{n' - n}.$$

$x_{,,}$ et $y_{,,}$ sont les lignes représentées (Tab. III. Fig. 1.) par OP et PC; leurs signes dépendront de ceux des quantités m, m', $n'-n$. Pour fixer les idées, on peut supposer que le point C tombe dans l'angle $Y_{,}OX_{,}$, ou que les coordonnées $x_{,,}$, $y_{,,}$ sont l'une et l'autre positives: les raisonnements seraient les mêmes dans tout autre supposition.

Maintenant il est clair 1° que le cercle (41.) et l'hyperbole (42.) ont en général quatre points d'intersection, désignés sur la figure par N, N', N'', N'''; 2° que, puisque la branche NON' passe par l'origine O, il y a au moins deux points d'intersection N, N', situés, l'un dans l'angle $Y_{,}OX_{,,}$, l'autre dans l'angle $X_{,}OY_{,,}$; 3° que les deux autres points d'intersection, s'ils existent, sont situés dans le même angle $Y_{,}OX_{,}$ qui comprend le centre C de l'hyperbole. On conçoit donc la possibilité que $x_{,}$, $y_{,}$, ou F_1, F_2, admettent quatre systèmes différents de valeurs reélles.

Mais en remontant à la seconde équation (41.), il faut observer que, par la nature de la question, $x_{,}$ et $y_{,}$ doivent être respectivement de signes contraires à $m+nx_{,}$ et $m'+n'y_{,}$; ce qui suppose: 1° que $x_{,}$ et $y_{,}$ sont respectivement de signes contraires à m, m'; 2° que $nx_{,}$, $n'y_{,}$ sont numériquement inférieurs à m, m', ensorte que

$$43.\quad \frac{m^2}{n^2} > x_{,}^2,\quad \frac{m'^2}{n'^2} > y_{,}^2.$$

La première condition suffit, d'après l'inspection de la figure, pour montrer que les points N', N'', N''' donnent des solutions étrangères à la question; il faut prouver qu'à l'égard du point N, la seconde condition, exprimée par inégalités (43.), est aussi satisfaite. Or si l'on avait, par exemple:

$$\frac{m^2}{n^2} < x_{,}^2,$$

m se trouvant de signe contraire a $nx_{,}$, et numériquement plus petit, tandis que m' est déjà de signe contraire à $n'y_{,}$, il résulterait de la seconde équation (41.) que m' serait aussi numériquement plus petit que $n'y_{,}$. On aurait donc

$$\frac{m'^2}{n'^2} < y_{,}^2,$$

et en conséquence

$$\frac{m^2}{n^2} + \frac{m'^2}{n'^2} < h_{,}^2,$$

ce qui serait la même chose que l'inégalité (40.) qui, par hypothèse, n'est pas vérifiée. Donc en définitive, il y a toujours un système de valeurs pour F_1, F_2, et il n'y en a qu'un seul qui satisfasse à la question.

11. Occupons nous maintenant de traiter d'une manière générale le cas où l'une des composantes du frottement, F_2, s'évanouit, en vertu des conditions (22.), expliquées au N°. 5. On aura d'abord

$$0 = \lambda = \nu = \lambda_1 = \nu_1 = \mu_2;$$

les équations (24. — 27.) se réduiront à

$$44.\quad \begin{cases} M\alpha' = X + F_1,\ M\gamma' = Z + P;\ Bq = M' + P\mu + F_1\mu_1; \\ \gamma' + q\mu = 0,\quad \alpha' + q\mu_1 = 0; \end{cases}$$

et si l'on fait

$$\frac{M}{B} = K',\quad S = 1 + K'\mu^2,\quad S_1 = 1 + K'\mu_1^2,\quad T = K'\mu\mu_1,$$
$$U = Z + K'\mu M',\quad U_1 = X + K'\mu_1 M',$$

on en tirera pour valeurs de $P_1 F_1$, dans le cas où la vitesse du point de contact est détruite:

$$P = \frac{U_1 T - S_1 U}{SS_1 - T^2},\quad F_1 = \frac{UT - SU_1}{SS_1 - T^2}.$$

Il est très essentiel d'observer que

$$45.\quad SS_1 - T^2 = 1 + K'(\mu^2 + \mu_1^2),$$

en sorte que le dénominateur de ces valeurs de P, F_1 est essentiellement positif.

D'après ce qu'on a vu dans le précédent mémoire (N°. 8.), il faut que la quantité U soit négative, sans quoi le point (ξ, ζ) se détacherait du plan fixe. U exprime la vitesse que prendrait le point (ξ, ζ) par l'action des forces X, Y, Z, s'il n'y avait en ce point ni percussion ni frottement; ou bien, en supposant que le corps vienne choquer le plan fixe, U exprime la vitesse du point (ξ, ζ), immédiatement avant le choc. Or on a vu dans le mémoire qui précède, que lorsqu'on faisait abstraction du frottement, la condition $U < 0$ entraînait celle $P > 0$, et vice versa: mais ici il n'en est plus de même, et comme P doit toujours être une quantité positive, il faut poser, indépendamment de la condition $U < 0$, celle

$$U_1 T - S_1 U > 0.$$

Il faut en outre que le frottement F_1 soit numériquement inférieur à εP, d'où

$$\pm(UT - SU_1) < \varepsilon(U_1 T - S_1 U),$$

le signe $\pm$ étant choisi de manière à rendre le premier membre de l'inégalité positif.

Quand la résistance du frottement est surmontée, la dernière équation (44.) est remplacée par $F_1 = \mp \varepsilon P$, selon que

$$\alpha' + q\mu_1 \gtrless 0.$$

Or la supposition $F_1 = -\varepsilon P$ donne:

$$P = -\frac{U}{S-\varepsilon T}, \quad \alpha' + q\mu_1 = \frac{SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S-\varepsilon T};$$

et celle $F_1 = \varepsilon P$, donne par la même raison:

$$P = -\frac{U}{S+\varepsilon T}, \quad \alpha' + q\mu_1 = \frac{SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S+\varepsilon T}.$$

Ainsi, P devant toujours rester positif, les systèmes d'inégalités propres à chacune de ces deux hypothèses, seront:

$$-\frac{U}{S-\varepsilon T} > 0, \quad \frac{SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S-\varepsilon T} > 0,$$

$$-\frac{U}{S+\varepsilon T} > 0, \quad \frac{SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U)}{S+\varepsilon T} < 0,$$

Mais puisque U est négatif, sans quoi le corps se détacherait du plan, on peut remplacer la première et la troisième de ces inégalités par

$$S - \varepsilon T > 0, \quad S + \varepsilon T > 0$$

et dès lors la seconde et la quatrième peuvent s'écrire, en supprimant les dénominateurs positifs

$$SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U) > 0,$$
$$SU_1 - UT + \varepsilon(U_1 T - S_1 U) < 0.$$

12. Le cas où l'on a $U > 0$, et où le point (ξ, ζ) se détache du plan sans percussion ni frottement, exclut évidemment tous les autres. En le mettant à part, il faut prouver que les systèmes d'inégalités, relatifs aux trois autres hypothèses, sont de telle sorte que l'un d'entre eux est nécessairement vérifié, quel que soit le nombre empirique ε, et que la vérification d'un seul entraîne l'exclusion de tous les autres. Pour plus de clarté, grouppons ensemble ces divers systèmes, on aura:

1°. Si le frottement détruit la vitesse du point de contact:

$$(A) \quad \begin{cases} (a) & U_1 T - S_1 U > 0, \\ (a') & \pm(UT - SU_1) < \varepsilon(U_1 T - S_1 U), \end{cases}$$

le double signe ayant pour objet de rendre le premier membre de la dernière inégalité toujours positif.

2°. Si le frottement ne détruit pas la vitesse du point de contact, et que ce point se meuve dans le sens des x positives:

$$(B) \quad \begin{cases} (b) & S - \varepsilon T > 0, \\ (b') & SU_1 - UT - \varepsilon(U_1 T - S_1 U) > 0. \end{cases}$$

3°. Si le point de contact se meut dans le sens de x négatives:

$$(B_1)\ \begin{cases}(b_1) & S+\varepsilon T>0,\\ (b'_1) & SU_1-UT+\varepsilon(U_1T-S_1U)<0.\end{cases}$$

D'abord les systèmes (A) et (B) sont incompatibles; car si $SU_1-UT>0$, l'inégalité (a') est l'opposée de (b'); et si au contraire $SU_1-UT<0$, au moyen de ce que l'inégalité (a) serait satisfaite, le premier membre de celle (b') serait formé par l'addition de deux termes négatifs, en sorte que cette dernière inégalité ne pourrait être vérifiée. Par une raison absolument semblable, les systèmes (A) et (B_1) ne peuvent subsister simultanément. Enfin on prouvera qu'il en est de même à l'égard des systèmes (B) et (B_1); car des inégalités (b'), (b'_1) on tire:

$$(S-\varepsilon T)U_1>(T-\varepsilon S_1)U,\quad (S+\varepsilon T)U_1<(T+\varepsilon S_1)U;$$

or, puisque (b) et (b_1) seraient vérifiées par hypothèse, on peut diviser les inégalités précédentes par les facteurs positifs $S-\varepsilon T$, $S+\varepsilon T$, ce qui donne

$$U_1>\frac{(T-\varepsilon S_1)U}{S-\varepsilon T},\quad U_1<\frac{(T+\varepsilon S_1)U}{S+\varepsilon T},$$

et par suite

$$\frac{(T+\varepsilon S_1)U}{S+\varepsilon T}>\frac{(T-\varepsilon S_1)U}{S-\varepsilon T},$$

ou en faisant disparaître les dénominateurs positifs, et réduisant:

$$2\varepsilon U(SS_1-T^2)>0.$$

Mais U est négatif, donc on devrait avoir $SS_1-T^2<0$, ce qui est absurde d'après l'équation (45.).

Il reste à prouver que l'un des trois systèmes (A), (B), (B_1) est nécessairement vérifié. Or, pour que cette proposition ne fût pas vraie, il faudrait qu'en assignant de certaines valeurs aux quantités ε, U, U_1, etc., l'une au moins des deux inégalités qui entrent dans chaque système, ne fût pas satisfaite. Formons donc toutes les combinaisons 3 à 3 qui peuvent avoir lieu, en prenant une inégalité dans chacun des systèmes, et indiquons les par la notation suivante:

$$[a,\,b,\,b_1],\quad [a',\,b,\,b_1],\quad [a,\,b',\,b'_1],\quad [a',\,b',\,b'_1],$$
$$[a,\,b,\,b'_1],\quad [a,\,b',\,b_1],\quad [a',\,b,\,b'_1],\quad [a',\,b',\,b_1];$$

en sorte, par exemple, que le symbole $[a,\,b,\,b_1]$ désigne la combinaison des trois inégalités (a), (b), (b_1), dont aucune ne serait satisfaite, afin que par suite aucun des trois systèmes (A), (B), (B_1) ne pût avoir lieu.

1° et 2°. Il est clair d'abord que les deux combinaisons $[a,\,b,\,b_1]$, $[a',\,b,\,b_1]$ sont superflues à considérer; car selon que l'on a $T>$ ou <0,

l'une des deux inégalités (b), (b_1) est nécessairement satisfaite, à cause que S et S_1 sont des quantités positives de leur nature.

3°. La combinaison $[a, b', b'_1]$ est impossible; car, des deux inégalités:

$$SU_1 - UT - \varepsilon(U_1T - S_1U) < 0, \quad SU_1 - UT + \varepsilon(U_1T - S_1U) > 0,$$

on tire, en éliminant $SU_1 - UT$:

$$U_1T - S_1U > 0;$$

et par conséquent si les deux inégalités (b'), (b'_1) ne sont pas satisfaites, celle (a) l'est nécessairement.

4°. La combinaison $[a', b', b'_1]$ répugne encore évidemment; car, selon que $SU_1 - UT >$ ou < 0, l'inégalité (a') sera directement l'opposée de (b') ou (b'_1); et dès lors, si l'une n'est pas vérifiée, l'autre doit l'être.

5° et 6°. La combinaison $[a, b, b'_1]$ suppose que l'on ait:

$$U_1T - S_1U < 0, \quad S - \varepsilon T < 0, \quad SU_1 - UT + \varepsilon(U_1T - S_1U) > 0.$$

En vertu de la seconde de ces inégalités, T est positif; la première et la troisième donnent alors:

$$U_1 < \frac{S_1U}{T}, \quad U_1 > \frac{(T + \varepsilon S_1)U}{S + \varepsilon T},$$

d'où

$$\frac{S_1U}{T} > \frac{(T + \varepsilon S_1)U}{S + \varepsilon T},$$

et en réduisant

$$U(SS_1 - T^2) > 0,$$

ce qui serait absurde, ainsi qu'on la vu plus haut. On démontrerait de même l'impossibilité de la combinaison $[a, b', b_1]$.

7° et 8°. Il est clair que la combinaison $[a', b, b'_1]$ implique contradiction, dans le cas où $UT - SU_1 > 0$, puisqu'alors $(a'.)$ est directement l'opposée de (b'_1). Si au contraire on a $UT - SU_1 < 0$, de ce que les inégalités (b), (a') ne sont pas vérifiées, il résulterait

$$S - \varepsilon T < 0, \quad SU_1 - UT > \varepsilon(U_1T - S_1U;$$

le premier membre de cette dernière inégalité étant positif par hypothèse, et le second l'étant aussi, sans quoi l'on retomberait sur la combinaison $[a, b, b'_1]$ qui vient d'être démontrée impossible. En vertu de la première inégalité, on peut mettre la seconde sous la forme

$$U_1 < \frac{(\varepsilon S_1 - T)U}{\varepsilon T - S};$$

et comme on a d'ailleurs, d'après la supposition $UT - SU_1 < 0$,

$$U_1 > \frac{UT}{S},$$

il en résulte

$$\frac{(\varepsilon S_1 - T)U}{\varepsilon T - S} > \frac{UT}{S},$$

ce qui conduit encore à la conséquence absurde $U(SS_1 - T^2) > 0$. Un raisonnement entièrement semblable ferait rejeter la combinaison $[a', b', b_1]$.

Ainsi en définitive, quelles que soient les valeurs de ε, U, U_1, etc. pourvu seulement que U soit négatif, un des trois systèmes (A), (B), (B_1) est nécessairement satisfait, et il n'y en a qu'un seul.

Mais si U était positif, il pourrait se faire que les systèmes relatifs aux autres hypothèses, par exemple le système (A) (qui ne changerait pas de forme), ou les systèmes (B), (B_1) (dans lesquels il faudrait changer les signes $>$ en $<$, et réciproquement), fussent encore satisfaits. Ceci fait voir que dans l'ordre du calcul, l'hypothèse qui consiste à supposer que le corps se détache du plan sans percussion ni frottement, doit avoir la priorité sur les autres; c'est-à-dire qu'elle exclut les autres hypothèses, même quand les conditions relatives à celles-ci se trouvent vérifiées: au lieu que cette première hypothèse une fois exclue par la relation $U < 0$, l'ordre dans lequel on essaiera les trois autres systèmes (A), (B), (B_1) est indifférent; puisque dès lors un seul de ces systèmes peut se trouver vérifié. Tous ces résultats n'ont rien que de conforme à l'ordre logique des idées; et si l'analyse qui sert à les établir, offre quelque-chose de trop minutieux, nous pensons qu'on le pardonnera en raison de la nouveauté du sujet.

13. Lorsque T est nul, ce qui arrivait dans les cas de la sphère et de l'ellipsoïde, traités précédemment, la valeur de P se trouve égale à $-\frac{U}{S}$, que le frottement soit surmonté ou non. Ainsi, pourvu seulement que U soit négatif, les inégalités (a), (b'), (b_1) sont satisfaites d'elles-mêmes; celles (a'), (b'), (b'_1) se réduisent à

$$\pm SU_1 < -\varepsilon US_1, \quad SU_1 > -\varepsilon US_1, \quad -SU_1 > -\varepsilon US_1.$$

Si la première de ces inégalités n'est pas vérifiée, la seconde ou la troisième le seront, selon que $U_1 >$ ou < 0; d'où l'on conclut que la vitesse du point de contact au premier instant du mouvement sera de même signe que U_1; et comme, dans le cas où le corps vient frapper le plan fixe, U_1 exprime la vitesse du point de contact avant le choc, estimée

parallèlement aux x, il en faut conclure que sa vitesse après le choc, sera dirigée dans le même sens.

Mais dans le cas général, et lorsque la résitance du frottement est surmontée, le point de contact se mouvra dans le sens des x positives ou négatives, selon que les quantités $U_1 T - S_1 U$, $SU_1 - UT$ seront de mêmes signes ou de signes contraires: or de là ne dérive pas la nécessité que U_1 soit positif dans la première hypothèse, et négatif dans la seconde; les vitesses du point de contact, parallèles aux x, pourront donc être dirigées en sens contraires, avant et après le choc.

Mr. Poisson, à qui l'on doit d'avoir remarqué cette circonstance, dans les deux mémoires cités plus haut, en conclut la nécessité de partager en deux périodes distinctes, le temps extrêmement court, pendant lequel s'opère le choc du corps contre le plan. En effet, observe-t-il, une percussion n'étant qu'une somme de pressions qui se succèdent dans une durée très courte, et le frottement total la somme des frottements partiels, correspondants à chacune de ces pressions, il faut concevoir que la vitesse du point de contact, dirigée d'abord, par exemple, dans le sens des x positives, s'éteint graduellement jusqu'à ce qu'elle soit nulle; après quoi, la vitesse croissant de nouveau dans le sens des x négatives, le frottement s'exerce aussi dans une direction contraire: il faut donc calculer séparément les effets de la percussion et du frottement dans ces deux périodes, pendant lesquelles celui-ci s'exerce suivant deux directions opposées.

Mais nous ferons d'abord remarquer que cette opposition dans les signes de la vitesse, avant et après le choc, n'est qu'une application particulière des formules du N°. 7., d'après lesquelles la composante parallèle au plan fixe de la vitesse du point de contact, doit en général être dirigée suivant des droites différentes, avant et après le choc. Il faudrait donc, d'après le même principe, considérer la vitesse, et par conséquent le frottement, comme variant en direction par degrés insensibles, depuis celle qu'elle avait avant le choc jusqu'à celle qu'elle prend après le choc. Il faudrait donc distinguer dans la durée inappréciable de la percussion une infinité de périodes distinctes; ou plutôt, si l'on savait comment la pression élémentaire varie pendant la durée du choc, et quelle est cette durée, il faudrait intégrer des formules analogues à celles du N°. 1., et déduire de cette intégration toutes les circonstances du mouvement, relati-

ves à l'instant qui termine le choc. Mais on ne peut apprécier en aucune façon ni la durée du choc, ni la loi suivant laquelle la pression et le frottement varient pendant cette durée: les calculs que nous venons d'indiquer seraient donc inexécutables; et par la même raison, dans le cas particulier qui a donné matière à ces remarques, on n'aurait aucun moyen de connaître l'instant où la vitesse du point de contact a changé de signe, ni de calculer séparément les deux périodes du choc.

Nous observerons en outre que, si l'on a bien suivi les explications qui précèdent, on doit comprendre que les formules relatives au premier instant du mouvement sont les mêmes, soit que le corps vienne choquer le plan fixe, ou qu'il subisse lui-même une percussion, ou enfin qu'il soit tiré du repos par l'action d'une force continue telle que la pesanteur. Or dans ce dernier cas, les formules que nous venons de donner sont d'une exactitude rigoureuse; et l'on ne pourrait subdiviser un élément qui est, dans le sens absolu et mathématique du mot, infiniment petit. Concluons en donc que la même analyse doit s'appliquer également au choc, quand on en considère les effets comme sensiblement instantanés, ce qui est jusqu'ici le seul moyen connu de les soumettre au calcul: car d'ailleurs, si l'on a égard à la réalité physique, et si l'on parvient à réduire analytiquement la théorie de la percussion et du frottement à celle des actions à distance, il est clair que l'observation de Mr. Poisson est de toute justesse.

Si l'on adoptait tout autre hypothèse sur la nature du frottement, que celle de la proportionnalité à la pression, on aurait des relations de forme très différente, qui pourtant devraient toujours, par la nature de la question, entraîner des conséquences analogues à celles que nous avons développées. Mais il suffit à notre objet d'avoir indiqué cette nouvelle application du calcul des inégalités, en partant de l'hypothèse communément adoptée par les physiciens. On peut juger aussi par ce qu'on vient de lire, et d'après les détails donnés dans le mémoire précédent, de la complication que prendraient les calculs, si l'on avait à considérer l'action du frottement en plusieurs points de contact: les remarques que ce sujet comporte trouveront peut-être leur place dans un autre article.

Villiers, près Paris, le 8. juin 1829.

18.

Anwendung der elliptischen Transcendenten auf die sphärischen Polygone, welche zugleich einem kleinen Kreise der Kugel eingeschrieben und einem andern umgeschrieben sind.

(Von Herrn Stud. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

I.

In dem ersten Hefte des dritten Bandes dieses Journals hat der Herr Professor Jacobi das Problem: „die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäſsigen Vielecke eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist" auf die Elemente der elliptischen Transcendenten zurückgeführt.

Wenn man auf diesem Wege die bekannten Relationen für das Dreieck u. s. w. ableitet, so wird dies durch folgende einfache Betrachtung sehr erleichtert, wonach aus der Bedingung für das n Eck ohne Weiteres sich die für das $2n$ Eck ergiebt. Nennt man nemlich, jener erwähnten Abhandlung gemäſs, R' und r' die Radien der Kreise für das $2n$ Eck, und a' die Distanz ihrer Mittelpuncte, während bei dem n Ecke diese Gröſsen respective durch R, a und r bezeichnet sein mögen; bezeichnet man ferner den ersten Winkel des $2n$ Ecks am Mittelpuncte C durch 2α und beim n Eck durch $2\alpha_2$, indem beide Polygone wieder von dem festen Puncte P aus, wo die durch die Mittelpuncte des groſsen und kleinen Kreises gezogene Linie die Peripherie des gröſsern Kreises schneidet, construirt sind, so ist der analytische Ausdruck für die Relation obiger Art bei einem $2n$ Eck, welches nur einmal die Peripherie durchmiſst:

$$\frac{K}{n} = t',$$

wo K und t' nach der in obiger Abhandlung gebrauchten Bezeichnung aus folgenden Gleichungen sich bestimmen:

$$\operatorname{am}(K) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{am}(t') = \alpha,$$

so dafs die elliptischen Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = K \quad \text{und} \quad \int_0^{\alpha} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t'$$

gesetzt werden, worin c die in der oben erwähnten Abhandlung gebrauchte willkürliche Constante $\varkappa$ bedeutet.

Der analytische Ausdruck für das nEck wird hingegen:

$$\frac{2K}{n} = t,$$

worin:

$$\mathrm{am}(t) = \alpha_2,$$

und daher

$$\int_0^{\alpha_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = t$$

ist.

Hieraus folgt, dafs

$$2t' = t$$

ist, und folglich die Formeln für die Verdoppelung der elliptischen Transcendente gelten, welche Herr Legendre in seinen *Exercices p.* 25. gegeben hat, wenn man statt φ, α, und statt φ_2, α_2 schreibt.

So erhält man:

$$1.\quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_2 = \mathrm{tang}\,\alpha\,\triangle(\alpha)$$

und

$$2.\quad \sin\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_2}{\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\triangle\alpha_2)}}.$$

Aus (2.) folgt:

$$\sin\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\triangle\frac{\alpha^2}{2}},\quad \cos\alpha^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{1+\triangle\frac{\alpha_2}{\alpha}},\quad \mathrm{tang}\,\alpha^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2},$$

was in (1.) substituirt, giebt:

$$3.\quad (\triangle\alpha)^2 = \frac{\cos\alpha_2+\triangle\alpha_2}{\cos\alpha_2+1}.$$

Nach der oben angeführten Abhandlung ist aber:

$$4.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R-a}{R+a},\quad \cos(\alpha_2) = \frac{r}{R+a},$$

$$5.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R-a)^2-r^2}{(R+a)^2-r^2}.$$

Dieselben Formten gelten für α, R', a' und r'.

$$6.\quad \triangle(\alpha_2) = \sqrt{(1-c^2\sin(\alpha_2)^2)} = \frac{R'-a'}{R'+a'},\quad \cos(\alpha_2) = \frac{r'}{R'+a'},$$

$$7.\quad 1-cc = 1-\varkappa\varkappa = \frac{(R'-a')^2-r'^2}{(R'+a')^2-r'^2}.$$

Setzt man also:

$$\frac{R+a}{r} = p, \quad \frac{R-a}{r} = q,$$
$$\frac{R'+a'}{r'} = p', \quad \frac{R'-a'}{r'} = q',$$

so ist aus (5. und 7.):

$$\left(\frac{q^2-1}{p^2-1}\right) = \left(\frac{q'^2-1}{p'^2-1}\right).$$

Ferner giebt die Substitution von (4. und 6.) in (3.):

$$\frac{q+1}{p+1} = \frac{q'^2}{p'^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{q-1}{p-1} = \frac{p'^2}{q'^2} \cdot \left(\frac{q'^2-1}{p'^2-1}\right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$q p'^2 - p q'^2 = q'^2 - p'^2, \quad q q'^2 (p'^2-1) - p p'^2 (q'^2-1) = p'^2 - q'^2,$$

woraus man ableitet:

$$8. \quad q = \frac{q'^2 + q'^2 p'^2 - p'^2}{q'^2 - q'^2 p'^2 + p'^2},$$
$$9. \quad p = \frac{p'^2 + p'^2 q'^2 - q'^2}{p'^2 - q'^2 p'^2 + q'^2}.$$

Setzt man diese Werthe von q und p in die Bedingungsgleichung für das nEck, so erhält man die für das $2n$Eck.

Es ist die Eulersche Bedingungsgleichung für das Dreieck:

$$(R+a-r)(R-a-r) = r^2,$$

und für das Viereck:

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r) = r^4,$$

welche nach Einführung per Gröſsen p und q,

$$p = \frac{R+a}{r} \quad \text{und} \quad q = \frac{R-a}{r},$$

folgende Form bekommen:

$$(p-1)(q-1) = 1 \quad \text{und} \quad (p^2-1)(q^2-1) = 1.$$

Für das Fünfeck findet man folgende sehr einfache Formel, welche auf die längeren Bedingungsgleichungen der Herren Steiner und Fuſs nach einigen Reductionen gebracht werden kann:

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^2.$$

Wenn man nun in diesen 3 letzten Formeln die Werthe von p und q aus (8.) und (9.) substituirt, so erhält man nach Fortlassung der Striche bei den Buchstaben p' und q':

für das Sechseck:

$$4p^2q^2(p^2-1)(q^2-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^2,$$

für das Achteck:

$$16p^4q^4(p^2-1)(q^2-1) = (p^2+q^2-p^2q^2)^4,$$

für das Zehneck:

$$16\,p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right)^2.$$

Die hier aufgestellten Formeln für das Sechseck und Achteck lassen sich, nach einigen Reductionen, auf die von Herrn Steiner und Fufs angegebenen bringen.

Substituirt man in die Formeln für das Sechseck und Achteck die Werthe von p und q aus (8. und 9.), so erhält man nach Weglassung der Striche bei p' und q' folgende Formeln:

für das Zwölfeck:

$$64p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right)^2,$$

für das Sechszehneck:

$$256p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)$$
$$= \left(\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]}{[p^4q^4-(p^2-q^2)^2](p^2+q^2-p^2q^2)}\right)^4.$$

II.

Die Bedingungsgleichungen für das sphärische Dreieck und Viereck findet man auf folgendem geometrischen Wege.

Es seien (Taf. III. Fig. 2.) auf der Kugel-Oberfläche zwei kleine Kreise gegeben, von denen der eine, mit dem Pole C und dem Abstande der Peripherie von dem Pole $=R$, den andern mit dem Pole c und dem Abstande der Peripherie vom Pole $=r$, umschliefsen möge. Die Distanz der beiden Pole, eben so wie R und r, Bogen eines gröfsten Kreises, heifse a. Aus irgend einem Puncte A des Kreises C lege man den Bogen eines gröfsten Kreises als Tangente an den Kreis c, und zwar am Puncte M, welche den ersten wieder in A' schneidet; auf gleiche Weise ziehe man an den Kreis c die Tangenten $A'A''$, $A''A'''$ u. s. w., wo A, A', A'' u. s. w. in der Peripherie des gröfsern Kreises C liegen, und $AA'A''\ldots$ ein umschlossenes sphärisches Polygon ist, das dem Kreise C eingeschrieben und dem Kreise c umgeschrieben ist. Man lege durch cC einen gröfsten Kreis, welcher die Peripherie des Kreises C, rechts in P und links

in Q schneidet, so dafs

$$CP = R, \quad cP = R - a \quad \text{und} \quad cQ = R + a$$

ist.

Man nenne ferner die Winkel

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'' \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn man aber in der Figur von P aus eine Tangente obiger Art an die Peripherie des Kreises c legt und sie den Kreis C in P' schneidet, so sei $PCP' = 2\beta$.

Es gelten für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AMc und $A'Mc$ folgende zwei Formeln:

$$\cos AM = \frac{\cos Ac}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi}{\cos r},$$

und

$$\cos A'M = \frac{\cos A'c}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi'}{\cos r}.$$

Nun ist:

$$\sin\frac{AM}{2}\cos\frac{A'M}{2} + \sin\frac{A'M}{2}\cos\frac{AM}{2} = \sin\frac{AA'}{2}.$$

Wenn man folglich setzt:

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r} \quad \text{und} \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$10. \quad 2\sin R \sin(\varphi' - \varphi) =$$
$$\sqrt{\{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}} + \sqrt{\{[1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}}.$$

Wenn man hierin $2\varphi = 0$ und $2\varphi' = 2\beta$ setzt, so erhält man eine Relation zwischen R, a, r und β; welche nach Einführung der Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$ wird:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)][\cos r + \cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\beta]\}} \\ + \sqrt{\{[\cos r + \cos(R-a)][\cos r - \cos R \cos a - \sin R \sin a \cos 2\beta]\}}\end{array}\right\} = 2\sin R \cos r \sin\beta.$$

Wenn man statt $\cos 2\beta$ und $\sin\beta$ die Werthe durch $\operatorname{tang}\beta^2$ ausgedrückt schreibt, nemlich:

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tang}\beta^2}{1 + \operatorname{tang}\beta^2} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}\beta^2)}},$$

so erhält man nach einiger Reduction:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)]^2 + \operatorname{tang}\beta^2[\cos r + \cos(R+a)][\cos r - \cos(R-a)]\}} \\ + \sqrt{\{[\cos r - \cos(R-a)]^2 + \operatorname{tang}\beta^2[\cos r - \cos(R+a)][\cos r + \cos(R-a)]\}}\end{array}\right\} = 2\sin R \cos r \operatorname{tang}\beta.$$

Hieraus erhält man nach einigen Reductionen folgende einfache Formel:

$$11. \quad \operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2}.$$

Wenn man nun von allen sich schliessenden n Ecken, welche um den Kreis c beschrieben und dem Kreise C eingeschrieben sind, dasjenige nimmt, dessen eine Ecke in P liegt, und man die Ecken der Reihe nach P', P'' u. s. w. $P^{(n-1)}$ nennt, so ist es klar, dafs in diesem speciellen Falle der gröfste Bogen Cc das n Eck in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt.

Hieraus folgt, dafs wenn man die Winkel alle von CP an nach einer Richtung rechnet und P^m eine beliebige der Ecken ist:

$$\angle PCP^{(m)} + \angle PCP^{(n-m)} = 2\pi \text{ ist.}$$

Ist daher $n = 2h$, so ist:

$$\angle PCP^{(h)} + \angle PCP^{(h)} = 2\pi, \quad \angle PCP^{(h)} = \pi,$$

so dafs also die Ecke $P^{(h)}$ in Q fällt.

Ist $n = 2h+1$, so ist:

$$\angle PCP^{(h)} + PCP^{(h+1)} = 2\pi,$$

woraus folgt:

$$\text{arc}\, P^{(h)}Q = \text{arc}\, P^{(h+1)}Q;$$

also steht der Bogen $P^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}P^{\left(\frac{n+3}{2}\right)}$ auf PP' senkrecht.

Wenn man ferner die Berührungspuncte der Tangenten PP', $P'P''$ u. s. w. M', M'' u. s. w. nennt, so fällt für $n = 2h+1$, $M^{(h)}$ in den Bogen Cc.

Für das sphärische Dreieck ist also:

$$\angle P'CM'' = \pi - 2\beta,$$

und daher:

$$\cos P'CM'' = \frac{\tang M''C}{\tang P'C},$$

oder, da

$$M''C = M''C - Cc = r - a,$$

so ist:

$$\cos 2\beta = \frac{\tang(a-r)}{\tang R},$$

woraus folgt:

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{\tang R - \tang(a-r)}{\tang R + \tang(a-r)},$$

oder

$$\tang \beta^2 = \frac{\sin(R+r-a)}{\sin(R-r+a)}.$$

Dies mit der obigen Formel (11.)

$$\tang \beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2} = \frac{\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2}$$

gleich gesetzt, giebt:

$$\frac{\sin(R+r-a)}{\sin(R+a-r)} = \frac{\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2},$$

oder

$$12. \quad \sin(R-a-r)\sin(R+a-r) = \cos R^2 \sin r^2.$$

Setzt man den Radius der Kugel ∞, und behält die Gröfsen der 2ten Ordnung, so erhält man:

$$(R-a-r)(R+a-r) = r^2,$$

welches die bekannte Relation für das Dreieck in der Ebene ist.

In dem Falle, dafs $a=0$ ist, haben beide Kreise einen Pol, welcher Fall der Concentricität der zwei Kreise in der Ebene correspondirt. Es gilt daher die Bedingung:

$$\operatorname{tang} R = 2 \operatorname{tang} r,$$

für ein gleichseitiges sphärisches Dreieck.

Beim Vierecke ist:

$$\angle PCP' + \angle P'CP'' = 2\pi \quad \text{und} \quad \angle PCP'' = \pi, \quad \angle PCP' = 2\beta.$$

Folglich, setzt man in der allgemeinen Formel

$$2\varphi = 2\beta \quad \text{und} \quad 2\varphi' = \pi,$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\{[\cos r-(\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos 2\beta)][\cos r+\cos(R+a)]\}}\\ +&\sqrt{\{[\cos r+\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos 2\beta][\cos r-\cos(R+a)]\}}\end{aligned}\right\} = 2\sin R\cos r\cos\beta$$

Setzt man

$$\frac{1-\operatorname{tang}\beta^2}{1+\operatorname{tang}\beta^2} = \cos 2\beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}\beta^2)}} = \cos\beta,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\{[\cos r-\cos(R-a)][\cos r+\cos(R+a)]+\operatorname{tang}\beta^2[\cos r^2-\cos(R+a)^2]\}}\\ +&\sqrt{\{[\cos r+\cos(R-a)][\cos r-\cos(R+a)]+\operatorname{tang}\beta^2[\cos r^2-\cos(R+a)^2]\}}\end{aligned}\right\} = 2\sin R\cos r,$$

woraus man nach einiger Reduction erhält:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\cos R^2 \sin r^2}{\sin(R+a)^2-\sin r^2};$$

dies der obigen Formel (11.)

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2-\sin r^2}{\cos R^2\sin r^2}$$

gleich gesetzt, giebt:

$$[\sin(R+a)^2-\sin r^2][\sin(R-a)^2-\sin r^2] = \cos R^4 \sin r^4,$$

oder

13. $\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r) = \cos R^4 \sin r^4,$

welche Formel Herr **Steiner** im 3ten Hefte des 2ten Bandes ohne Beweis mittheilt.

Setzt man den Radius der Kugel $=\infty$, und behält nur die Gröfse der 4ten Ordnung bei, so erhält man die bekannte Formel für die Ebene:

$$(R+a+r)(R+a-r)(R-a+r)(R-a-r) = r'^4.$$

Setzt man $a=0$, so ist

$$\operatorname{tang} R^2 = 2\operatorname{tang} r^2:$$

die Bedingungsgleichung bei einem gleichseitigen sphärischen Viereck, welches dem Kreise R eingeschrieben und dem kleinen, zu demselben Pole C gehörigen Kreise r umschrieben ist.

Obgleich endlich beide Formeln, die für das sphärische Dreieck und Viereck, nur für den speciellen Fall berechnet sind, dafs eine Ecke derselben in P liegt, so wird es sich später zeigen, dafs sie auch für jedes beliebig liegende Dreieck und Viereck gelten; indem allgemein der Satz bewiesen wird:

„Wenn zwischen zwei kleinen Kugelkreisen, von irgend einem Puncte des gröfseren aus, sich ein geschlossenes sphärisches Vieleck von der Art beschreiben läfst, dafs die Seiten Tangenten des kleinen Kreises werden, und der gröfsere ihm umgeschrieben sei, so läfst sich von jedem andern Puncte des gröfsern Kreises ein geschlossenes sphärisches Vieleck von obiger Beschaffenheit und mit eben so viel Seiten beschreiben."

III.

Vermittelst der elliptischen Transcendenten kann man die vorgelegte Aufgabe in aller Allgemeinheit lösen, indem man sie auf die Theilung dieser Transcendenten zurückführt.

Nimmt man in (Taf. III. Fig. 2.) eine an AA' unendlich nahe Tangente DD' an, so dafs DA und $D'A'$ unendlich kleine Gröfsen sind, so ist:

$$\angle ADM = 180^\circ - \angle MD'A' \quad \text{und} \quad \angle AMD = \angle A'MD'.$$

Wenn man sich aber der früher angegebenen Bezeichnung bedient, so ist:

$$AD = \sin R\,\partial(2\varphi), \qquad A'D' = \sin R\,\partial(2\varphi'),$$
$$\sin AD : \sin AM = \sin AMD : \sin ADM,$$
$$\sin A'D' : \sin A'M = \sin A'MD' : \sin MD'A',$$

also

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\partial(2\varphi')} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{[\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos(2\varphi)]^2}{\cos r^2}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{[\cos R\cos a+\sin R\sin a\cos(2\varphi')]^2}{\cos r^2}\right)}},$$

oder, wenn man $\varkappa$ und $\varkappa'$ wieder einführt, nemlich:

$$\varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r} \quad \text{und} \quad \varkappa' = \frac{\sin R\sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$14. \quad \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}} = \frac{\partial(2\varphi')}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')^2]}}.$$

Setzt man nun:

$$\int^{2\varphi}\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}}=\Pi(2\varphi),\quad \int_0^{2\varphi'}\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}}=\Pi(2\varphi'),$$

$$\int_0^{2\beta}\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)]}}=\Pi(2\beta);$$

so ist

$$\Pi(2\varphi')=\Pi(2\varphi)+\Pi(2\beta)$$

das vollständige Integral, indem die der Differentialgleichung (14.) willkürliche Constante desselben dadurch bestimmt wird, daſs sie, da für $\varphi=0$, $\varphi'=\beta$ ist, $=\Pi(2\beta)$ wird.

Nach einer, der von Herrn Professor Jacobi gegebenen analogen Bezeichnung ist:

$$\Pi(2\varphi')=U',\quad \Pi(2\varphi)=U,\quad \Pi(2\beta)=T,$$

und

$$2\varphi'=AM(U'),\quad 2\varphi=AM(U),\quad 2\beta=AM(T),$$

und daher

$$U'=U+T$$

das vollständige Integral der Differential-Gleichung (14.).

Das algebraische Integral derselben aber ist die Formel (10.):

$$2\sin R\sin(\varphi'-\varphi)=\sqrt{\{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}}$$
$$+\sqrt{\{[1+(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)][1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')]\}}.$$

Aber wenn

$$m=\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi \quad\text{und}\quad m'=\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi'$$

ist, so wird das algebraische Integral:

$$\sqrt{((1-m)(1+m'))}+\sqrt{((1+m)(1-m'))}=2\sin R\sin(\varphi'-\varphi).$$

Hier ist $\sin R$ die Constante, welche aus der letzten Formel und dem Differential derselben:

$$\varkappa'\{\sqrt{((1-m)(1-m'))}-\sqrt{((1+m)(1+m'))}\}.\left\{\frac{\sin 2\varphi'\,\partial(2\varphi')}{2\sqrt{(1-m'^2)}}+\frac{\sin 2\varphi\,\partial(2\varphi)}{2\sqrt{(1-m^2)}}\right\}$$
$$=\sin R\cos(\varphi'-\varphi)(\partial 2\varphi-\partial 2\varphi'),$$

eliminirt,

$$\frac{\partial 2\varphi}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}}=\frac{\partial 2\varphi'}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')^2)}}$$

giebt.

IV.

Die Constanten $\varkappa$ und $\varkappa'$ geben folgendes constante Verhältniſs:

$$\cos R\cos a:\sin R\sin a:\cos r=\varkappa:\varkappa':1,$$

oder

$$\cos(R-a):\cos(R+a):\cos r=(\varkappa+\varkappa'):(\varkappa-\varkappa'):1,$$

welches in unserer Figur ist:

$$\cos Pc:\cos QC:\cos r=(\varkappa+\varkappa'):(\varkappa-\varkappa'):1.$$

Man kann dies anwenden um die Multiplication obiger Transcendente für jeden beliebigen Winkel 2β zu construiren.

Da nun aus (11.) die Relation zwischen R, a, r und β gegeben ist, nemlich:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2 - \sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2},$$

so kann man hieraus und durch die zwei Gleichungen

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

für jedes β, $\varkappa$ und $\varkappa'$, R, a und r bestimmen.

Während nemlich in der Ebene r und a für jedes beliebige α und ein festes R bestimmt werden kann, ist hier r und a schon durch R allein gegeben, und folglich β für jedes R constant, da es ja auch nur einen kleinen Kreis giebt der zu dem gröfsern um C eine solche Lage hat, dafs

$$\cos(R-a) : \cos(R+a) : \cos r$$

ein constantes Verhältnifs wird.

Es ändert sich also mit dem jedesmaligen β auch das R, und zwar nach folgender Gleichung, welche man erhält wenn man in (10.) $\varphi = 0$ und $\varphi' = \beta$ macht:

$$15. \quad \frac{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa')]}\,.\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]} + \sqrt{[1+\varkappa+\varkappa']}\,.\sqrt{[1-\varkappa-\varkappa'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin R.$$

a und r bestimmt man dann aus den Gleichungen für $\varkappa$ und $\varkappa'$, nemlich:

$$16. \quad \operatorname{tang} a = \frac{\varkappa'}{\varkappa}\operatorname{cotang} R,$$

und

$$17. \quad \cos r^2 = \frac{\cos R^2 \sin R^2}{\varkappa^2 \sin R^2 + \varkappa' \cos R^2}.$$

Um also den Winkel $2\varphi'$ zu finden, der die Eigenschaft hat dafs

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad U' = U + T$$

ist, beschreibe man zwei kleine Kreise um einen beliebigen Punct C, deren Lage und Gröfse durch die Gleichungen (15., 16. und 17.) bestimmt sind, mache $PCA = 2\varphi$ (Taf. III. Fig. 2.), und lege AA' als Tangente an den Kreis c, so wird $PCA' = 2\varphi'$ sein.

Legt man von A' eine 2te Tangente $A'A''$ an den Kreis c, so ist, da

$$PCA'' = 2\varphi''$$

ist:

$$\Pi(2\varphi'') = \Pi(2\varphi') + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi) + 2\Pi(2\beta),$$

oder, wenn nach der vorigen Bezeichnung

$$(2\varphi'') = AM(U'')$$

ist:

$$U'' = U' + T' = U + 2T.$$

Schneidet die nach einer Richtung gelegte $n$te Tangente den Kreis C in $A^{(n)}$, und ist $PCA^{(n)}$, nach derselben Richtung genommen, $= 2\varphi^{(n)}$, so ist:

18. $\Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi^{(n-1)}) + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi^{(n-2)}) + 2\Pi 2\beta \ldots = \Pi 2\varphi + n\Pi 2\beta$,

oder wenn

$$2\varphi^{n} = AM(U^{(n)}),$$

ist:

$$U^{(n)} = U + mT'.$$

Um einen Winkel $\varphi^{(n)}$ zu finden, von der Eigenschaft dafs

$$\Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi) + n\,\Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad U^{(n)} = U + nT$$

sei, lege man von A' eine zweite Tangente an den Kreis c, aus A'', wo diese den gröfsern Kreis schneidet, eine dritte u. s. w., alle nach einer Richtung. Es wird dann $A^{(n)}$, wo die $n$te Tangente den gröfsern Kreis schneidet, so beschaffen sein, dafs man erhält:

$$\angle PCA^{(n)} = 2\varphi^{(n)},$$

nach derselben Richtung gemessen.

Um endlich einen Winkel $2\beta_{n)}$ von der Beschaffenheit zu finden, dafs folgende Gleichung Statt findet:

$$19. \quad \Pi(2\beta_n) = n\Pi(2\beta) \quad \text{oder} \quad T_{(n)} = nT,$$

worin

$$2\beta_n = AM(T_n)$$

ist, darf man in der obigen Construction nur $\varphi = 0$ machen, oder die n Tangenten von P aus zu legen anfangen.

V.

Die analytische Bedingungsgleichung für die Lage und Gröfse zweier Kreise ist, damit von einem beliebigen Puncte A aus ein umgeschlossenes sphärisches nEck von obiger Beschaffenheit den Bogen $2\varphi_n - 2\varphi$ in der Peripherie des grofsen Kreises von A aus durchmesse, die Formel (18.):

$$\Pi 2\varphi_{(n)} = \Pi 2\varphi + n\Pi 2\beta \quad \text{oder} \quad U^{(n)} = U + nT.$$

Wenn man K' durch die Gleichung

$$AM(K') = 2\pi,$$

bestimmt, d. h.

$$\Pi(2\pi) = K',$$

setzt, so ist, wenn i eine ganze Zahl ist,

$$20.\quad \begin{cases} \Pi(2i\pi+2\varphi) = \Pi(2i\pi)+\Pi(2\varphi), \\ \text{oder, von beiden Seiten } AM \text{ genommen,} \\ 2i\pi + AM.U = AM(iK'+U), \end{cases}$$

denn Beides folgt aus der trigonometrischen Natur des Integrals Π, welwelches mit 2π periodisch ist.

Setzt man also in (18.):

$$2\varphi_n - 2\varphi = 2i\pi,$$

in welchem Falle das von A aus construirte Vieleck sich in A schliefst, so ist, da nach (20.)

$$\Pi(2\varphi_n) - \Pi 2\varphi = \Pi 2 i\pi$$

ist,

$$21.\quad \Pi 2i\pi = n.\Pi 2\beta,$$

die Bedingungsgleichung für das sich in A schliefsende Vieleck.

Da in dieser Formel φ gar nicht vorkommt, so kommt es auf den Ort des Anfangspunctes A nicht an. Es ist hierdurch der Lehrsatz von (III.) bewiesen, und die Einschränkung erlaubt, von P aus das Vieleck zu construiren.

So ist das vorgelegte Problem über die sphärischen Vielecke auf die Theilung der elliptischen Transcendente $\Pi(2\pi)$ oder K' in n Theile zurückgeführt, und es ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem 1. Wenn R und r die gröfsten Bogen sind, mit denen zwei kleine Kreise auf der Kugel um C und c beschrieben sind, von denen der eine einem sphärischen nEck umschrieben, der zweite ihm eingeschrieben ist, und man den Bogen eines gröfsten Kreises $Cc = a$ setzt, so ist immer

$$\int_0^{2\beta} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}} = \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2]}},$$

wo i die Anzahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet, und β, $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\operatorname{tang}\beta^2 = \frac{\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)}{\cos R^2 \sin r^2}, \quad \varkappa = \frac{\cos R\cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r}.$$

Hieraus erhält man zugleich die analytische Bedingungsgleichung zwischen R, a und r; will man sie algebraisch ausdrücken, so geschieht dies mit Hinzuziehung des algebraischen Integrals (10.) unserer Differential-Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi))}\,\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi')} \\ +\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)}\,\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi'))} \end{array}\right\} = 2\sin R\sin(\varphi'-\varphi).$$

VI.

Es ist wünschenswerth das obige elliptische Differential in die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendente zu transformiren, um dann die Aufgabe von der Kugel auf die bei der Ebene im Allgemeinen zurückzuführen.

Hiezu dient folgende Transformation: Die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendente, welche auch bei der correspondirenden Aufgabe in der Ebene vorkommt, ist

$$\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}}.$$

Unsere war (14.)

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi)^2]}}.$$

Um letztere in erstere zu transformiren, setze man:

$$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt{\left(\frac{1-\varkappa+\varkappa'}{1-\varkappa+\varkappa'}\right)}\operatorname{tang}\psi,$$

so dafs φ und ψ zu gleicher Zeit $=0$ und $=\frac{\pi}{2}$ werden.

Setzt man den Factor von $\operatorname{tang}\psi$, $=g$, so ist

$$\partial(2\varphi)=\frac{2g\,\partial\psi}{(1+g^2\operatorname{tang}\psi^2)\cos\psi^2}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi))}=\sqrt{(1+(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi))}\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi))}.$$

Setzt man nun:

$$\cos2\varphi=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi^2}{1+\operatorname{tang}\varphi^2}=\frac{1-g^2\operatorname{tang}\psi^2}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2},$$

so ist

$$\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi))}=\sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')+g^2\operatorname{tang}\psi^2(1-(\varkappa-\varkappa'))}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}$$

$$=\cos\psi\sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)},$$

Ferner erhält man:

$$\sqrt{(1+\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi)}=\sqrt{\left(\frac{1+\varkappa+\varkappa'+g^2\operatorname{tang}\psi^2(1+\varkappa-\varkappa')}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1+\varkappa+\varkappa'}{1+g^2\operatorname{tang}\psi^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(1+\operatorname{tang}\psi^2\frac{(1+(\varkappa-\varkappa'))(1-(\varkappa+\varkappa'))}{(1-(\varkappa-\varkappa'))(1+(\varkappa+\varkappa'))}\right)}.$$

Aus den drei letzten Formeln folgt:

$$\frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos2\varphi)^2)}}=\frac{2}{\sqrt{((1+\varkappa')^2-\varkappa^2)}}\cdot\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(\cos\psi^2-\sin\psi^2\left(\frac{(1-\varkappa')^2-\varkappa^2}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\right)\right)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{((1+\varkappa')^2-\varkappa^2)}}\cdot\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin\psi^2\right)}}.$$

Da dies die Form des gewöhnlichen elliptischen Differentials ist, und die Construction der Multiplication und Addition desselben in der No. 1. erwähnten Abhandlung angegeben ist, so hat man auch die Construction unseres obigen Differentials auf jene frühere zurückgeführt.

Wir haben oben für das sphärische n Eck obiger Beschaffenheit die Bedingungsgleichung (21.) gehabt:

$$\Pi(2\pi) = n\Pi(2\beta), \quad \text{oder} \quad K' = n.T, \quad \text{oder}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}} = n\int_0^{2\beta} \frac{\partial(2\varphi)}{\sqrt{(1-(\varkappa+\varkappa'\cos 2\varphi)^2)}}.$$

Hieraus wird jetzt

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin\psi^2\right)}} = n\int_0^{\alpha} \frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}\sin\psi^2\right)}},$$

so dafs zwischen β und α die aus der Transformation abgeleitete Bedingungsgleichung statt findet:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}\right)}\operatorname{tang}\alpha.$$

Wenn man aber

$$\frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2} = c^2$$

setzt, und die Bedingungen von I. wieder angewendet werden, nemlich:

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}} = F\alpha, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi^2)}} = F\frac{\pi}{2},$$

und

$$\operatorname{am} t = \alpha, \quad \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2},$$

so ist das letzte Integral:

$$F\pi = nF\alpha \quad \text{oder} \quad 2K = nt.$$

Dieses ist aber die Bedingung für ein n Eck in der Ebene, und daher folgendes Theorem aufzustellen:

Theorem 2. „Die analytische Bedingungsgleichung für ein n Eck in der Ebene, damit es einem Kreise ein- und dem andern umgeschrieben sei, welche

$$2K = nt$$

ist, für den Modul genommen:

$$c^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2},$$

giebt, verbunden mit der Formel:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')}\right)}\operatorname{tang}\alpha,$$

den ersten Polarwinkel $2\beta = PCP'$ von einem sphärischen Vieleck mit eben so vielen Seiten, welches zu 2 kleinen Kugelkreisen dasselbe Verhalten hat, deren Gröſse und Lage durch die Formeln (15., 16. und 17.)

$$\frac{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa')]}.\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]}+\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa']}.\sqrt{[1-\varkappa-\varkappa'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin R,$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\varkappa'}{\varkappa}\operatorname{cotang} R, \quad \cos r^2 = \frac{\cos R^2 \sin R^2}{\varkappa^2 \sin R^2 + \varkappa' \cos R^2}$$

bestimmt wird.

VII.

Wenn man statt der Gröſsen $\varkappa$ und $\varkappa'$ ihre Werthe zurück setzt:

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

so erhält man:

$$g^2 = \frac{1-(\varkappa+\varkappa')}{1-(\varkappa-\varkappa')} = \frac{\sin\frac{(R-a+r)}{2}\sin\frac{(R-a-r)}{2}}{\sin\frac{(R+a+r)}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}}.$$

Ferner wird:

$$\frac{2}{\sqrt{(1+\varkappa')^2-\varkappa^2}} = \frac{\cos r}{\sqrt{\left(\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\right)}};$$

endlich wird:

$$c^2 = \frac{4\varkappa'}{(1+\varkappa+\varkappa')1-(\varkappa-\varkappa')} = \frac{\sin R \sin a \cos r}{\sqrt{\left(\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{(R+a-r)}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\right)}},$$

woraus folgt:

$$1-c^2 = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}}.$$

Hienach wird das allgemeine Differential:

$$\left\{\frac{\cos r}{\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right\},$$

$$\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{\cos r \sin R \sin a \sin\psi^2}{\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right)}}.$$

Die Formeln aus No. I. für $\cos\alpha$ und $1-cc$ mögen jetzt verglichen werden mit den Ausdrücken für diese Gröſsen auf der Kugel. Es war:

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a}, \quad 1-cc = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2-1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1},$$

und für die Kugel-Oberfläche:

$$\tan\beta^2 = \frac{\sin(R-a)^2-\sin r^2}{\cos R^2 \sin r^2}, \quad 1-cc = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{R-a-r}{2}}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{R+a-r}{2}\right)}.$$

Mit Anwendung der Formel:

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{R-a-r}{2}\sin\frac{R-a+r}{2}}{\sin\frac{R+a-r}{2}\sin\frac{R+a+r}{2}}\right)}\operatorname{tang}\alpha$$

erhält man endlich folgende Gleichungen:

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{R+a+r}{2}\operatorname{tang}\frac{R+a-r}{2}} = \frac{\left(\frac{R-a}{r}\right)^2-1}{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1}$$

und

$$\frac{4\sin\frac{R-a+r}{2}\sin\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}}{\cos R^2\sin r^2}$$

$$= \left\{\frac{\sin\frac{R-a+r}{2}\sin\frac{R-a-r}{2}}{\sin\frac{R+a+r}{2}\sin\frac{R+a-r}{2}}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{R+a}{r}\right)^2-1\right\},$$

woraus folgt:

22. $$\frac{R+a+r}{r} = \frac{2\sin\frac{R+a+r}{2}\cos\frac{R-a+r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R+r)+\sin a}{\cos R\sin r},$$

23. $$\frac{R+a-r}{r} = \frac{2\sin\frac{R+a-r}{2}\cos\frac{R-a-r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R-r)+\sin a}{\cos R\sin r},$$

24. $$\frac{R-a+r}{r} = \frac{2\sin\frac{R-a+r}{2}\cos\frac{R+a+r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R+r)-\sin a}{\cos R\sin r},$$

25. $$\frac{R-a-r}{r} = \frac{2\sin\frac{R-a-r}{2}\cos\frac{R+a-r}{2}}{\cos R\sin r} = \frac{\sin(R-r)-\sin a}{\cos R\sin r}.$$

Es folgt hieraus:

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tang}R}{\operatorname{tang}r} \quad \text{und} \quad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R\sin r}.$$

Es finden sich diese Formeln alle beim Dreieck und Viereck bestätigt, und im Allgemeinen gilt daher folgendes Theorem:

Thorem 3. „Wenn man eine Bedingungs-Gleichung zwischen R, a und r für ein n Eck in der Ebene hat, welche dem Kreise R ein- und dem Kreise r umgeschrieben ist, und man folgende Substitution anstellt:

$$\frac{R}{r} = \frac{\tan R}{\tan r}, \quad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R \sin r},$$

so erhält man unmittelbar die correspondirende Bedingungs-Gleichung zwischen R, r und a auf der Kugel-Oberfläche für ein sphärisches Polygon von gleich vielen Seiten."

VIII.

Wir wollen dies Theorem am sphärischen Dreieck und Viereck obiger Beschaffenheit prüfen, wofür in No. III. die Formeln (12. und 13.) auf geometrischem Wege abgeleitet sind.

Die Formel für das Dreieck in der Ebene ist:

$$(R+a-r)(R-a-r) = r^2,$$

hieraus folgt aus (23. und 25.) für das sphärische Dreieck:

$$\sin(R+a-r)\sin(R-a-r) = \cos R^2 \sin r^2.$$

Die Formel für das Viereck in der Ebene ist:

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r) = r^4;$$

hieraus folgt aus (22., 23., 24. und 25.) für das spärische Viereck:

$$\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r) = \cos R^4 \sin r^4.$$

Beide stimmen mit den obigen völlig überein.

Die Formel für das Fünfeck in der Ebene war:

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = (p^2+q^2-p^2.q^2)^2$$

oder

$$4p^2q^2(p-1)(q-1) = [1-(p^2-1)(q^2-1)]^2.$$

Dieses giebt, wenn man für p und q die Werthe setzt,

$$p = \frac{R+a}{r} \quad \text{und} \quad q = \frac{R-a}{r}:$$

$$\frac{4(R+a)^2}{r^2}.\frac{(R-a)^2}{r^2}.\left(\frac{R+a-r}{r}\right).\left(\frac{R-a-r}{r}\right) = \left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right).\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^2.$$

Da nun aus den Transformationsformeln (22., 23., 24. und 25.)

$$\frac{(R+a)^2}{r^2}.\frac{(R-a)^2}{r^2} = \left(\frac{\sin R^2 \cos r^2 - \sin a^2}{\cos R^2 \sin r^2}\right)^2,$$

so folgt für das sphärische Fünfeck folgende Bedingungs-Gleichung:

$$4(\sin R^2 \cos r^2 - \sin a^2)^2 \sin(R+a-r)\sin(R-a-r)\cos R^2 \sin r^2$$
$$= [\cos R^4 \sin r^4 - \sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^2.$$

Die Formel für das Sechseck in der Ebene ist:

$$\frac{4(R+a)^2}{r^2}\cdot\frac{(R-a)^2}{r^2}\cdot\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)$$
$$=\left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^2.$$

Auf ähnlichem Wege als beim Fünfeck erhält man für das sphärische Sechseck folgende Formel:

$$4(\sin R^2\cos r^2-\sin a^2)^2\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)$$
$$=[\cos R^4\sin r^4-\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^2.$$

Die Formel für das Achteck in der Ebene ist:

$$16.\quad\frac{(R+a)^4}{r^4}\cdot\frac{(R-a)^4}{r^4}\cdot\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)$$
$$=\left[1-\left(\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right)\right]^4.$$

Aus denselben obigen Transformationsformeln (22., 23., 24. und 25.) folgt:

$$16(\sin R^2\cos r^2-\sin a^2)^4\cos R^4\sin r^4\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)$$
$$=[\cos R^4\sin r^4-\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)]^4.$$

Königsberg, den 1. Mai 1829.

19.

Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.

(Von Herrn Prof. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. In neuester Zeit ist die eine grofse Hälfte der Geometrie, die von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig ist, und die H. Gergonne aus diesem Grunde *Géométrie de situation* genannt hat, mit besonderer Vorliebe ausgebildet worden. Hier ist es, wo die verschiedenen Projections-Methoden, vereint mit dem *principe de continuité*, auf eine überraschend leichte Art zu einer unzähligen Menge von Resultaten führen. Hier ist aber auch das Feld, wo die Vortheile der allgemeinen analytischen Methode sich am augenscheinlichsten darstellen. Ein Symbol, das die allgemeine Gleichung der Linie irgend einer Ordnung bezeichnet, stellt mithin auch alle möglichen einzelnen ebenen Curven dar, die man durch irgend eine Projections-Art einer, als gegeben betrachteten Curve dieser Ordnung erhalten kann. Wir brauchen also hier nicht zu projiciren. Die reinen Situations-Beziehungen gegebener Curven oder Flächen zu einander sind durch Gleichungen zwischen den, diese Curven oder Flächen vertretenden Symbolen und unbestimmten Coëfficienten gegeben: wir brauchen also hier nichts von der Proportionen-Geometrie (nicht die harmonische Theilung, nicht die Theorie der Transversalen) zu entlehnen; auch nicht in den einfachern Fällen, die das Projections-Verfahren nachher zu verallgemeinern lehrt. Und endlich die Theorie der idealen Chorden, die Hauptgrundlage des fruchtbaren *principe de continuité*, ist nach meiner Ansicht nichts Anders als eine geometrische Umschreibung der algebraischen Theorie der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen man gelangt, wenn man die Coordinaten zwischen den Gleichungen zweier Curven eliminirt: das Princip ist also schon von selbst in der allgemeinen analytischen Behandlung enthalten, und hat hier nichts Gewagtes, wie in der rein geometrischen Behandlung, für welche mir

19.
Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.

(Von Herrn Prof. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. In neuester Zeit ist die eine grofse Hälfte der Geometrie, die von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig ist, und die H. Gergonne aus diesem Grunde *Géométrie de situation* genannt hat, mit besonderer Vorliebe ausgebildet worden. Hier ist es, wo die verschiedenen Projections-Methoden, vereint mit dem *principe de continuité*, auf eine überraschend leichte Art zu einer unzähligen Menge von Resultaten führen. Hier ist aber auch das Feld, wo die Vortheile der allgemeinen analytischen Methode sich am augenscheinlichsten darstellen. Ein Symbol, das die allgemeine Gleichung der Linie irgend einer Ordnung bezeichnet, stellt mithin auch alle möglichen einzelnen ebenen Curven dar, die man durch irgend eine Projections-Art einer, als gegeben betrachteten Curve dieser Ordnung erhalten kann. Wir brauchen also hier nicht zu projiciren. Die reinen Situations-Beziehungen gegebener Curven oder Flächen zu einander sind durch Gleichungen zwischen den, diese Curven oder Flächen vertretenden Symbolen und unbestimmten Coëfficienten gegeben: wir brauchen also hier nichts von der Proportionen-Geometrie (nicht die harmonische Theilung, nicht die Theorie der Transversalen) zu entlehnen; auch nicht in den einfachern Fällen, die das Projections-Verfahren nachher zu verallgemeinern lehrt. Und endlich die Theorie der idealen Chorden, die Hauptgrundlage des fruchtbaren *principe de continuité*, ist nach meiner Ansicht nichts Anders als eine geometrische Umschreibung der algebraischen Theorie der imaginären Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen man gelangt, wenn man die Coordinaten zwischen den Gleichungen zweier Curven eliminirt: das Princip ist also schon von selbst in der allgemeinen analytischen Behandlung enthalten, und hat hier nichts Gewagtes, wie in der rein geometrischen Behandlung, für welche mir

dasselbe, dessen ungeachtet, die schönste und eine nothwendige Erweiterung däucht.

Das, was die beiden in Rede stehenden Methoden mit einander gemein haben und wovon bei den alten Geometern, die mit ängstlicher Gewissenhaftigkeit alles Einzelne zusammenreihen, fast keine Spur vorkommt, sind jene allgemeinen Gesichtspuncte oder Principien, unter denen sie die Sätze zusammenfassen und dadurch aus einzelnen bewiesenen Sätzen sogleich viele ableiten. Hierhin gehören zunächst die Theorie des Projicirens und das *principe de continuité*, deren Vortheile, nach dem oben Bemerkten, in der Verbindung allgemeiner Symbole vermittelst unbestimmter Coëfficienten einschliefslich enthalten sind. Hierhin gehört die Poncelet-, Gergonnesche *Théorie des polaires réciproques* (*principe de dualité*), die jeden Satz verdoppeln lehrt und die nur ein specieller Fall des Princips der Variation der Constanten ist, über das ich bereits schon an einem andern Orte einige Andeutungen gegeben habe und das ich später mit aller Ausführlichkeit behandeln werde. Hieran reiht sich endlich auch dasjenige neue Princip, von dem am Ende dieses Aufsatzes kurz die Rede sein wird, nach welchen man sogleich alle Sätze der linearen Situations-Geometrie auf die Curven irgend einer beliebigen Ordnung im Allgemeinen, und insbesondere auch auf Kreise etc. übertragen kann.

Zuvörderst ist es aber nothwendig zu zeigen, wie solche Sätze, die sich auf den Durchschnitt von geraden Linien beziehen, sich, indem man sie direct angreift, vermittelst allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten heweisen lassen. Hier mufs ich mich auf ein Paar Beispiele beschränken, die einen Theil einer gröfsern Abhandlung bilden. Neue Sätze zu beweisen, liegt hier natürlich nicht in meiner Absicht, wohl aber, nebenher wenigstens, durch ein passendes Beispiel zu belegen, wie jeder hierher gehörige Satz, auch der zusammengesetzteste, sich ohne Mühe der Methode schmiegt. Hiernach wendete sich meine Aufmerksamkeit auf eine Gruppe von Sätzen die im Maihefte des Jahres 1828 der zu Montpellier erscheinenden *Annales des mathématiques* zum Beweise vorgelegt worden ist, und die mir vorzugsweise elegant schien. Diese Auswahl mufste mir um so passender scheinen, als seitdem durchaus nichts weiter über diese Gruppe von Sätzen erfolgt ist, und wie ich jetzt glauben mufs, auch ihr Urheber dieselbe nicht bewiesen hat, da sie zum Theil falsch sind.

§. 1.

Beispiele des Gebrauchs allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten.

2. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke sich, paarweise genommen, in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, so erhält man aufserdem noch sechs Durchschnittspuncte. Wenn man je zwei dieser sechs Puncte durch gerade Linien verbindet, so erhält man fünf und vierzig neue Durchschnittspuncte, von denen (die obigen drei in gerader Linie liegenden mitgerechnet) sechszig mal drei in gerader Linie liegen."

Wir wollen die Seiten der beiden Dreiecke durch die Gleichungen:

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0;\quad a'=0,\quad b'=0,\quad c'=0$$

und diejenige gerade Linie, auf welcher die drei Durchschnitte derselben liegen, durch:

$$d=0$$

darstellen. Alsdann sind die Bedingungen des vorstehenden Satzes durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$a+a'=d,^{*)}\quad b+b'=d,\quad c+c'=d,$$

oder auch, da über die gerade Linie d (deren Gleichung: $d=0$) durchaus keine nähere Bestimmung im Satze vorkommt, durch folgende:

$$a+a'=b+b'=c+c'.$$

Wir erhalten alsdann, als einzelnen Fall des obigen Satzes, folgende drei Puncte:

$$[a,\ (b,c';\ b',c)],\quad [b,\ (a,c';\ a',c)],\quad [c,\ (a,b';\ a',b)],^{**)}$$

die in gerader Linie liegen.

---

*) Wenn wir durch a, a' und d lineare Ausdrücke von der Form $(y+Ax+B)$ bezeichnen, so erhalten wir, wie bekannt, wenn die drei geraden Linien:

$$a=0,\quad a'=0,\quad d=0,$$

durch denselben Punct gehen sollen, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\mu a+\mu' a'=d,$$

in welcher μ und μ' zwei Coëfficienten bezeichnen. Statt dieser Gleichung können wir offenbar auch die Gleichung des Textes nehmen, wenn wir unter a und a' Ausdrücke von der allgemeinern Form $(Ay+Bx+C)$ verstehen.

**) Wenn (a) und (b) zwei Puncte bezeichnen, so stellen wir diejenige gerade Linie, die durch diese beiden Puncte geht, durch (a, b) dar; wenn (a) und (b) zwei gerade Linien bezeichnen, so stellen wir durch (a, b) ihren Durchschnittspunct dar. Hiernach ist $[(a, b), (c, d)]$, oder, was wir hiermit für identisch nehmen, $[a, b;\ c, d]$, wenn (a), (b), (c) und (d) Puncte bedeuten, der Durchschnitt der geraden Linien (a, b) und (c, d); wenn aber jene Buchstaben gerade Linien bedeuten, diejenige neue gerade Linie, welche die beiden Puncte (a, b) und (c, d) verbindet.

Nach unserer Methode greifen wir diesen Satz ganz direct, oder, wie man sich hier auch ausdrücken kann, rein synthetisch an. Wir bilden zunächst die Gleichung für die geraden Linien (b, c') und (b', c), dann für (a, c') und (a', c), dann die Gleichung für die gerade Linie:

$$\{[a, (b, c'; b'c)], [b, (a, c'; a'c)]\},$$

und zeigen endlich, daſs diese Linie auch durch den dritten Punct

$$[c, (a, b'; a'b)]$$

geht. Wir kommen hierzu ungemein leicht auf folgende Weise:

Aus der Bedingungs-Gleichung:

$$b + b' = c + c'$$

folgt:

$$b - c' = c - b'.$$

Da also die beiden Theile dieser Gleichung identisch sind, stellen

$$1.\quad b - c' = 0, \quad c - b' = 0,$$

dieselbe gerade Linie dar, und diese Linie geht, wie die Form der ersten dieser beiden Gleichungen (die eine algebraische Folge aus den Gleichungen $b = 0$ und $c' = 0$ ist) zeigt, einerseits durch den Punct (b, c'), und, wie die Form der zweiten Gleichung zeigt, andrerseits durch den Punct (b', c); ist also keine andere als die gerade Linie $(b, c'; b', c)$. Diese Linie wird also durch jede der beiden identischen Gleichungen (1.) dargestellt.

Ganz auf ähnliche Weise, oder auch durch bloſse Buchstaben-Vertauschung, erhalten wir für die geraden Linien $(a, c'; a'c)$ und $(a, b'; a', b)$ folgende Gleichungen:

$$2.\quad a - c' = 0, \quad c - a' = 0;$$

$$3.\quad a - b' = 0, \quad b - a' = 0.$$

Hiernach sehen wir sogleich, daſs die drei geraden Linien $(b, c'; b', c)$, $(a, c'; a', c)$ und $(a, b'; a'b)$:

$$c - b' = 0, \quad a - c' = 0, \quad b - a' = 0,$$

respective von den geraden Linien:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

in solchen drei Puncten geschnitten werden, die in gerader Linie liegen. Denn, wenn wir die bezüglichen Gleichungen addiren, so kommt:

$$a + c - b' = 0, \quad a + b - c' = 0, \quad b + c - a' = 0:$$

Gleichungen, deren erste Theile unter sich identisch sind und identisch mit dem ersten Theile folgender Gleichung:

$$4.\quad a + b + c - d = 0.$$

3. Auf ganz ähnliche Weise können wir den Beweis führen, dafs folgende drei Puncte

$$[a'(b, c'; b'c], \quad [b'(a, c'; a'c)], \quad [c'(a, b'; a', b)],$$

in gerader Linie liegen, was auch sogleich aus der Symmetrie der Bedingungs-Gleichungen in Beziehung auf a, b, c und a', b', c' hervorgeht. Und zugleich erhalten wir hiernach auf der Stelle für die Gleichung dieser geraden Linie aus (4.) folgende:

$$5. \quad a' + b' + c' - d = 0.$$

Wenn wir die beiden Gleichungen (4. und 5.) addiren, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichungen:

$$6. \quad d = 0.$$

Es gehen also die drei geraden Linien (4., 5. und 6.), mithin drei von den sechszig im Satze der vorigen Nummer bezeichneten geraden Linien, durch einen und denselben Punct. In der 5. Nummer werden wir einen zweiten Beweis desselben Satzes geben.

4. Es ist bekannt, dafs diejenigen sechs Durchschnitte der Seiten des Dreiecks $a'b'c'$, die nicht schon in die gerade Linie d fallen, auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, und somit folgt der Satz der 2. Nummer unmittelbar aus dem Pascalschen Satze vom eingeschriebenen Sechseck. Mir kam es hier, indem ich den Schlufs dieses Aufsatzes im Auge hatte, darauf an, einen solchen Satz zu beweisen, der sich blofs auf den Durchschnitt von geraden Linien bezieht, und den Beweis blofs durch allgemeine Symbole und unbestimmte Coëfficienten zu führen.

Der Kürze wegen wollen wir die sechs Puncte (Winkelpuncte des eingeschriebenen Sechsecks):

$$(b, a'), \quad (b, c'), \quad (c, b'), \quad (c, a'), \quad (a, c'), \quad (a, b'),$$

durch:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6),$$

bezeichnen, so dafs also die geraden Linien:

$$(a), \quad (b), \quad (c), \quad (a'), \quad (b'), \quad (c'),$$

durch

$$(5, 6), \quad (1, 2), \quad (3, 4), \quad (1, 4) \quad (3, 6) \quad (2, 5),$$

dargestellt werden. Hiernach stellt z. B. die Gleichung (4.) diejenige gerade Linie dar, welche durch diejenigen drei Puncte geht, in welchen die im nachstehenden Schema untereinander gestellten Linien sich schneiden:

$$7. \quad \begin{cases} (1,2) & (2,3) & (3,4) \\ (4,5) & (5,6) & (6,1), \end{cases}$$

denn der Punct (1, 2) ist kein anderer als: $[b,(c,a';a,c')]$ u. s. w. Indem wir die Aufeinanderfolge der Winkelpuncte des Sechsecks auf alle mögliche Weise ändern, erhalten wir $6.5.4.3.2.1 = 720$ solcher verschiedenen Schemata, von denen aber zwölf und zwölf dieselben drei Puncte bezeichnen, so dafs wir nur sechszig solcher verschiedenen Linien erhalten. Der Kürze halber wollen wir die diese Linien darstellenden Schemata durch die Aufeinanderfolge der in diesen vorkommenden Ziffern bezeichnen, so dafs z. B. das vorstehende Schema (7.) durch 1 2 3 4 5 6 bezeichnet wird. Auf diese Weise erhalten wir für jene sechszig gerade Linien, die wir, der Kürze halber, Pascalsche nennen wollen, folgende sechszig Symbole, die wir, mit Rücksicht auf das Folgende, sogleich in zwanzig Gruppen zu drei ordnen.

142536 162435 152634	I,	123456 163254 143652	VI,	162534 142635 152436	XI,	163452 123654 143256	XVI,
132546 162345 152643	II,	123465 153264 143562	VII,	162543 132645 152346	XII,	153462 123564 143265	XVII,
132456 162354 142653	III,	124356 164253 134652	VIII,	162453 132654 142356	XIII,	164352 124653 134256	XVIII,
132465 152364 142563	IV,	124365 154263 134562	IX,	152463 132564 142365	XIV,	154362 124563 134265	XIX,
123546 163245 153642	V,	125364 145263 135462	X,	163542 123645 153246	XV,	145362 125463 135264	XX.

5. „Wenn die Seiten zweier Dreiecke, paarweise genommen, sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Spitzen der beiden Dreiecke verbinden, durch einen und denselben Punct."

Bei derselben Bezeichnung, als in der 2. Nummer, sind diese drei sich in demselben Puncte schneidenden geraden Linien folgende:

$$(a,b;a',b'), \quad (a,c;a'c'), \quad (b,c;b'c');$$

für deren Gleichungen wir, ganz ähnlich wie in der eben genannten

Nummer, aus den Bedingungs-Gleichungen:

$$a + a' = b + b' = c + c'$$

folgende erhalten:

$$8.\quad a - b = 0,\quad \text{oder}\quad -(a' - b') = 0;$$
$$9.\quad a - c = 0,\quad \text{-}\quad -(a' - c') = 0;$$
$$10.\quad b - c = 0,\quad \text{-}\quad -(b' - c') = 0.$$

Ziehen wir die Gleichungen (8.) von den Gleichungen (9.) ab, so erhalten wir die Gleichungen (10.). Es gehen also die drei bezüglichen geraden Linien durch denselben Punct, und somit ist der vorstehende Satz bewiesen.

6. Wenn wir wieder von dem einschreibbaren Sechseck ausgehen, so sind die drei geraden Linien (8.), (9.) und (10.) keine anderen als diejenigen, denen folgende Schemata entsprechen:

$$11.\quad \left\{\begin{matrix} 2,1 & 1,4 & [4,5] & \quad 3,4 & 4,1 & [1,6] & \quad 1,2 & 2,5 & [5,4] \\ 5,6 & 6,3 & [3,2] & \quad 6,5 & 5,2 & [2,3] & \quad 4,3 & 3,6 & [6,1] \end{matrix}\right\},$$

mithin die zweite, dritte und erste Pascalsche Linie der XVI. Gruppe. Hiernach finden wir durch Ziffern-Vertauschung, daſs auch die drei Linien jeder der übrigen 19 Gruppen in demselben Puncte sich schneiden.

Dasselbe können wir auch direct für jede dieser Gruppen auf folgende Weise zeigen. Nehmen wir z. B. die drei Linien der I. Gruppe, denen folgende Schemata entsprechen:

$$\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & [2,5] & \quad [1,6] & 6,2 & 2,4 & \quad 1,5 & [5,2] & 2,6 \\ 5,3 & 3,6 & [6,1] & \quad [4,3] & 3,5 & 5,1 & \quad 6,3 & [3,4] & 4,1 \end{matrix}$$

so können wir diese Linien, indem wir von den eingeklammerten Linien-Symbolen abstrahiren, durch die Durchschnitte der drei Linien (1,4), (4,2) und (2,6) mit den drei Linien (6,3), (3,5) und (5,1) construiren. Es liegen aber die übrigen drei Durchschnitte dieser beiden Linien-Systeme in gerader Linie, denn das Schema:

$$12.\quad \left\{\begin{matrix} 1,4 & 4,2 & 2,6 \\ 6,3 & 3,5 & 5,1 \end{matrix}\right.$$

entspricht der 2. Linie der XI. Gruppe. Und somit ist nach der 5. Nummer das zu Beweisende dargethan. (Wenn wir durch andere Durchschnitte die drei Schemata (11.) construirt hätten, so hätten wir statt (12.) zwei solche Schemata erhalten, die den beiden übrigen Linien der XI. Gruppe entsprechen.)

Man kann hiernach den allgemeinen Pascalschen Satz mit dem eben bewiesenen in folgende Aussage zusammenfassen:

Wenn in eine Linie zweiter Ordnung ein beliebiges Sechseck beschrieben ist, und man bildet drei Dreiecke, zwei aus den zweimal drei gegenüberliegenden Seiten, und das dritte aus den drei Diagonalen desselben, so liegen die neun Spitzen dieser drei Dreiecke auf solchen drei geraden Linien, die in demselben Puncte sich schneiden.

Solcher Durchschnittspuncte erhält man für dieselben sechs, auf dem Umfange einer Linie zweiter Ordnung beliebig angenommenen Puncte, zwanzig verschiedene. Diesen zwanzig Puncten entsprechen die zwanzig Gruppen der 4. Nummer.

7. Von den zwanzig Durchschnittspuncten dreier und dreier Pascalscher Linien liegen funfzehn mal vier in gerader Linie, so daſs solcher gerader Linien durch jeden Durchschnittspunct drei verschiedene gehen.

So liegen z. B. die vier Puncte, in welchen sich die drei Linien jeder von den folgenden vier Gruppen schneiden, in gerader Linie:

$$\left.\begin{matrix}123456\\163254\\143652\end{matrix}\right\}\ \text{VI},\qquad \left.\begin{matrix}123465\\153264\\143562\end{matrix}\right\}\ \text{VII},\qquad \left.\begin{matrix}124356\\164253\\134652\end{matrix}\right\}\ \text{VIII},\qquad \left.\begin{matrix}124365\\154263\\134562\end{matrix}\right\}\ \text{IX}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir wiederum keinen andern Satz zu Hülfe zu nehmen als den Pascalschen. Der Kürze wegen wollen wir denjenigen Punct, in welchem sich drei Pascalsche Linien schneiden, durch die dieser Linien-Gruppe beigesetzte römische Ziffer bezeichnen, so daſs also z. B. die vier Puncte VI, VII, VIII und IX nach dem Vorstehenden in gerader Linie liegen. Wir wollen ferner die drei durch den Punct I. gehenden Pascalschen Linien in derjenigen Ordnung, wie sie sich in der ersten Gruppe finden, durch I_1, I_2, I_3 mit den beigefügten Ziffern 1, 2, 3 bezeichnen und dem entsprechend alle übrigen, so daſs z. B. die gerade Linie 134652 durch $VIII_3$ bezeichnet wird.

Hiernach liegen auf der Pascalschen Linie VI_1 die drei Puncte:

$$13.\quad (1,2;4,5),\quad (2,3;5,6),\quad (3,4;6,1).$$

Durch den ersten dieser drei Puncte geht auch die Pascalsche Linie:

$$134562 \quad \text{oder} \quad IX_3,$$

durch den zweiten Punct die Linie:

$$123465 \quad \text{oder} \quad VII_1,$$

und endlich durch den dritten Punct:

124356 oder $VIII_1$.

Wir können also die drei Puncte bei (13.) auch auf folgende Weise bezeichnen:

$((1,2),\ IX_3)\qquad ((5,6),\ VII_1)\qquad ((3,4),\ VIII_1)$.

Weil diese drei Durchschnittspuncte in gerader Linie liegen, so liegen die Durchschnitte von

(1,2) mit VII_1 und $VIII_1$,
(5,6) - IX_3 - $VIII_1$,
(3,4) - IX_3 - VII_1,

alle sechs auf einer Linie zweiter Ordnung. Nun ist aber sogleich aus unserer Bezeichnung ersichtlich, dafs

VII_1 und $VIII_3$ *) so wie $VIII_1$ und VII_3 sich auf (1,2),
IX_3 - $VIII_3$ - - $VIII_1$ - IX_1 - - (5,6),
IX_3 - VII_3 - - VII_1 - IX_1 - - (3,4)

schneiden; so dafs mithin jene sechs auf einer Linie zweiter Ordnung liegenden Puncte sechs der neun Durchschnittspuncte der beiden Linien-Systeme:

VII_1, $VIII_1$, IX_3 und VII_3, $VIII_3$, IX_1

sind. Die drei übrigen Durchschnitte, nemlich

$(VII_1,\ VII_3)$, $(VIII_1,\ VIII_3)$, $(IX_1,\ IX_3)$,

welche keine andere sind, als die drei Puncte VII, VIII und IX, liegen also in gerader Linie.

Wenn wir die Ziffern 5 und 6 mit einander vertauschen, so verwandelt sich die VIII. Gruppe in die IX., und diese gegenseitig in jene, die VI. Gruppe in die VII., und diese in jene. Es liegen also auch die drei Puncte VI, VIII und IX, und mithin alle vier Puncte: VI, VII, VIII und IX, in gerader Linie.

8. Es bleibt uns jetzt nur noch zu zeigen übrig, wie die in Rede stehenden zwanzig Puncte sich zu solchen vier, die in gerader Linie liegen, zusammenordnen, und wie viele solcher Linien, die vier jener Puncte enthalten.

*) VII_1 und $VIII_3$ sind die durch folgende beiden Schemata bezeichneten Linien:

1,2	2,3	3,4	und	1,3	3,4	4,6
4,6	6,5	5,1		6,5	5,2	2,1.

Beide Linien gehen also durch den Punct ((1,2), (4,6)), der, wie seine Bezeichnung anzeigt, auf der geraden Linie (1,2) liegt.

In der combinatorischen Zusammenstellung der in zwanzig Gruppen geordneten sechszig Symbole (4. Nummer) ist Folgendes beobachtet worden. Sechs Elemente lassen sich auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Arten zu drei combiniren, und also auf zehnfache Weise in zweimal drei Elemente theilen. So erhält man z. B. 1, 2, 3 und 4, 5, 6. Schreibt man nun die drei ersten Elemente in die erste, dritte und fünfte Stelle, und die drei andern, nach einander, in die zweite, vierte und sechste, in die vierte, sechste und zweite, und endlich in die sechste, zweite und vierte Stelle, so erhält man die erste Gruppe:

$$\left.\begin{matrix} 1\;4\;2\;5\;3\;6 \\ 1\;6\;2\;4\;3\;5 \\ 1\;5\;2\;6\;3\;4 \end{matrix}\right\} \text{I.}$$

Diese Gruppe können wir also durch das Schema $\binom{123}{456}$, mit welchem folgendes $\binom{456}{123}$, gleichbedeutend ist, darstellen. Indem man die drei ersten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 123, in der Ordnung 231 oder 312, und die drei letzten Elemente, statt in der Aufeinanderfolge 456, in der Ordnung 564 oder 645 nimmt, bekommt man keine n e u e n Linien. Man erhält ebenfalls keine n e u e n Linien, wenn man die Permutationen 123, 231, 312, und zugleich die Permutationen 456, 564, 645 in umgekehrter Ordnung nimmt. Hiernach wird also die I. Gruppe z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{456}, \quad \binom{231}{456}, \quad \binom{132}{546}.$$

Man erhält aber eine neue Gruppe, wenn man die Permutationen 123, 231, 312 umkehrt und die Permutationen 456, 564, 645 nicht umkehrt. Diese neue Gruppe, die XI., wird z. B. durch folgende gleichbedeutende Symbole dargestellt:

$$\binom{123}{654}, \quad \binom{132}{456}, \quad \binom{321}{456}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die obigen 2 . 10 = 20 verschiedenen Gruppen.

Denjenigen vier Puncten VI, VII, VIII und IX, die, wie wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, in gerader Linie liegen, entsprechen also folgende Symbole:

$$\binom{135}{246}, \quad \binom{136}{245}, \quad \binom{145}{236}, \quad \binom{146}{235}.$$

Es giebt also so oft mal vier Puncte, die in gerader Linie liegen, als

wir durch Ziffern-Vertauschung in dem letzten Schema, Schemata für neue Gruppen erhalten.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie viel neue Schemata wir auf diese Weise erhalten, in denen die Gruppe $\binom{135}{246}$, also die VI. Gruppe, vorkommt, oder, was dasselbe heifst, mit wie viel mal drei Puncten der Punct (VI) in gerader Linie liegt.

Wenn wir das letzte Schema ansehen, so ist klar, dafs wir dasselbe unmittelbar hinschreiben können, wenn wir eine Gruppe desselben mit dem ihr in jenem Schema zugehörigen Ziffern-Symbol, und die Stelle, die diese Gruppe einnimmt, kennen. Überdies ist leicht ersichtlich, dafs jenes Schema dieselben Gruppen umfafst, welche Stelle wir jenem Ziffern-Symbol auch anweisen mögen. Nun wird aber die VI. Gruppe durch folgende 18 verschiedene Ziffern-Symbole:

$$\binom{135}{246},\ \binom{351}{246},\ \binom{513}{246},\ \binom{135}{462},\ \binom{351}{462},\ \binom{513}{462},\ \binom{135}{624},\ \binom{351}{624},\ \binom{513}{624},$$

$$\binom{531}{642},\ \binom{315}{642},\ \binom{153}{642},\ \binom{531}{426},\ \binom{315}{426},\ \binom{153}{426},\ \binom{531}{264},\ \binom{315}{264},\ \binom{153}{264},$$

dargestellt, und noch durch eben so viele andere, indem man $\binom{135}{246}$ mit $\binom{246}{135}$ vertauscht u. s. w. Jedem dieser Ziffern-Symbole entspricht ein Schema, das wir nach dem eben Bemerkten sogleich bilden können. Unter allen diesen Schematen sind aber nur d r e i v e r s c h i e d e n e. Um diese zu bilden, braucht man nur die drei ersten der vorstehenden Symbole zum Grunde zu legen. Man erhält alsdann, indem man denselben die ersten Stellen giebt, die drei ersten Schemata der dieser Nummer am Ende beigefügten Tafel.

Wir sehen hieraus, dafs jeder der zwanzig Puncte, in welchen drei P a s c a l sche Linien sich schneiden, mit dreimal drei andern auf drei geraden Linien liegen. Wir erhalten also im Ganzen $\frac{20.3}{4} = 15$ solcher geraden Linien, auf deren jeder vier von jenen zwanzig Durchschnittspuncten liegen. Hiernach erhalten wir folgende Tafel, in der wir die Klammern fortgelassen haben.

135 246	136 245	145 236	146 235	VI,	VII,	VIII,	IX.
351 246	356 245	341 256	346 251	VI,	II,	V,	III.
513 246	516 243	543 216	546 213	VI,	X,	IV,	I.
365 241	361 245	345 213	341 215	XII,	VII,	IV,	XV.
615 243	613 245	645 213	643 215	XX,	VII,	XI,	III.
431 256	436 251	451 236	456 231	XV,	XIII,	VIII,	I.
534 216	536 214	514 236	516 234	XIV,	II,	VIII,	XX.
435 261	431 265	465 231	461 235	XIV,	V,	IX,	IX.
635 214	634 215	615 234	614 235	XII,	XIII,	X,	IX.
563 214	564 213	513 264	514 263	XII,	XI,	XIV,	XVIII.
163 245	165 243	143 265	145 263	XVII,	X,	V,	XVIII.
463 251	461 253	453 261	451 263	III,	XIX,	IV,	XVIII.
613 254	614 253	653 261	654 263	XVII,	XIX,	II,	I.
143 256	146 253	153 246	156 243	XV,	XIX,	XVI,	XX.
345 216	346 215	315 246	316 245	XIV,	XIII,	XVI,	XVII.

9. Der im Eingange schon erwähnte, in Gergonne's Annalen *) zum Beweise vorgelegte Satz ist wörtlich folgender:

Six points, pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de soixante hexagones inscrits et les points de contact de soixante hexagones circonscrits (Carnot, Géométrie de position) lesquels jouissent des propriétés suivantes.

*) Théorèmes sur *l'Hexagrammum mysticum*, proposés à démontrer par M. J. Steiner, de Berlin. Gerg. Ann. vol. XVIII. p. 339.

1°. Dans chacun des hexagones inscrits les points de concours des directions des cotés opposés appartiennent tous trois à une même droite D (Pascal), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D.

2°. Ces soixante droites D concourent, trois à trois, en un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p.

3°. Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq droites δ.

4°. Ces cinq droites concourent en un même point ϖ'.

1°. Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toutes trois en un même point P (Brianchon), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P.

2°. Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d, de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d.

3°. Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, en un même point ϖ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ϖ.

4°. Ces cinq points ϖ appartiennent à une même droite δ'.

5°. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

6°. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

7°. Les cinq points ϖ sont les pôles respectifs des cinq droites δ.

8°. Enfin, le point ϖ' est le pôle de la droite δ.

Nach dem Vorhergehenden sind 3° und 4° und mithin 7° und 8° nicht richtig, und von 3° an müssen wir Folgendes substituiren:

3° Ces vingt points appartiennent à quinze droites δ, dont chacune en contient quatre, de sorte que par chacun des vingt points passent trois de ces quinze droites.

3°. Ces vingt droites concourent en quinze points ϖ, par chacun desquels en passent quatre, de sorte que chacune des vingt droites contient trois de ces quinze points.

4°. Les soixante points P sont les pôles respectifs des soixante droites D.

5°. Les vingt points p sont les pôles respectifs des vingt droites d.

6°. Les quinze points ϖ sont les pôles respectifs des quinze droites δ.

Der zweite Theil der doppelten Colonnen folgt aus dem erstern unmittelbar nach der *Théorie des polaires réciproques*.

§. 2.

Neues Princip der Situations-Geometrie.

10. Die in der 2. und 5. Nummer angewendete Beweis-Art, die sich auf alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien ausdeh-

nen läſst, können wir allgemein auf folgende Weise näher bezeichnen. Wir stellen alle gegebenen geraden Linien durch Gleichungen wie folgende dar:

$$a = 0, \quad b = 0, \text{ etc.}$$

Alsdann erhalten wir die Bedingungen, auf welchen ein solcher Satz beruht, durch Gleichungen von folgender Form ausgedrückt:

$$1. \quad F(a, b, \ldots \mu, \nu, \ldots) = 0,$$

in denen μ, ν, . . . unbestimmte Coëfficienten bedeuten, oder, richtiger ausgedrückt, solche Coëfficienten, die wir nicht zu bestimmen brauchen. In den Fällen der beiden angezogenen Nummern könnten wir solche Coëfficienten ganz entbehren, und die entsprechenden Gleichungen wären:

$$a + a' = b + b' = c + c'.$$

Alsdann sind also die Beziehungen der gegebenen geraden Linien zu einander vollkommen ausgedrückt, und wir können alle andern geraden Linien, die durch die Durchschnitte der gegebenen bestimmt sind, durch Gleichungen von der Form:

$$F(a, b, \ldots \mu, \nu, \ldots) = 0,$$

ausdrücken, in welchen μ, ν, . . . dieselben oben vorkommenden Coëfficienten bedeuten. Wir erhalten also auf diese Weise direct die Gleichungen derjenigen geraden Linien, auf welche sich die Aussage des Satzes bezieht, welche wir alsdann unmittelbar aus der Form dieser Gleichungen erkennen. Die in der 2. und 4. Nummer ausgeführten Beispiele machen dies hinlänglich klar. Ein anderes Beispiel hat schon früher Herr Heinen im 3. Hefte des 3. Bandes dieses Journals mitgetheilt.

11. Indem wir auf die angezeigte Weise den Beweis für einen Satz über gerade Linien führen, haben wir eine unzählige Menge von Sätzen bewiesen. Denn, wenn wir durch a, b, . . . nicht mehr lineare Ausdrücke, sondern allgemeine Functionen desselben beliebigen Grades zwischen zwei veränderlichen Gröſsen darstellen, so behalten die Bedingungs-Gleichungen (1.) ihre Bedeutung, so wie auch alle Gleichungen bis zu den Endgleichungen hin. Das Einzige fast, was sich ändert, ist die Anzahl der Durchschnitte. Wenn ein solches Beweis-Schema vorliegt, so können wir dasselbe auf Linien jeder beliebigen Ordnung beziehen. Wir können hiernach, die Möglichkeit eines solchen Schema vorausgesetzt, auch ohne daſs ein solches vorliegt, aber allerdings mit einiger Vorsicht, jeden Satz der linearen Situations-Geometrie auf Linien jedes beliebigen Grades übertragen.

12. Machen wir eine Anwendung hiervon auf die in §. 1. bewiesenen Sätze, so erhalten wir auf der Stelle folgende:

Wenn auf einer gegebenen Linie $m$ter Ordnung (d) sich drei Paare von Linien derselben Ordnung, a und a', b und b', c und c' schneiden, so schneiden sich a, b, c und a', b', c' aufserdem noch in sechs Gruppen von m^2 Puncten, die auf einer Linie der $2m$ten Ordnung liegen. Aus der 2. und 3. Nummer ergeben sich alsdann folgende Sätze. Durch drei mal zwei der sechs Gruppen von m^2 Durchschnittspuncten lassen sich drei neue Linien der $m$ten Ordnung legen, die wir, ähnlich wie bei Linien erster Ordnung, durch

$$2.\quad (a, b'; a', b),\ (a, c'; a', c),\ (b c'; b', c),$$

bezeichnen können. Diese werden, respective, von den gegebenen Linien $m$ter Ordnung:

$$c,\quad b,\quad a,$$

in dreimal m^2 Puncten geschnitten, die alle auf einer und derselben neuen Linie $m$ter Ordnung (g) liegen. Dieselben Curven (2.) werden, respective, von den drei übrigen gegebenen:

$$c',\quad b',\quad a',$$

ebenfalls in solchen $3m^2$ Puncten geschnitten, die auf einer Curve der $m$ten Ordnung (h) liegen. Die beiden Curven (g) und (h) schneiden die gegebene (d) in denselben m^2 Puncten.

In der Beweisführung der 5. Nummer ist folgender allgemeiner Satz enthalten. Diejenigen drei Curven $m$ter Ordnung, die durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$(3.)\quad (a, b; a', b'),\ (a, c; a', c'),\ (b, c; b', c'),$$

gehen alle drei durch dieselben m^2 Puncte. Solcher Curven, die durch dieselben m^2 Puncte gehen, erhalten wir aufserdem noch dreimal drei, nemlich jedesmal zwei der Curven (2.) und eine der Curven (3.); was sogleich aus Accent-Vertauschung sich ergiebt *).

---

*) Den ganzen Satz der 9. Nummer über sechs Puncte, durch welche sich eine Linie zweiter Ordnung legen läfst, können wir nicht, ohne Weiteres, auf Curven einer beliebigen Ordnung ausdehnen. Denn durch die beiden Durchschnitte von zwei Paaren gerader Linien läfst sich immer eine neue gerade Linie legen; nicht aber, im Allgemeinen, eine Linie $m$ter Ordnung durch die $2m^2$ Durchschnitte zweier Paare von Linien $m$ter Ordnung. So läfst sich z. B., wenn wir auch hier die Bezeichnung der 4. Nummer beibehalten, im Allgemeinen keine Linie $m$ter Ordnung durch die beiden Gruppen von m^2 Durchschnitten (1.) und (3.) legen. Wir können aber, und dies ist wohl zu bemerken, auch für den Fall linearer Gleichungen die Gleichung der geraden Linie (1. 3.)

Wenn wir die Gergonnesche Eintheilung der Curven in Classen adoptiren wollen, so können wir unmittelbar nach der bekannten *Théorie des polaires réciproques* die vorstehenden Sätze verdoppeln.

13. Was wir in der 11. Nummer von den Curven jedes beliebigen Grades im Allgemeinen gesagt haben, gilt mit gleichem Rechte auch von allen speciellen Arten der Curven eines beliebigen Grades, die durch die allgemeine Gleichung dieses Grades, in welcher zwischen den Constanten beliebige lineare Bedingungs-Gleichungen Statt finden, oder in welchen insbesondere gewisse Constanten Null oder ein für allemal bestimmt sind, dargestellt werden. Wenn in diesen Fällen

$$a = 0, \quad b = 0$$

zwei solche Curven darstellen, so stellt auch die Gleichung

$$\mu a + \nu b = 0$$

eine Curve derselben Art dar, worauf es hier eigentlich allein ankommt.

Durch diese Betrachtungen gewinnt das in Rede stehende Princip der Situations-Geometrie sehr an Fruchtbarkeit. So können wir z. B. durch a, b, . . . Ausdrücke von der Form

$$\mu[(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 - \varrho^2]$$

oder von folgender Form:

$$\beta y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon$$

darstellen, mithin (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten) auf Kreise oder auf gleichseitige Hyperbeln alle Sätze über den Durchschnitt von geraden Linien übertragen.

14. Für den Kreis z. B. erhalten wir hiernach aus dem Vorhergehenden folgende Sätze:

Wenn auf einem gegebenen Kreise (oder einer gegebenen geraden Linie) sich sechs Kreise, paarweise genommen, schneiden, so schneiden die zweimal drei Kreise sich überdies noch in sechs Paaren von Puncten. Durch diese sechs Puncten-Paare, zu zweien genommen, lassen sich noch drei Kreise legen. Von den neun Kreisen, die wir auf diese Weise, den gegebenen nicht mitgerechnet, erhalten, schneiden sich zwei-

---

auf keine bestimmte Weise ausdrücken, wenn wir über die Symbole a, b u. s. w. keine andere Bestimmungen machen, als in der 2. Nummer. — Eine Gleichung wie folgende:

$$\mu a + \mu' a' = \nu b + \nu' b',$$

drückt, allein für sich, wenn a, b, a' und b' linear sind, keine Beziehungen zwischen den bezüglichen geraden Linien aus: wohl aber, wenn a, b, a' und b' von höherm Grade sind, Beziehungen zwischen den bezüglichen Linien höherer Ordnung.

mal drei Paare in zweimal sechs solchen Puncten, die auf zwei neuen Kreisen liegen (Nro. 2.). Diese beiden neuen Kreise haben mit dem gegebenen dieselbe Chorde (Nro. 3.).

Wenn auf einem gegebenen Kreise sich drei Paare von Kreisen schneiden, so lassen sich im Ganzen sechs neue Kreise durch die zweimal zwei Durchschnitte von zweimal zwei derselben legen. Von diesen sechs Kreisen schneiden sich viermal drei in denselben beiden Puncten (Nr. 5.).

Es ist klar, daſs wir theilweise auch gerade Linien an die Stelle von Kreisen, wie überhaupt an die Stelle von Linien einer beliebigen Ordnung, deren Asymptoten parallel sind, Linien der $(m-1)$ten Ordnung setzen können.

15. Man sieht leicht ein, daſs man nach dem in Rede stehenden Princip auf diese Weise eine groſse Menge von Sätzen über die Durchschnitte (reelle oder ideale, oder über Berührungen) von Kreisen erhält, wenn wir nach einander von allen bekannten, namentlich auch von den einfachern Sätzen über die Durchschnitte von geraden Linien ausgehen und alle einzelnen Fälle discutiren. Und dann erhalten wir nach der *Théorie des polaires réciproques* eben so viele Sätze über solche Linien zweiter Ordnung, die einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben (confocale Linien zweiter Ordnung, Confocalen).

16. Wir wollen mit einem letzten hierher gehörigen Beispiele schlieſsen. Folgender Satz ist bekannt.

Wenn zwei feste gerade Linien gegeben sind, und man durch einen festen Punct P, nach beliebigen Richtungen, zwei gerade Linien zieht und die Durchschnitte dieser beiden Linien mit den beiden gegebenen noch durch zwei neue gerade Linien verbindet, so liegt der Durchschnitt Q dieser beiden letztgezogenen geraden Linien immer, wie wir auch die Richtungen der beiden durch den festen Punct P gehenden geraden Linien bestimmen mögen, auf einer festen geraden Linie, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen geht. Diese Linie bleibt auch dann noch dieselbe, wenn der bisher als fest betrachtete Punct P auf einer geraden Linie fortrückt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien geht *).

*) Wir können diesen Satz nach unserer Methode leicht folgendergestalt beweisen. Seien

$$a = 0, \quad b = 0,$$

Die beiden gegebenen Linien und die beiden andern, welche die Puncte P und Q enthalten, nennt man Harmonicalen (*faisceau harmonique*).

Durch Übertragung erhalten wir hiernach folgenden Satz:

Wenn zwei feste Kreise gegeben sind, und man legt durch irgend zwei Puncte, die mit den Durchschnitten dieser beiden Kreise auf demselben dritten Kreise liegen, irgend zwei neue beliebige Kreise, so schneiden diese die beiden festen gegebenen Kreise in solchen viermal zwei Puncten, die sich noch durch zwei Kreise verbinden lassen. Die so bestimmten zwei Kreise schneiden sich in solchen zwei Puncten, die auf dem Umfange eines und desselben Kreises bleiben, wie wir auch durch jene beiden Puncte zwei beliebige Kreise legen, und wie wir auch diese Puncte selbst auf dem Umfange des dritten Kreises annehmen mögen. Dieser so bestimmte vierte feste Kreis geht durch die Durchschnitte der beiden gegebenen.

17. Nach der *Théorie des polaires réciproques* erhalten wir aus dem letzten Satze folgenden:

Wenn drei confocale Linien zweiter Ordnung gegeben sind, welche dieselben beiden geraden Linien berühren, und man beschreibt irgend zwei beliebige Confocalen, die beide mit der dritten gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, so haben diese beiden Confocalen mit den beiden ersten gegebenen und festen viermal zwei gemeinschaftliche Tangenten, und es giebt noch zwei neue Confocalen, die

---

die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien, und

$$m = o, \quad n = o,$$

die Gleichungen der beiden andern Linien, die sich in P schneiden; und endlich sei

$$d = o$$

die Gleichung derjenigen Linie, die den Punct P mit dem Durchschnitte von (a) und (b) verbindet Alsdann erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$a + b = m + n = d,$$

und hiernach für die Gleichungen der beiden Linien $[(a, m), (b, n)]$ und $[(b, m), (a, n)]$, die sich in Q schneiden:

$$a - m = n - b = o, \quad b - m = n - a = o.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen von einander abziehen, kommt:

$$a - b = o,$$

eine Gleichung die unabhängig ist von m und n und eine gerade Linie darstellt, die durch den Durchschnitt der beiden gegebenen Linien a und b geht. Vier Harmonicalen sind demnach durch Gleichungen von folgenden Formen dargestellt:

$$a = o, \quad b = o, \quad a + b = o, \quad a - b = o.$$

vier und vier dieser gemeinschaftlichen Tangenten berühren. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden neuen Confocalen umhüllen eine vierte feste Confocale, die mit den drei gegebenen dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten hat, wenn wir unter den angegebenen Bedingungen für die beiden beliebigen Curven alle möglichen nehmen.

18. Es drängt sich uns hier noch eine Bemerkung auf, die wir nicht ganz unberührt lassen können. Die vier festen Kreise des Satzes der 16. Nummer treten an die Stelle der vier Harmonicalen des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes. Sie sind durch das System von vier Gleichungen:

$$1. \quad a = 0, \quad b = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0$$

gegeben, deren Beziehung zu einander gerade dieselbe ist, als für den Fall gerader Linien. Neben den vier Harmonicalen stehen nach der *Théorie des polaires réciproques* vier harmonische Theilungspuncte einer geraden Linie: neben jenen vier Kreis-Harmonicalen, um mich so auszudrücken, jenen vier harmonischen Theilungspuncten entsprechend, die vier festen Confocalen der 17. Nummer.

Es ist nach dem Princip, das der Gegenstand dieses Paragraphen ist, klar, dafs vier Curven einer beliebigen Ordnung, die durch das System von Gleichungen (1.) sich ausdrücken lassen, und also auch alle vier durch dieselben m^2 Puncte gehen, den vier linearen Harmonicalen entsprechen, und dafs es in jeder Classe (Gergonne) Curven mit m^2 gemeinschaftlichen Tangenten giebt, die den vier harmonischen Theilungspuncten entsprechen. Was für andere Eigenschaften sonst noch solchen Curven-Systemen entsprechen, kann uns hier nicht angehn; es liegt uns blofs ob, anzudeuten, wie die Theorie der harmonischen Theilung und der Harmonicalen, dieser Lieblinge der neuern Geometer, sich ins Unbegrenzte hin erweitern läfst.

Bonn, am 6. August 1829.

20.

Solution d'une question relative à la théorie mathématique de la chaleur.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

La question qui va nous occuper et qui a pour objet de déterminer les états successifs d'une barre primitivement échauffée d'une manière quelconque et dont les deux extrémités sont entretenues à des températures données en fonction du temps, a déjà été résolue par Mr. Fourier dans un Mémoire inséré dans le Vol. VIII. de la collection de l'Académie royale des sciences de Paris. La méthode dont cet illustre géomètre a fait usage dans cette recherche est une espèce singulière de passage du fini à l'infini, et offre un nouvel exemple de la fécondité de ce procédé analytique qui avait déjà conduit l'auteur à tant de résultats remarquables dans son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur. J'ai traité la même question par une analyse dont la marche diffère beaucoup de celle de Mr. Fourier et qui donne lieu à l'emploi de quelques artifices de calcul, qui paraissent pouvoir être utiles dans d'autres recherches.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons l'unité linéaire qui est arbitraire, tellement choisie que la longueur de la barre soit égale à π, cette lettre désignant à l'ordinaire le rapport du diamètre à la circonférence. Soit x la distance d'un point quelconque de la barre à l'une de ces extrémités, que nous nommerons la première extrémité. La température du point x à l'instant t est une fonction u de x et de t, et c'est cette fonction qui fait l'objet de la question. Soit $F(t)$ la fonction donnée de t qui exprime la température à laquelle la première extrémité est entretenue, et soit de même $f(t)$ la température de la seconde extrémité, $F(t)$ et $f(t)$ étant des fonctions arbitraires dont les valeurs sont données pour toute valeur positive de t, et désignons enfin par $\varphi(x)$ la température initiale du point dont l'abscisse est x.

En faisant abstraction du rayonnement latéral, la fonction u doit satisfaire à cette équation aux différences partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans laquelle k désigne un coëfficient dépendant des propriétés spécifiques de la substance dont la barre est formée.

Pour plus de simplicité, nous supposerons égal à l'unité le coëfficient k qu'il sera facile de rétablir à la fin du calcul, de sorte que l'équation précédente se changera en celle-ci:

$$(1.)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cela posé, la fonction cherchée doit évidemment remplir les quatre conditions suivantes:

(2.)
1°. Elle doit satisfaire à l'équation (1.) quels que soient x et t.
2°. Pour $x=0$, elle doit se réduire à la fonction donnée $F(t)$.
3°. Pour $x=\pi$, elle doit se réduire à la fonction $f(t)$ également donnée.
4°. Lorsque t est nul, elle doit coïncider dans toute l'étendue de la barre, c'est à dire tant que x est inférieur à π, avec la fonction $\varphi(x)$ qui exprime les températures initiales.

La question que nous avons à résoudre se partage naturellement en deux autres. On fera d'abord abstraction de la quatrième condition et l'on cherchera une fonction v de x et de t uniquement assujétie à remplir les 3 premières. Il y a une infinité de fonctions qui satisfont à ces 3 conditions, et qui diffèrent entre elles en ce qu'elles se réduisent à des fonctions de x différentes entre elles par la supposition de $t=0$; mais il suffit d'en obtenir une seule. Une pareille fonction v étant trouvée, on y fera $t=0$, ce qui la réduira à une fonction $\chi(x)$ de x. On formera ensuite la différence $\varphi(x)-\chi(x)$ et l'on cherchera la fonction entièrement déterminée w de x et t, qui satisfait à l'équation (1.) s'évanouit pour $x=0$ et $x=\pi$ quel que soit t, et se réduit à $\varphi(x)-\chi(x)$ lorsqu'on y fait $t=0$.

Cette seconde question est résolue depuis longtemps, c'est celle de la détermination du mouvement de la chaleur dans une barre dont l'état initial est exprimé par $\varphi(x)-\chi(x)$ et dont les extrémités sont entretenues à la température zéro. Les deux fonctions v et w dont il vient d'être question, étant ajoutées, formeront une nouvelle fonction de x et t, qui remplit l'ensemble des conditions (2.). En effet, chacune d'elles satisfaisant à l'équation (1.), leur somme y satisfera également. La pre-

mière se réduisant à $F(t)$ pour $x=0$, et la seconde s'évanouissant dans cette même supposition, leur somme remplira évidemment la seconde des conditions (2.). Il en est de même de la troisième de ces conditions. Quant à la quatrième, il est également manifeste qu'elle est satisfaite par la somme $v+w$ que nous venons de former, v se reduisant à $\chi(x)$ et w à $\varphi(x)-\chi(x)$, lorsqu'on y suppose le temps nul. La somme $v+w$ est donc la fonction cherchée u.

La marche que nous venons d'indiquer revient à assujettir les deux extremités d'une barre, l'une à la température $F(t)$, l'autre à la température $f(t)$, sans supposer arbitraire l'état initial de cette barre, à considérer une seconde barre dont les extrémités sont entretenues à la température zéro et dont l'état initial est la différence entre l'état initial arbitraire $\varphi(x)$ et celui de la première barre, et à ajouter ensuite les expressions qui expriment les états variables de ces deux barres.

La recherche de la fonction v peut à son tour se décomposer en deux autres questions plus simples; car il est évident que pour obtenir une fonction qui remplisse les 3 premières des conditions (2.), il suffit de chercher d'abord une expression v' qui soit assujétie à la première et à la troisième de ces conditions et qui s'évanouisse pour $x=0$, et de déterminer ensuite une seconde expression v'' qui remplisse la première et la seconde, et devienne égale à zéro lorsqu'on y suppose $x=\pi$; la somme $v'+w''$ de ces expressions satisfera manifestement aux 3 premières des conditions (2.) et pourra par conséquent être prise pour v.

Quant à ces nouvelles fonctions v' et v'', il est facile de voir qu'elles peuvent être obtenues de la même manière, c'est à dire que l'une d'elles la première v', par exemple, étant trouvée, l'autre v'' s'en déduira immédiatement. Il suffira pour cela, de changer en $F(t)$ la fonction arbitraire $f(t)$ que renferme cette expression v' et d'y remplacer en même temps x par $\pi-x$. Il est évident que l'expression v' ainsi modifiée satisfera toujours à l'équation (1.) et que pour $x=0$, $x=\pi$ elle se réduira respectivement à $F(t)$ et à zéro; elle pourra donc être prise pour v''.

Toute la difficulté du problème que nous nous sommes proposé de résoudre, se réduit donc à la recherche d'une fonction v' de x et de t, qui remplisse les 3 conditions de satisfaire à l'équation (1.), de s'évanouir pour $x=0$, et de se réduire à $f(t)$ lorsqu'on y fait $x=\pi$.

On satisfait à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ par une solution particulière de cette forme

$$(3.)\quad r\cos\alpha t + s\sin\alpha t,$$

α désignant une quantité constante mais arbitraire, et r et s étant des fonctions de x et de α sans t. En effet, différentiant l'expression précédente une fois par rapport à t, et deux fois par rapport à x, et égalant les deux résultats, il viendra

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\cos\alpha t + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\sin\alpha t = \alpha s\cos\alpha t - \alpha r\sin\alpha t,$$

équation qui aura évidemment lieu quels que soient x et t, si les fonctions r et s sont telles que l'on ait

$$(4.)\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \alpha s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\alpha r.$$

Ces équations différentielles simultanées étant linéaires et à coëfficiens constans, il sera facile d'en trouver les intégrales complètes, et comme ces équations sont l'une et l'autre du second ordre, les valeurs générales de r et de s renfermeront chacune deux constantes arbitraires. Ces 4 constantes peuvent servir à assujettir chacune des fonctions r et s à deux conditions. Supposons qu'on les choisisse de manière à avoir $r=0$, $s=0$ lorsque $x=0$, et $r=1$, $s=0$, lorsqu'on fait $x=\pi$. Désignant par R et S les valeurs de r et s ainsi particularisées, nous aurons l'expression

$$(5.)\quad R\cos\alpha t + S\sin\alpha t$$

qui, outre qu'elle satisfait à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jouit encore de la double propriété de s'évanouir pour $x=0$, et de se réduire à $\cos\alpha t$, l'orsqu'on y fait $x=\pi$. L'expression précédente étant multipliée par $\psi(\alpha)\partial\alpha$, $\psi(\alpha)$ désignant une fonction entièrement arbitraire de α, et intégrée depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\infty$, donnera cette nouvelle fonction de x et de t:

$$\int_0^\infty (R\cos\alpha t + S\sin\alpha t)\,\psi(\alpha)\,\partial\alpha,$$

qui satisfera également à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, s'évanouira pour $x=0$, et deviendra $\int_0^\infty \psi(\alpha)\cos\alpha t\,\partial\alpha$, lorsqu'on y fait $x=\pi$. La fonction $\psi(\alpha)$ étant arbitraire, on peut la choisir de manière que l'intégrale précédente devienne égale à la fonction donnée $f(t)$, pour toute valeur positive de t. La fonction $\psi(\alpha)$ qui remplit cette condition, est d'après le

théorème connu de Mr. Fourier (*Théorie de la chaleur, pag.* 431.) celle que donne l'équation $\psi(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha\mu f(\mu)\,\partial\mu$, dans laquelle μ est une variable auxiliaire qui disparait par l'intégration définie. Si l'on substitue cette valeur de $\psi(\alpha)$ dans l'expression obtenue plus haut, on aura cette nouvelle expression

$$(6.)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty (R\cos\alpha t + S\sin\alpha t) f(\mu)\cos\alpha\mu\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

qui remplit les 3 conditions de satisfaire à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, de s'évanouir pour $x = 0$, et de devenir $f(t)$ pour $x = \pi$. Cette expression peut donc être prise pour v'. Si l'on change ensuite x en $\pi - x$, et $f(\mu)$ en $F(\mu)$ dans l'expression précédente, on aura une nouvelle expression, que l'on pourra prendre pour v'', et il ne restera plus qu'à former la troisième partie w de la solution.

Cette troisième partie exprime, comme nous l'avons vu plus haut, les états successifs d'une barre dont les deux extremités sont entretenues à la température zéro et dont l'état initial est $\varphi(x) - \chi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction primitivement donnée et $\chi(x)$ désignant la fonction de x, à laquelle se réduit la somme $v' + v'' = v$, lorsqu'on y fait $t = 0$. Quoique d'après ce que nous avons dit plus haut il suffise pour la solution de notre probèlme, d'obtenir une quelconque des fonctions en nombre infini qui remplissent les 3 premières des conditions (2.), le choix de cette fonction n'est pas indifférent. Le calcul se simplifie d'une manière remarquable, lorsque l'on prend pour v une fonction telle que l'on puisse prévoir, qu'elle est la fonction $\chi(x)$ à laquelle elle se reduit pour $t = 0$; car alors on pourra former immédiatement la troisième partie w, dans la composition de laquelle entre cette fonction $\chi(x)$. La valeur de v précédemment obtenue ne présente pas cette facilité, mais il est facile d'en obtenir une qui remplisse cet objet, en modifiant un peu l'analyse que nous venons d'employer. C'est ce que nous allons faire voir en reprenant ce que nous avons dit depuis que nous sommes parvenus à l'expression (5.).

La variable t étant remplacée dans cette expression par $t - \mu$, μ désignant une nouvelle arbitraire indépendante de α, x et t, elle ne cessera pas de satisfaire à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et de s'évanouir pour $x = 0$, quelle que soit la valeur positive ou négative de t, mais pour $x = \pi$ elle se réduira à $\cos\alpha(t - \mu)$.

Multipliant l'expression ainsi modifiée par $\frac{1}{\pi}f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu$ et intégrant depuis $\mu=0$, $\alpha=0$, jusqu'à $\mu=\infty$, $\alpha=\infty$, on aura cette nouvelle fonction de x et de t

$$(7.)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty (R\cos\alpha(t-\mu)+S\sin\alpha(t-\mu))\,f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

qui satisfait encore à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, s'évanouit pour $x=0$, et se réduit à

$$\frac{1}{\pi}\iint\cos\alpha(t-\mu)\,f(\mu)\,\partial\alpha\,\partial\mu,$$

lorsqu'on y fait $x=\pi$. La valeur de cette intégrale double est connue par le théorème de Mr. Fourier et l'intégration relative à μ ne s'étendant que depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=\infty$, cette valeur est $f(t)$ lorsque t est positif, et égal à zéro, lorsque le temps t devient négatif. La formule (7.) exprime donc les états variables d'une barre dont les deux extrémités ont été entretenues à la température zéro pendant tout le temps infini antérieur à l'instant qui répond à $t=0$, et dont la seconde extrémité est entretenue à la température $f(t)$ à partir de cette époque, la première conservant toujours la température zéro. Or il est évident qu'une barre dont les deux extremités ont été assujéties à la température zéro pendant un temps infini, a acquis dans tous ses points cette même température zéro. Donc, l'expression (7.) doit s'évanouir pour toute valeur de x inférieure à π, lorsqu'on y fait $t=0$. Il serait d'ailleurs facile d'obtenir cette même conséquence par le seul examen de l'expression (7.) et sans aucune considération physique.

Prenant l'expression (7.) pour v' et l'expression qui s'en déduit par le changement de $f(\mu)$ en $F(\mu)$ et de x en $\pi-x$, pour v'', la somme $v'+v''$ s'évanouira pour $t=0$; la fonction $\chi(x)$ sera nulle et la troisième partie w sera l'expression des états variables d'une barre dont les deux extrémités sont assujéties à la température zéro et dont l'état initial est exprimé par la fonction connue $\varphi(x)$. Cette troisième partie w est donnée par la formule suivante, dans laquelle le signe Σ se rapporte à toutes les valeurs positives et entières de i,

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin ix\,e^{-i^2 t}\int_0^\pi\varphi(\mu)\,\sin i\mu\,\partial\mu.$$

(*Théorie de la chaleur*, pag. 436.)

La valeur de v' (7.) est sous une forme assez compliquée. Il en est de même de la seconde partie v''. Ces deux expressions se simplifient beaucoup lorsqu'on leur donne une forme analogue à celle de la troisième, c'est à dire, l'orsqu'on les développe en séries de sinus des arcs multiples de x. Ce développement est évidemment permis, la variable x ne devant recevoir que des valeurs inférieures à π dans l'expression v' (7.) et dans l'expression analogue v''. Pour transformer la fonction (7.) en une pareille série, il suffira de développer R et S, qui renferment seules la variable x. Faisons donc

$$(8.)\quad R = \Sigma b_i \sin ix, \quad S = \Sigma c_i \sin ix$$

le signe Σ se rapportant comme précédemment aux valeurs positives et entières de i. Les coëfficiens b_i et c_i qui ne peuvent dépendre que de α, seront donnés par ces intégrales définies, d'après la théorie connue des séries de sinus.

$$(9.)\quad b = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi R \sin ix\, \partial x, \quad c_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi S \sin ix\, \partial x.$$

On peut obtenir les valeurs de ces deux intégrales définies, sans être obligé de résoudre les équations différentielles (4.).

Pour y parvenir, nous remplacerons dans les expressions précédentes de b_i et c_i, R et S par les différentielles secondes $-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ qui leur sont respectivement égales en vertu des équations (4.) dont R et S sont des intégrales particulières. Intégrant ensuite deux fois par parties, les expressions de b_i et c_i, et observant qu'à la première limite $x=0$, $\sin ix$, R et S sont nulles, et qu'à la seconde limite $x=\pi$, on a $\sin i\pi = 0$, $R=1$, $S=0$, il viendra

$$b_i = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{i^2}{\alpha}\int_0^\pi S \sin ix\, \partial x,$$

$$c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\cos i\pi}{\alpha} - \frac{2i^2}{\pi\alpha}\int_0^\pi R\sin ix\, \partial x.$$

Mais d'après les équations (9.) les deux intégrales précédentes sont respectivement équivalentes à $\frac{\pi}{2}b_i$, $\frac{\pi}{2}c_i$. La substitution de ces valeurs donne ces 2 relations entre b_i et c_i:

$$b_i = \frac{i^2}{\alpha}c_i, \quad c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\cos i\pi}{\alpha} - \frac{i^2}{\alpha}b_i,$$

d'où l'on tire:

$$b_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i^3\cos i\pi}{\alpha^2+i^4}, \quad c_i = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{i\alpha\cos i\pi}{\alpha^2+i^4}.$$

Mettant ces valeurs des coëfficiens b_i et c_i dans R et S (8.), substituant ensuite R et S ainsi transformées dans l'expression (7.) et intervertissant l'ordre des signes Σ et $\int$, l'expression (7.) deviendra:

$$(10.)\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\mu)\,\partial\mu\,\Sigma\frac{2i\cos i\pi\sin ix}{\pi}\left(\int_0^\infty\frac{i^2\cos\alpha(t-\mu)}{\alpha^2+i^4}\partial\alpha+\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha(t-\mu)}{\alpha^2+i^4}\partial\alpha\right).$$

Les deux intégrales relatives à α que renferme cette expression sont faciles à obtenir par les formules connues. On a, comme l'on sait:

$$\int_0^\infty\frac{b\cos\alpha l}{b^2+\alpha^2}\partial\alpha=\frac{\pi}{2}e^{\mp bl},\quad \int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha l}{\alpha^2+b^2}\partial\alpha=\pm\frac{\pi}{2}e^{\mp bl},$$

b désignant une quantité positive, et le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu selon que l est positif ou négatif. En comparant ces résultats avec les intégrales précédentes, on voit que ces deux intégrales ont l'une et l'autre la valeur $\frac{\pi}{2}e^{-i^2(t-\mu)}$ lorsque $t-\mu$ est positif, et que lorsque $t-\mu$ est négatif, elles ont respectivement les valeurs

$$\frac{\pi}{2}e^{i^2(t-\mu)},\quad -\frac{\pi}{2}e^{i^2(t-\mu)},$$

qui ne diffèrent que par les signes. Donc, la somme de ces intégrales est $\pi e^{-i^2(t-\mu)}$ ou nulle, selon que $t-\mu$ est positif ou négatif. Il suit de là que la série contenue dans la formule (10.) peut être remplacée par

$$(11.)\quad 2\Sigma i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2(t-\mu)},$$

lorsque $t-\mu$ est positif, c'est à dire tant que μ est inférieur à t, et qu'elle se réduit à zéro, lorsque μ surpasse t. La fonction de μ qui doit être intégrée depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=\infty$, et dont la série en question est facteur, s'évanouit donc aussi pour toutes les valeurs de μ supérieures à t.

On pourra donc n'intégrer que depuis $\mu=0$ jusqu'à $\mu=t$; changeant ainsi la limite supérieure de l'intégrale (10.) et remplaçant la série qui y entre par l'expression (11.), qui lui est équivalente tant que $\mu<t$, c'est à dire dans toute l'étendue de l'intégration, l'expression (10.) prendra cette forme très simple:

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t f(\mu)\,\partial\mu\,\Sigma i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2(t-\mu)},$$

ou ce qui revient au même, en intervertissant l'ordre des signes $\int$ et Σ:

$$-\frac{2}{\pi}\Sigma i\cos i\pi\sin ix\,e^{-i^2t}\int_0^t e^{i^2\mu}f(\mu)\,\partial\mu.$$

Ayant ainsi obtenu la première partie v' de la solution, on en déduira la seconde v'' en changeant x en $\pi-x$ et $f(\mu)$ en $F(\mu)$. Si l'on

ajoute ensuite v' et v'' à la troisième partie w déjà formée plus haut, on obtiendra l'expression suivante de la température variable u du point dont l'abscisse est x

$$u = -\frac{2}{\pi}\Sigma\, i\cos i\pi \sin ix\, e^{-i^2t}\int_0^t f(\mu)e^{i^2\mu}\partial\mu$$
$$+\frac{2}{\pi}\Sigma\, i\sin ix\, e^{-i^2t}\int_0^t F(\mu)e^{i^2\mu}\partial\mu$$
$$+\frac{2}{\pi}\Sigma \sin ix\, e^{-i^2t}\int_0^\pi \varphi(\mu)\sin i\mu\,\partial\mu.$$

Cette expression diffère un peu par la forme du résultat que Mr. Fourier a donné. Pour la faire coïncider avec la formule que l'on trouve dans le Mémoire déjà cité, il faut remplacer l'intégrale qui entre dans la première partie v' de u par cette expression que donne l'intégration par parties:

$$\frac{f(t)e^{i^2t}-f(0)}{i^2}-\frac{1}{i^2}\int_0^t f'(\mu)e^{i^2\mu}\partial\mu,$$

$f'(\mu)$ désignant la fonction derivée de $f(\mu)$.

La première partie v' se change ainsi en

$$-\frac{2}{\pi}f(t)\Sigma\frac{\cos i\pi\sin ix}{i}+\frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}\,e^{-i^2t}\Big(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\,e^{i^2\mu}\partial\mu\Big).$$

Mettant maintenant à la place de $\Sigma\frac{\cos i\pi\sin ix}{i}$ sa valeur connue $-\frac{1}{2}x$, v' prendra cette forme:

$$\frac{x}{\pi}f(t)+\frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}e^{-i^2t}\Big(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\,e^{i^2\mu}\partial\mu\Big).$$

Si l'on transforme v'' d'une manière analogue et que l'on ajoute ensuite les 3 parties v', v'' et w, on aura l'expression de la température u, telle que Mr. Fourier l'a donnée.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünfter Band,

In 4 Heften.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

1830.

Inhaltsverzeichniſs
des fünften Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

Aufgaben und Lehrsätze.

---

ajoute ensuite v' et v'' à la troisième partie w déjà formée plus haut, on obtiendra l'expression suivante de la température variable u du point dont l'abscisse est x

$$u = -\frac{2}{\pi}\Sigma\, i\cos i\pi \sin i x\, e^{-i^2 t}\int_0^t f(\mu)\, e^{i^2\mu}\partial\mu$$
$$-\frac{2}{\pi}\Sigma\, i\sin i x\, e^{-i^2 t}\int_0^t F(\mu)\, e^{i^2\mu}\partial\mu$$
$$+\frac{2}{\pi}\Sigma \sin i x\, e^{-i^2 t}\int_0^\pi \varphi(\mu)\sin i\mu\,\partial\mu.$$

Cette expression diffère un peu par la forme du résultat que Mr. Fourier a donné. Pour la faire coïncider avec la formule que l'on trouve dans le Mémoire déjà cité, il faut remplacer l'intégrale qui entre dans la première partie v' de u par cette expression que donne l'intégration par parties:

$$\frac{f(t)e^{i^2 t}-f(0)}{i^2}-\frac{1}{i^2}\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\partial\mu,$$

$f'(\mu)$ désignant la fonction derivée de $f(\mu)$.

La première partie v' se change ainsi en

$$-\frac{2}{\pi}f(t)\Sigma\frac{\cos i\pi \sin ix}{i}+\frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}\, e^{-i^2 t}\Big(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\partial\mu\Big).$$

Mettant maintenant à la place de $\Sigma\frac{\cos i\pi \sin ix}{i}$ sa valeur connue $-\frac{1}{2}x$, v' prendra cette forme:

$$\frac{x}{\pi}f(t)+\frac{2}{\pi}\Sigma\cos i\pi\frac{\sin ix}{i}e^{-i^2 t}\Big(f(0)+\int_0^t f'(\mu)\, e^{i^2\mu}\partial\mu\Big).$$

Si l'on transforme v'' d'une manière analogue et que l'on ajoute ensuite les 3 parties v', v'' et w, on aura l'expression de la température u, telle que Mr. Fourier l'a donnée.

21.

Deux théorèmes sur les nombres.

Théorème I. Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de 9, suivis de plusieurs zéros. (*Annales de mathém. de Mr.* Gergonne, *tome XIX. page* 256.)

Démonstration. (*Par un abonné du present journal.*) Divisons les puissances successives de 10 par le nombre entier donné k, il ne pourra y avoir que k restes différents, zéro y compris. Donc les mêmes restes reviendront nécessairement. Soit 10^m et 10^n deux puissances de 10 qui laissent les mêmes restes, la différence $10^n - 10^m$, ou bien $10^m(10^{n-m}-1)$ sera divisible par k. Mais $10^m(10^{n-m}-1)$ est un nombre exprimé par une suite de $n-m$ neufs suivis de m zéros. Il existe donc toujours un nombre de cette forme divisible par le nombre entier donné k.

Théorème II. (*Par l'éditeur.*) Tout nombre entier est diviseur d'un nombre exprimé par une suite de périodes de chiffres donnés, suivis de plusieurs zéros.

Démonstration. Tout nombre exprimé par une suite de périodes de chiffres donnés peut être exprimé par

$$z = P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . 10^{nm}),$$

P étant la période et m le nombre de chiffres qu'elle contient. riode P y peut toujours être supposée plus grande que le diviseur k; une simple période p étoit plus petite, il n'y auroit qu'à en réunir plusi dans une seule P. En divisant ce nombre z par le nombre donné k, les zéro niers chiffres des périodes P ne pourront laisser que k restes différen Soient y compris. Donc les mêmes restes reviendront nécessairement.

$$P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{\mu m} + 10^{(\mu+1)m} \ldots . + \ldots 10^{\nu m}) \text{ et}$$
$$P(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{\mu m})$$

deux nombres composés de la période P qui laissent les mêmes restes leur différence

$$P(10^{(\mu+1)m} + 10^{(\mu+2)m} + \ldots . + 10^{\nu m}) \text{ ou b}$$
$$P . 10^{(\mu+1)m}(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots . + 10^{(\nu-\mu} \ldots$$

sera divisible par k. Mais cette différence est par le par une suite de $\nu - \mu$ périodes de m chiffres donnés, zéros. Il existe donc toujours un nombre de cette forme nombre entier donné k.

22.

Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe 6, Band 3. Heft 1. S. 99.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

---

1. Sey $\psi(x,y,z)=0$ die Gleichung einer krummen Fläche, in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten. Aus derselben sei die Gleichung $dz=p\,dx+q\,dy$ abgeleitet. Ein auf der krummen Fläche befindlicher Raum ist $\int\int v\,dx\,dy$, wo $v^2=1+p^2+q^2$, und sein Umring: $\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; beide Integrale zwischen denselben Grenzen, in Bezug auf x genommen. Bezeichnet nun h eine Constante, so fordert die Aufgabe: auf der Fläche einen gegebenen Raum mit der möglich-kürzesten Linie einzuschliefsen, dafs der Gleichung:

$$h\delta\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}+\delta\int\int v\,dx\,dy=0$$

Genüge geschehn.

Diese Gleichung giebt, nach den Regeln der Variationsrechnung behandelt, folgende:

$$1.\quad d\frac{dy}{ds}+q\,d\frac{dz}{ds}=\frac{v\,dx}{h},$$

wo $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ gesetzt worden ist.

Wendet man diese Gleichung zunächst auf die Ebene an, so sind in diesem Falle die Gröfsen p, q, v, Constanten, und man erhält die Gleichung:

$$\frac{dy+q(p\,dx+q\,dy)}{\sqrt{(dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2)}}=\frac{v}{h}(x+\alpha),$$

welche sich leicht weiter integriren läfst, und nach mehreren Reductionen die Gleichung einer Kugel: $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2+(z+\gamma)^2=h^2$ giebt. Diese, mit der gegebenen Gleichung der Ebene verbunden, welche unter der Form: $z+\gamma=p(x+\alpha)+q(y+\beta)$ zu denken ist, giebt einen Kreis vom Halbmesser h, wie es bekanntlich sein mufs.

Ist die gegebene Fläche eine Kugel, so ist $x^2+y^2+z^2=r^2$, $p=-\frac{x}{z}$, $q=-\frac{y}{z}$, und die Gleichung (1.) geht daher in folgende über:

$$z\,d\frac{dy}{ds} - y\,d\frac{dz}{ds} = \frac{r\,dx}{h}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist $x+by+cz=g$, wo b und c willkürliche Constanten sind. Die Gleichung der Kugel giebt:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

und die der Ebene:

$$dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

mithin:

$$(cx-z)\,dx = (bz-cy)\,dy \text{ und } (y-bx)\,dx = (bz-cy)\,dz.$$

Hieraus folgt:

$$ds^2.(bz-cy)^2 = (bz-cy)^2+(cx-z)^2+(y-bx)^2.dx^2 = \lambda^2.dx^2,$$

und man findet leicht, dafs $\lambda^2 = (1+b^2+c^2)r^2 - g^2$. Die Differentialgleichung wird mithin:

$$z\,d(cx-z) - y\,d(y-bx) = \frac{r\lambda}{h}dx, \text{ oder } cz\,dx + by\,dx - z\,dz - y\,dy = \frac{r\lambda}{h}dx,$$

d. h. $x+by+cz = \frac{r\lambda}{h} = g$, wodurch auch g bestimmt ist.

Die Curve des kürzesten Perimeters auf der Kugel ist also eine ebene Curve, und folglich ein Kreis, wie sich erwarten liefs.

2. Es ist in vielen Fällen nützlich, andre Coordinaten zu nehmen. Setzt man $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, so wird $ds^2 = r^2 d\psi^2 + dr^2 + dz^2$, und die Gleichung:

$$h\delta\!\int\! ds + \delta\!\int\!\!\int v\,d\psi\,r\,dr = 0$$

giebt, wenn $\delta r = 0$ angenommen wird,

$$d\frac{r^2 d\psi}{ds}\delta\psi + d\frac{dz}{ds}\delta z = \frac{v\,r\,dr}{h}\delta\psi,$$

wo $\frac{1}{v}$ wie vorhin den Cosinus der Neigung eines Flächen-Elements gegen die Ebene der x und y bedeutet.

Wenden wir diese Gleichung auf den Kegel an, dessen Gleichung $z = r\,\text{cotang}\,\alpha$, so ist, wie bei allen runden Flächen, $\delta z = 0$ zu setzen, und es ergiebt sich die Gleichung der Curve des kürzesten Perimet[ers] auf dem geraden Kegel:

$$d\frac{r^2 d\psi}{ds} = \frac{r\,dr}{h\sin\alpha}, \text{ weil } v = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Zugleich ist

$$ds^2 = r^2 d\psi^2 + \frac{dr^2}{\sin\alpha^2}.$$

Das vollständige Integral der obigen Gleichung ist:

$$r^2 - 2r\varrho\cos m(\psi - \beta) + \varrho^2 = \sigma^2,$$

wo $m = \sin\alpha$, $h\sin\alpha = \sigma$, und ϱ und β willkürliche Constanten sind.

Diese Gleichung ergiebt

$$ds = \frac{\sigma r d\psi}{r - \varrho \cos m(\psi - \beta)},$$

mithin:

$$\frac{r^2 d\psi}{ds} = \frac{r^2 - \varrho r \cos m(\psi - \beta)}{\sigma} = \frac{r^2 + \sigma^2 - \varrho^2}{2\sigma},$$

also

$$d\frac{r^2 d\psi}{ds} = \frac{r dr}{\sigma},$$

wie oben.

3. Die allgemeine Gleichung $d\frac{dy}{ds} + q d\frac{dz}{ds} = \frac{v dx}{h}$ giebt, entwikkelt, folgende:

$$dx^2 d^2y + (dz - q dy)(d^2y dz - dy d^2z) + q d^2z dx^2 = \frac{v ds^3 dx}{h},$$

oder, wenn man für $dz - q dy$ seinen Werth $p dx$ setzt:

$$2. \quad dx d^2y + q dx d^2z + p(dz d^2y - dy d^2z) = \frac{v ds^3}{h}.$$

Nun ist aber

$$(dz d^2y - dy d^2z)x + dx d^2z . y - dx . d^2y . z + \alpha = 0$$

die Gleichung der sich an eine Curve doppelter Krümmung anschliefsenden Ebene.

Die Gleichung für die Tangential-Ebene einer krummen Fläche ist bekanntlich:

$$p . x + q . y - z + \beta = 0.$$

Liegt demnach auf einer krummen Fläche eine beliebige Curve doppelter Krümmung, und bezeichnet man, in Bezug auf einen Punct der Curve und der Fläche, die Neigung der Ebene des Krümmungskreises der Curve gegen die Tangential-Ebene der Fläche, mit i, so hat man

$$\cos i = \frac{dx d^2y + q dx d^2z + p(dz d^2y - dy d^2z)}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} . \sqrt{(dx^2 d^2y^2 + dx^2 d^2z^2 + (dz d^2z - dy d^2z)^2)}}.$$

Man dividire nun die Gleichung (2.) mit

$$\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} . \sqrt{(dx^2 d^2y^2 + dx^2 d^2z^2 + (dz d^2y - dy d^2z)^2)} = v . \mu,$$

so erhält man auf der linken Seite offenbar $\cos i$, auf der rechten: $\frac{ds^3}{h\mu}$. Nun ist $\frac{ds^3}{\mu}$ der Krümmungshalbmesser R einer Curve im Raume; folglich hat man für die Curve des kürzesten Perimeters die Gleichung: $h \cos i = R$, der zufolge in jedem Puncte der Curve der Cosinus der Neigung des Krümmungs-Halbmessers derselben gegen die Tangential-Ebene der Fläche, dem Krümmungs-Halbmesser selbst proportional ist. Wenn

i seine vorige Bedeutung behält, so hat man für die kürzeste Linie auf einer Fläche bekanntlich die Gleichung: $\cos i = 0$.

4. Man denke auf der krummen Fläche einen Punct A, und durch denselben in beliebiger Richtung eine kürzeste Linie als Coordinaten-Axe gezogen. Die Lage irgend eines Punctes B auf der Fläche kann durch die Länge der kürzesten Linie zwischen A und B, d. h. durch die Entfernung dieser Puncte auf der Fläche, (a), und durch den Winkel, welchen AB im Puncte A mit der Axe einschliefst (π), angegeben werden. Nennt man nun s den Bogen einer kürzesten Linie, die von B anfangend in beliebiger Richtung und Länge auf der Fläche gezogen ist, und ψ den Winkel, welchen s im Puncte B mit AB oder a einschliefst, so kann irgend eine Curve auf der Fläche durch eine Gleichung zwischen s und ψ, als Coordinaten, bestimmt werden. Um auf ein solches Coordinatensystem die V[illegible] anwenden zu können, müssen wir erst die Ausdrücke für Bogen und Flächenraum einer Curve suchen, welche unter dieser Voraussetzung Statt finden.

Betrachten wir zu diesem Ende eine Curve, die mit einem constanten Radius s vom Puncte B aus auf der Fläche beschrieben ist. Es läfst sich sogleich ohne alle Rechnung zeigen, dafs der Radius s in jedem Puncte derselben senkrecht auf dem Perimeter steht. Denn man denke sich aus dem Mittelpuncte B noch eine zweite Curve mit dem unveränderlichen Halbmesser r beschrieben. Sei r kleiner als s, so behaupte ich, dafs $s-r$ der kürzeste Abstand eines Punctes der zweiten Curve von der ersten ist, und mithin senkrecht auf dieser steht. Denn liefse sich von diesem Puncte nach der andern Curve eine kürzeste Linie u ziehen, so dafs u kleiner wäre als $s-r$, so würde hieraus sich ein Dreieck mit den Seiten s, u, r ergeben, in welchem $s > u + r$, was ein Widerspruch ist, da s die möglich-kürzeste Linie auf der Fläche zwischen ihren Endpuncten ist.

Nennen wir den Perimeter der mit einem constanten Radius beschriebenen Curve P, so ist irgend ein Bogen desselben, von dem Puncte an gerechnet, wo $\psi = 0$, offenbar von ψ und dem Radius s abhängig. Man hat also $P = \varphi(\psi, s)$. Auch die Coordinaten a und π des Mittelpunctes B können in dem Ausdrucke für P sehr wohl vorkommen, da im Allgemeinen auf krummen Flächen die Lage dieses Punctes nicht ohne Einflufs angenommen werden darf. Man hat folglich, da s constant ist,

$dP = \varphi . d\psi$, wo φ eine gewisse, von der Natur der Fläche abhängige Function der Gröſsen ψ und s ist. Weil nun der Radius s senkrecht auf P steht, so ist klar, daſs das Element des Flächenraums einer Curve, die durch eine Gleichung zwischen ψ und s bestimmt ist, durch $dP.ds = \varphi d\psi ds$, und das Element des Bogens durch $\sqrt{(\varphi^2 d\psi^2 + ds^2)}$ ausgedrückt werden muſs.

Demnach erhält man zur Bestimmung der Curve des kürzesten Perimeters die Gleichung:

$$h\delta\int\sqrt{(\varphi^2 d\psi^2 + ds^2)} + \delta\iint\varphi\, d\psi\, ds = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen $dP^2 = \varphi^2 d\psi^2 + ds^2$, und variiren bloſs noch ψ, da bekanntlich beide Gleichungen, welche man durch die Variationen von s und ψ erhalten würde, übereinstimmen müssen, so erhalten wir:

$$\int\frac{h\varphi\, d\psi^2}{dP}\delta\varphi + \frac{h\varphi^2 d\psi}{dP}\delta d\psi + \varphi\, ds\,\delta\psi = 0;$$

welche Gleichung

$$h\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right).\frac{d\psi}{dP}d\psi - hd\left(\frac{\varphi^2 d\psi}{dP}\right) + \varphi\, ds = 0,$$

als Differentialgleichung für die Curve des kürzesten Perimeters giebt.

Diese Gleichung wird, wie leicht zu sehen, durch die Annahme $ds = 0$ befriedigt. Denn es folgt aus dieser Annahme: $dP = \varphi d\psi$, wodurch die vorgelegte Gleichung in folgende übergeht: $\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)d\psi - d\varphi = 0$, welche identisch ist, φ mag von ψ abhängen, oder, wie in einigen bekannten Fällen geschieht, nicht abhängen.

Die Annahme $ds = 0$ kann aber keine singuläre Auflösung der vorgelegten Gleichung enthalten. Denn es ist bekannt, daſs eine singuläre Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung allemal als ein Factor derselben muſs dargestellt werden können, welcher dann nur gleich Null gesetzt zu werden braucht, um die Auflösung zu erhalten. Von der andern Seite aber ist klar, daſs ds ein Factor der vorgelegten Gleichung weder ist, noch durch Entwickelung derselben werden kann. Mithin ist $ds = 0$ und folglich auch $s = \text{const.}$ ein particuläres Integral der vorgelegten Gleichung.

Es kommt nun darauf an, das Verhältniſs dieses particulären Integrals zum vollständigen zu untersuchen. Das particuläre Integral könnte z. B. nur für gewisse Orte auf der gegebenen krummen Fläche gelten. Allein dies ist gar nicht der Fall; vielmehr läſst sich leicht zeigen, daſs

die Werthbestimmung der Constanten, durch welche allein das particuläre Integral entstanden sein kann, überall auf der Fläche von den Coordinaten a und π des Punctes B abhängt. Stellen wir das allgemeine Integral durch $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ vor, wo $\varkappa$ und λ die Constanten der Integration sind.

Seien zwei Puncte m und n auf der Fläche durch Coordinaten α und σ, α' und σ', vom Puncte A aus, bestimmt. Stelle t die kürzeste Linie zwischen den Puncten B und m vor, so wird die Länge derselben nothwendig durch die Coordinaten ihrer Endpuncte bestimmt, und man hat: $t = f(\alpha, \sigma, a, \pi)$. Auch der Winkel θ, welchen t im Puncte B mit a macht, hängt von denselben Gröſsen ab, so daſs man hat:

$$\theta = f_1(\alpha, \sigma, a, \pi).$$

Für den Punct n gelten auf analoge Weise Gleichungen wie:

$$t' = f(\alpha', \sigma', a, \pi) \quad \text{und} \quad \theta' = f_1(\alpha', \sigma', a, \pi).$$

Soll also die Curve des kürzesten Perimeters durch die beiden Puncte m und n gelegt werden, so hat man zur Bestimmung der Constanten $\varkappa$ und λ folgende Gleichungen:

$$F(\theta, t, h, \varkappa, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad F(\theta', t', h, \varkappa, \lambda) = 0.$$

Diesen zufolge reduciren sich, die beiden gegebenen Puncte im Perimeter als fest vorausgesetzt, die Constanten $\varkappa$ und λ lediglich auf Functionen von a und π, und umgekehrt.

Da es nun Werthe der Constanten $\varkappa$ und λ giebt, für welche aus der Gleichung $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ der Winkel ψ gänzlich verschwindet, so giebt es auch Werthe von a und π, welche aus derselben Gleichung ebenfalls ψ verschwinden machen, und mithin eine Gleichung $F(s, h) = 0$ hervorbringen.

Wo man also auch auf einer krummen Fläche zwei Puncte annehmen möge, durch welche die Curve des kürzesten Perimeters gelegt werden soll: immer lassen sich die Coordinaten a und π eines Punctes B finden, von welchem alle Puncte des Umringes der Curve auf der Fläche gleich weit entfernt sind. Bezeichnet man die Werthe von $\varkappa$ und λ, durch welche ψ aus der Gleichung $F(\psi, s, h, \varkappa, \lambda) = 0$ verschwindet, mit $\varkappa'$ und λ', so sind die Gleichungen zur Bestimmung von s, a, π folgende: $F(s, h, \varkappa', \lambda') = 0$, $s = f(\alpha, \sigma, a, \pi) = f(\alpha', \sigma', a, \pi)$.

5. Dies ist also die characteristische Eigenschaft der Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. Es sei s der Radius einer

solchen Curve, so ist ihr Umring von s abhängig, und kann daher mit φs bezeichnet werden; der Flächenraum aber, welchen sie einschliefst, ist $\int_0^s \varphi s.ds$. Diese Ausdrücke entsprechen in der That einer Forderung, welche durch die Natur einer Curve geboten wird, die mit dem kleinsten Umring einen gegebenen Flächenraum umschliefsen soll, nemlich: dafs der Perimeter einer solchen Curve durch ihren Flächenraum bestimmt werden mufs. Dies ist z. B. in der Ebene bei dem Kreise der Fall, aber nicht bei der Ellipse, u. a. Auch die Variationsrechnung drückt eigentlich nichts weiter als diesen Umstand aus, indem sie eine Gleichung aufstellt, der zufolge die Variationen des Umringes und des Flächenraumes für die gesuchte Curve beide zugleich verschwinden sollen, was eben darauf hinausläuft, dafs die eine dieser Gröfsen durch die andre bestimmt werden, oder von der andern ausschliefslich abhängig sein mufs. Diese nothwendige Eigenschaft der in Rede stehenden Curven gab die nächste Veranlassung zu der Vermuthung, dafs alle diese Curven einen constanten Radius haben müfsten, aus welchem Umstande jene Eigenschaft wiederum hervorgeht.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dafs in dem Ausdrucke des Umrings φs die Coordinaten des Mittelpunctes vorkommen können. Dies kann allerdings weder auf der Ebene, noch auf der Kugel, noch auf den abwickelbaren Flächen der Fall sein; denn in Bezug auf die letzteren ist klar, dafs die Curve des kürzesten Perimeters durch Abwickelung in einen Kreis übergehen mufs. Kommen aber auf andern Flächen die Coordinaten des Mittelpunctes in dem Ausdrucke des Umringes vor, so müssen sie auch in dem Ausdrucke des Flächenraumes vorhanden sein. Unter dieser Voraussetzung liefse sich nach dem vortheilhaftesten Mittelpuncte fragen, d. h. nach dem, welcher bei gegebenem Flächenraum unter allen den kleinsten Perimeter bedingt. Man hätte, nach dieser Voraussetzung, $F=\psi(s,a,\pi)$, $P=\varphi(s,a,\pi)$. Eliminirt man s aus diesen Gleichungen, so erhält man $P=f(F,a,\pi)$, und wenn man mit dieser Gleichung die folgenden $\frac{dP}{da}=0$, $\frac{dP}{d\pi}=0$ verbindet, so werden die Coordinaten a und π durch den gegebenen Flächenraum F bestimmt, woraus sich denn weiter s und P ergeben müssen. Es wäre der Mühe werth, zu untersuchen, ob und in welchen Fällen die hier gemachte Voraussetzung Statt finde.

6. Wir haben hiermit auf einem indirecten Wege ein analytisches Theorem gefunden, dessen directer Beweis eben so schwierig als wünschenswerth erscheint. Dasselbe läfst sich am einfachsten folgendermafsen aussprechen:

Sei $\psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer krummen Fläche. Die Gleichung der kürzesten Linie auf derselben ist das Integral der Gleichung: $d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = 0$, welches durch

$$(a.)\quad F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0$$

bezeichnet werden mag, wo $\varkappa$ und λ die Constanten der Integration sind. Bestimmen wir eine derselben durch die Gleichung:

$$(b.)\quad F(\alpha, \beta, \varkappa, \lambda) = 0,$$

so dafs die kürzeste Linie durch den Punct auf der Fläche geht, für welchen $x = \alpha$, $y = \beta$. Setzen wir ferner den Bogen der kürzesten Linie, d. h. das Integral:

$$(c.)\quad \int_{\alpha}^{x} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = s,$$

wo s eine Constante ist. Eliminiren wir nun zwischen den 3 Gleichungen (a.), (b.), (c.) die Gröfsen $\varkappa$ und λ, so müssen wir eine Gleichung zwischen x und y erhalten, welche in Verbindung mit der Gleichung der Fläche die Curve des kürzesten Perimeters bestimmt, also als Integral der Gleichung

$$d\frac{dy}{ds} + q\,d\frac{dz}{ds} = \frac{v\,dx}{h}$$

entspricht. Die willkürlichen Constanten des Integrals, α und β, sind die Coordinaten der Projection des Mittelpunctes auf die Ebene der x und y, und die Gröfse h ist als eine Function des constanten Radius s anzusehn.

Zur Erläuterung diene noch das Beispiel des Kegels, dessen Gleichung $z = r \operatorname{cotang} \alpha$. Für die kürzeste Linie auf demselben findet sich: $r \cos m\psi + b = c$; c und b sind willkürliche Constanten und m ist, wie oben, $= \sin\alpha$. Für $\psi = \beta$ werde $r = \varrho$, so erhält man $\varrho \cos m\beta + b = 0$. Für den Bogen der kürzesten Linie erhält man: $s = c \operatorname{tang} m\psi + b - c \operatorname{tang} m\beta + b$, weil der Bogen für $\psi = \beta$ verschwinden mufs. Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man:

$$\cos m\beta + b = \frac{r \sin m(\psi - \beta)}{\sqrt{(r^2 - 2r\varrho' \cos m(\psi - \beta) + \varrho^2)}},$$

und mit Hülfe der übrigen aus der dritten: $s = \frac{r \sin m(\psi - \beta)}{\cos m\beta + b}$, woraus als Gleichung für die Curve des kürzesten Perimeters hervorgeht:

$$r^2 - 2r\varrho \cos m(\psi - \beta) + \varrho^2 = s^2, \quad \text{wie oben.}$$

Berlin im December 1829.

23.

Über Interpolation.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Eine beliebige Function y einer veränderlichen Gröfse x sei für die Werthe von x: 0, +1, +2, etc., −1, −2, −3, etc. gegeben, man soll daraus den Werth für jedes beliebige x finden.

Es seien die Werthe der Function nebst ihren Differenzen, wie aus dem folgenden Schema zu ersehen ist, bezeichnet:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\underbrace{x} & \underbrace{y} & \underbrace{\Delta.y} & \underbrace{\Delta^2.y} & \underbrace{\Delta^3.y} & \underbrace{\Delta^4.y} & \underbrace{\Delta^5.y} & \underbrace{\Delta^6.y} & \\
. & . & & . & & . & & . & \\
 & & . & & . & & . & & \\
-2 & y_{-2} & & . & & . & & . & \\
 & & a_{-\frac{3}{2}} & & . & & . & & \\
-1 & y_{-1} & & b_{-1} & & . & & . & \\
 & & a_{-\frac{1}{2}} & & c_{-\frac{1}{2}} & & e_{-\frac{1}{2}} & & \\
0 & y_0 & & b_0 & & d_0 & & e_0 & \text{etc.} \\
 & & a_{+\frac{1}{2}} & & c_{+\frac{1}{2}} & & e_{+\frac{1}{2}} & & \\
+1 & y_{+1} & & b_{+1} & & . & & . & \\
 & & a_{+\frac{3}{2}} & & . & & . & & \\
+2 & y_{+2} & & . & & . & & . & \\
 & & . & & . & & . & & \\
. & . & & . & & . & & . &
\end{array}$$

und überdies:

$$a_{-\frac{1}{2}} + a_{+\frac{1}{2}} = 2a_0,$$
$$c_{-\frac{1}{2}} + c_{+\frac{1}{2}} = 2c_0,$$
$$e_{-\frac{1}{2}} + e_{+\frac{1}{2}} = 2e_0,$$
etc.

Der Werth von y'_x sei nun:

1. $y_x = y_0 + A_{x,1}a_0 + A_{x,2}b_0 + A_{x,3}c_0 + A_{x,4}d_0 + A_{x,5}e_0 + \ldots.$

wo $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. blofs Functionen von x sind. Es läfst sich zeigen, dafs der Werth von y_x in Beziehung auf y_0, a_0, b_0 etc. blofs linearisch sein könne. Man nehme den allgemeinsten Ausdruck einer Function von y_0, a_0, b_0 etc. und $v_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} y_0^m . a_0^n . b_0^p \ldots$, wo $m, n, p, \ldots$ alle Werthe von 0 bis ∞ haben können, und $M_{x,\mu,\nu,\ldots}$ blofs von x und den Exponenten $m, n, p, \ldots$ abhängt, Σ aber das Zeichen für die Summe aller möglichen Glieder von dieser Form andeutet. Es seien nun, wenn $y = v$ ist, die resp. Werthe von y_0, a_0, b_0, c_0, ...: v_0, ${}_0\alpha$, β_0, γ_0, ...; wenn $y = v'$ ist: v'_0, α'_0, β'_0, ...; folglich, wenn $y = v + v'$ ist: $v_0 + v'_0$, $\alpha_0 + \alpha'_0$, $\beta_0 + \beta'_0$, etc. Demnach wird

$$v_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} v_0^m . \alpha_0^n . \beta_0^p \ldots; \quad v'_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} v_0'^m . \alpha_\sigma'^n . \beta_0'^p \ldots;$$

und

$$(v+v')_x = v_x + v'_x = \Sigma . M_{x,\mu,\nu,\ldots} (v_0+v'_0)^m . (\alpha_0+\alpha'_0)^n . (\beta_0+\beta'_0)^p \ldots$$

Wäre nun in dem Ausdruck ein Glied, das aus zweien oder mehreren, gleichen oder ungleichen Factoren der Gröfsen y_0, a_0, b_0 etc. bestände, so gäbe die Entwickelung desselben in dem letzten Ausdrucke durch Multiplication ein oder mehrere einzelne Producte, deren Factoren aus beiden Reihen Gröfsen v_0, α_0, β_0, ... und v'_0, α'_0, β'_0, ... zugleich genommen sind; da aber diese in der Summe der Ausdrücke für v_x und v'_x nicht vorkommen, die Factoren aber jeden beliebigen Werth haben können, so mufs der Coëfficient aller dieser Glieder $= 0$ sein; wodurch also die Allgemeinheit der Gleichung (1.) erwiesen ist.

Überhaupt läfst sich jede Function von x durch ein Aggregat von Gliedern von der Form $A \sin(z+\alpha x)$ darstellen, wo A, z, und α von x unabhängig sind; die Differenzen der verschiedenen Ordnungen sind alsdann dem Aggregate der Differenzen der einzelnen Theile von derselben Ordnung gleich. Die Coëfficienten $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. für den einzelnen Werth $y = A . \sin(z+\alpha x)$ gelten also, wie leicht zu übersehen ist, allgemein für jede Function von x. Man kann noch von dem Factor A abstrahiren, indem derselbe blofs als Coëfficient in allen Gliedern der Gleichung (1.) vorkömmt.

Setzt man daher statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$, so wird das obige Schema:

$$\begin{array}{llllll}
\underbrace{x} & \underbrace{y} & \underbrace{\Delta . y} & \underbrace{\Delta^2 . y} & \underbrace{\Delta^3 . y} & \underbrace{\Delta^4 . y} \\
. & . & . & . & . & . \\
-2, & \sin(z-2\alpha), & & & & \\
 & & +\cos(z-\frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & & & \\
-1, & \sin(z-\alpha), & & -\sin(z-\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & & \\
 & & +\cos(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & & -\cos(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3, & \\
0, & \sin z, & & -\sin z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & & +\sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4 \\
 & & +\cos(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & & -\cos(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3, & \\
+1, & \sin(z+\alpha), & & -\sin(z+\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & & \\
 & & +\cos(z+\frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & & & \\
+2, & \sin(z+2\alpha), & & & & \\
. & . & . & . & . & .
\end{array}$$

folglich wird:

$$\begin{array}{ll}
y_0 = \sin z; & d_0 = \sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4; \\
a_0 = \cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\alpha; & e_0 = \cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^5\cos\frac{1}{2}\alpha; \\
b_0 = -\sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2; & f_0 = -\sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^6; \\
c_0 = -\cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2\cos\frac{1}{2}\alpha; & \text{etc.}
\end{array}$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel (1.), so findet man:

$$\sin(z+\alpha x) = \sin z \cos\alpha x + \cos z \sin\alpha x$$
$$= \sin z\,[1 - A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots\ldots]$$
$$+ \cos z \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[A_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - A_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + A_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots\ldots],$$

oder

$$2.\quad \cos\alpha x = 1 - A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots\ldots$$
$$3.\quad \sin\alpha x = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[A_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - A_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + A_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots\ldots$$

Die Differentiation der Gleichung (2.) giebt:

$$4.\quad -x\sin\alpha x$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,[-2A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + 4A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - 6A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots\ldots],$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (3.) man

$$5.\quad A_{x,1} = \frac{2}{x}.A_{x,2},\quad A_{x,3} = \frac{4}{x}.A_{x,4},\quad A_{x,5} = \frac{6}{x}.A_{x,6},\quad \text{etc.}$$

erhält. Eine nochmalige Differentiirung giebt nach Substitution von $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$:

$$-x^2\cos\alpha x = -1.2A_{x,2} + (3.4A_{x,4} + 1.A_{x,2})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$
$$-(5.6A_{x,6} + 2.2A_{x,4})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 + (7.8A_{x,8} + 3^2A_{x,6})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 - \ldots\ldots$$

Wir haben aber auch durch die Gleichung (2.):

$$-x^2\cos\alpha x = -x^2 + x^2A_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - x^2A_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 + x^2A_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 - \ldots,$$

mithin durch Vergleichung dieser beiden Reihen:

$$\begin{aligned} 1.2A_{x,2} &= x^2, \\ 3.4A_{x,4} &= (x^2-1)A_{x,2}, \\ 5.6A_{x,6} &= (x^2-2^2)A_{x,4}, \\ 7.8A_{x,8} &= (x^2-3^2)A_{x,6}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder:

$$6.\quad \begin{cases} A_{x,2} = \dfrac{x^2}{1.2}, \\ A_{x,4} = \dfrac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}, \\ A_{x,6} = \dfrac{x^2.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5.6}, \\ A_{x,8} = \dfrac{x^2.x^2-1.x^2-2^2.x^2-3^2}{1.2.3.4.5.6.7.8}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und durch Hülfe der Gleichungen (5.):

$$7.\quad A_{x,1} = \frac{x}{1},\quad A_{x,3} = \frac{x.x^2-1}{1.2.3},\quad A_{x,5} = \frac{x.x^2-1.x^2-4}{1.2.3.4.5}.$$

Nach Substitution dieser Werthe der Coëfficienten wird die Formel (1.):

$$\text{I.}\quad y_x = y_0 + \frac{x}{1}a_0 + \frac{x^2}{1.2}b_0 + \frac{x.x^2-1}{1.2.3}c_0 + \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}d_0 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}e_0$$
$$+\frac{x^2.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5.6}f_0 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2.x^2-3^2}{1.2.3.4.5.6.7}g_0 + \ldots.$$

2. Es sei die Function y für die Werthe von x: $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$, etc. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ gegeben, und mit den Differenzen wie in folgendem Schema bezeichnet:

$$\begin{array}{cccccl}
\cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \\
y_{-\frac{3}{2}} & a'_{-1} & \cdot & c'_{-1} & \cdot & \\
y_{-\frac{1}{2}} & a'_0 & b'_{-\frac{1}{2}} & c'_0 & d'_{-\frac{1}{2}} & \text{etc.} \\
y_{+\frac{1}{2}} & a'_{+1} & b'_{+\frac{1}{2}} & c'_{+1} & d'_{+\frac{1}{2}} & \\
y_{+\frac{3}{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{array}$$

und

$$\begin{aligned}
y_{-\frac{1}{2}} + y_{+\frac{1}{2}} &= 2y'_0,\\
b'_{-\frac{1}{2}} + b'_{+\frac{1}{2}} &= 2\,b'_0,\\
d'_{-\frac{1}{2}} + d'_{+\frac{1}{2}} &= 2\,d'_0,\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man wieder statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$, so verwandeln sich diese Gröfsen in:

$$\begin{array}{llll}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sin(z-\frac{3}{2}\alpha), & +\cos(z-\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & \cdot & \cdot \\
\sin(z-\frac{1}{2}\alpha), & +\quad\cos z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & -\sin(z-\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & -\cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3,\ \text{etc.} \\
\sin(z+\frac{1}{2}\alpha), & +\cos(z+\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha), & -\sin(z+\frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2, & \cdot \\
\sin(z+\frac{3}{2}\alpha), & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
y'_0 = & \sin z\ \cos\frac{1}{2}\alpha; & d'_0 = & \sin z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4\cos\frac{1}{2}\alpha; \\
a'_0 = & \cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha); & c'_0 = & \cos z\,(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^5; \\
b'_0 = & -\sin z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2\cos\frac{1}{2}\alpha; & \text{etc.} & \\
c'_0 = & -\cos z(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3; & &
\end{array}$$

Ist nun allgemein:

$$8.\quad y_x = y'_0 + B_{x,1}\,a'_0 + B_{x,2}\,b'_0 + B_{x,3}\,c'_0 + B_{x,4}\,d'_0 + B_{x,5}\,e'_0 + \ldots.$$

so hat man auch:

$$\begin{aligned}
\sin(z+\alpha x) &= \sin z\cos\alpha x + \cos z\sin\alpha x \\
&= \sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(1-B_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2+B_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4-B_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6+\ldots) \\
&\quad+\cos z\,(B_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)-B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3+B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5-\ldots.),
\end{aligned}$$

folglich:

9. $\cos\alpha x = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(1 - B_{x,2}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + B_{x,4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - B_{x,6}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^6 + \ldots),$

10. $\sin\alpha x = B_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) - B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 + B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 - \ldots$

Diese Gleichung differentiirt giebt:

$$x\cos\alpha x = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(B_{x,1} - 3B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 + 5B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^4 - \ldots),$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (9.) sich ergiebt:

11. $1 = \frac{1}{x}.B_{x,1},\quad B_{x,2} = \frac{3}{x}.B_{x,3},\quad B_{x,4} = \frac{5}{x}.B_{x,5},\quad B_{x,6} = \frac{7}{x}.B_{x,7}$ etc.

Differentiirt man nochmals, so erhält man, nach Substitution, $\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$:

$$-x^2\sin\alpha x = -(2.3B_{x,3} + (\tfrac{1}{2})^2B_{x,1})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + (4.5B_{x,5} + (\tfrac{3}{2})^2B_{x,3})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3$$
$$-(6.7B_{x,7} + (\tfrac{5}{2})^2B_{x,5})(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots$$

Nach der Gleichung (10.) ist aber:

$$-x^2\sin\alpha x = -x^2B_{x,1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha) + x^2B_{x,3}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^3 - x^2B_{x,5}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^5 + \ldots$$

folglich:

$$\begin{aligned}
2.3B_{x,3} &= (x^2 - (\tfrac{1}{2})^2).B_{x,1},\\
4.5B_{x,5} &= (x^2 - (\tfrac{3}{2})^2).B_{x,3},\\
6.7B_{x,7} &= (x^2 - (\tfrac{5}{2})^2).B_{x,5},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

oder, da $B_{x,1} = x$:

$$12.\quad \begin{cases}
B_{x,3} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3},\\[2ex]
B_{x,5} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5},\\[2ex]
B_{x,7} = \dfrac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}.x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6.7},\\
\text{etc.}
\end{cases}$$

und durch die Gleichungen (11.):

$$13.\quad \begin{cases}
B_{x,2} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2},\\[2ex]
B_{x,4} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4},\\[2ex]
B_{x,6} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2^2}.x^2 - \frac{3^2}{2^2}.x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6},\\
\text{etc.}
\end{cases}$$

folglich wird die Formel (8.):

$$\text{II.}\quad y_x = y'_0 + x.a'_0 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}b'_0 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}c'_0 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}d'_0$$

$$+\frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}.x^2-\frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}e'_0 + \frac{x^2.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}.x^2-\frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6}f'_0 + \dots$$

3. Aus den Ausdrücken I. und II. folgt zwar unmittelbar durch Differentiirung der Ausdruck für $\frac{\partial y_x}{\partial x}$ in beiden Fällen; er läfst sich aber auch auf eine andere Art darstellen, die nicht uninteressant sein dürfte. Es sei nemlich nach der Bezeichnung in 1.:

$$14.\quad \frac{\partial y_x}{\partial x} = C_{x,0}a_0 + C_{x,1}b_0 + C_{x,2}c_0 + C_{x,3}d_0 + C_{x,4}e_0 + \dots$$

und setzt man, wie vorher, statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$; statt a_0, b_0 u. s. w. die entsprechenden Werthe; und zur Abkürzung $2\sin\frac{1}{2}\alpha = t$; so findet man:

$$\begin{aligned}\alpha\cos(z+\alpha x) &= \alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x\\ &= \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha[C_{x,0}t - C_{x,2}t^3 + C_{x,4}t^5 - C_{x,6}t^7 + \dots]\\ &\quad -\sin z[C_{x,1}t^2 - C_{x,3}t^4 + C_{x,5}t^6 - C_{x,7}t^8 + \dots].\end{aligned}$$

Es ist aber $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{2}t$, und mittelst der Gleichungen (9.) und (10.)

$$\begin{aligned}&\alpha\cos z\cos\alpha x - \alpha\sin z\sin\alpha x\\ &= \cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[1 - B_{x,2}t^2 + B_{x,4}t^4 - B_{x,6}t^6 + \dots]\\ &\quad -\sin z(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[B_{x,1}t - B_{x,3}t^3 + B_{x,5}t^5 - \dots].\end{aligned}$$

Man hat also, wenn man die Ausdrücke für $B_{x,1}$, $B_{x,3}$ u. s. w. aus (12. und 13.) substituirt, und $2\arcsin\frac{1}{2}t$ in eine Reihe entwickelt:

$$15.\quad C_{x,0}t - C_{x,2}t^3 + C_{x,4}t^5 - C_{x,6}t^7 + \dots$$

$$= \left[t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24}.\frac{1}{7}t^7 + \dots\right]$$

$$\times\left(1 - \frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}t^2 + \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4 + \dots\right),$$

$$16.\quad C_{x,1}t^2 - C_{x,3}t^4 + C_{x,5}t^6 - \dots$$

$$= \left[t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \dots\right]\left(xt - \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5 - \dots\right).$$

4. Sei nach der Bezeichnung von 2.

$$17.\quad \frac{\partial y_x}{\partial x} = D_{x,0}a'_0 + D_{x,1}b'_0 + D_{x,2}c'_0 + D_{x,3}d'_0 + D_{x,4}e'_0 + \dots$$

und setzt man hinwiederum statt y_x, $\sin(z+\alpha x)$, und statt a'_0, b'_0 .... die entsprechenden Werthe, so hat man:

$$\alpha\cos z\cos\alpha x-\alpha\sin z\sin\alpha x$$
$$=\cos z[D_{x,0}\,t-D_{x,2}\,t^3+D_{x,4}\,t^5-D_{x,6}\,t^7+\ldots.]$$
$$-\sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha[D_{x,1}\,t^2-D_{x,3}\,t^4+D_{x,5}\,t^6-\ldots.].$$

Durch Hülfe der Gleichungen (2. und 3.) haben wir aber auch:

$$\alpha\cos z\cos\alpha x-\alpha\sin z\sin\alpha x$$
$$=\cos z(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[1-A_{x,2}\,t^2+A_{x,4}\,t^4-A_{x,6}\,t^6+\ldots.]$$
$$-\sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(2\arcsin\tfrac{1}{2}t)[A_{x,1}\,t-A_{x,3}\,t^3+A_{x,5}\,t^5-\ldots.],$$

folglich, wenn man statt $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc., deren Werthe aus (6. und 7.) substituirt:

18. $$D_{x,0}\,t-D_{x,2}\,t^3+D_{x,4}\,t^5-D_{x,6}\,t^7+\ldots.$$
$$=\left(t+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3+\frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^5+\frac{1.3.5}{8.16.24}\cdot\frac{1}{7}t^7+\ldots\right)\left[1-\frac{x^2}{1.2}t^2+\frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}t^4-\ldots\right],$$

19. $$D_{x,1}\,t^2-D_{x,3}\,t^4+D_{x,5}\,t^6-\ldots.$$
$$=\left(t+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}t^3+\frac{1.3}{8.16}\cdot\frac{1}{5}t^5+\frac{1.3.5}{8.16.24}\cdot\frac{1}{7}t^7+\ldots\right)$$
$$\times\left[x.t-\frac{x.x^2-1}{1.2.3}t^3+\frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}t^5-\ldots\right].$$

Auf gleiche Art findet man für den zweiten und höhern Differentialquotienten ähnliche Ausdrücke, deren Entwickelung ich der Kürze wegen übergehe. Ich bemerke nur, dafs die Coëfficienten des ersten Factors in dem Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten $(2\arcsin\frac{1}{2}t)^2$ einem sehr einfachen Gesetze folgen, welches aber bei dem dritten und den höhern nicht Statt findet.

5. Eine vielfache Anwendung findet der Ausdruck des Integrals $\int y_x\,\partial x$. Man sieht leicht, dafs es in der Bezeichnung von (1.), wenn es von $x=0$ bis $x=x$ genommen wird, die Form haben mufs:

20. $$\int y_x\,\partial x=x.y_0+E_{x,1}\,a_0+E_{x,2}\,b_0+E_{x,3}\,c_0+E_{x,4}\,d_0+E_{x,5}\,e_0+\ldots.,$$

und nach der Substitution des Werthes $\sin(z+\alpha x)$ statt y_x:

$$-\frac{1}{\alpha}\cos(z+\alpha x)+\frac{1}{\alpha}\cos z=-\frac{1}{\alpha}\cos z(\cos\alpha x-1)+\frac{1}{\alpha}\sin z\sin\alpha x$$
$$=\sin z(x-E_{x,2}\,t^2+E_{x,4}\,t^4-E_{x,6}\,t^6+\ldots.$$
$$+\cos z\cos\tfrac{1}{2}\alpha(E_{x,1}\,t-E_{x,3}\,t^3+E_{x,5}\,t^5-\ldots.)$$

und mittelst (9., 10., 12. und 13.):

$$=\frac{\sin z}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x}{1}t-\frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3+\frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5-\ldots.\right)$$
$$+\frac{\cos z\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}t^2-\frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4+\ldots.\right),$$

mithin:

$$21.\quad x - E_{x,2}\,t^2 + E_{x,4}\,t^4 - E_{x,6}\,t^6 + \dots\dots$$

$$= \frac{x.t - \frac{x.x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}t^5 - \dots}{t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \dots},$$

$$22.\quad E_{x,1}t - E_{x,3}t^3 + E_{x,5}t^5 - \dots\dots$$

$$= \frac{\frac{x^2-\frac{1}{2^2}}{1.2}.t^2 - \frac{x^2-\frac{1}{2^2}.x^2-\frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}t^4 + \dots}{t + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^3 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^5 + \dots}.$$

Sucht man das Integral von $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = +\frac{1}{2}$, so verschwinden die mit $E_{x,1}$, $E_{x,3}$ etc. multiplicirten Glieder, da sie bloſs gerade Potenzen enthalten. Nennt man in diesem einzelnen Falle die Coëfficienten der übrigen 1, E_2, E_4 ...., so ist:

$$23.\quad 1 - E_2t^2 + E_4t^4 - \dots\dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \dots}.$$

Eben so wenn die Coëfficienten des Integrals, von $x = -\frac{3}{2}$ bis $x = +\frac{3}{2}$ genommen, 3, E'_2, E'_4 etc. sind:

$$24.\quad 3 - E_2t^2 + E_4t^4 - \dots\dots = \frac{3 - t^2}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \dots}$$

u. s. f.

6. Nach der Bezeichnung von (2.) sei

$$25.\quad \int y_x\,\partial x = xy'_0 + F_{x,1}a'_0 + F_{x,2}b'_0 + F_{x,3}c'_0 + \dots\dots,$$

so ist nach Substitution von $y_x = \sin(z + \alpha x)$:

$$-\frac{1}{\alpha}\cos(z+\alpha x) = -\frac{1}{\alpha}\cos z(\cos\alpha x - 1) + \frac{1}{\alpha}\sin z\sin\alpha x$$

$$= \sin z\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,(x - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \dots\dots)$$

$$+ \cos z(F_{x,1}t - F_{x,3}t^3 + F_{x,5}t^5 - F_{x,7}t^7 + \dots\dots),$$

oder mittelst (2., 3., 6. und 7.):

$$= \frac{\sin z\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(xt - \frac{x.x^2-1}{1.2.3}t^3 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}t^5 - \dots\dots\right)$$

$$+ \frac{\cos z}{2\arcsin\frac{1}{2}t}\left(\frac{x^2}{1.2}t^2 - \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{x^2.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5.6}t^6 - \dots\dots\right),$$

folglich:

$$26.\quad x - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \ldots$$
$$= \frac{x - \frac{x.x^2-1}{1.2.3}t^2 + \frac{x.x^2-1.x^2-2^2}{1.2.3.4.5}t^4 - \ldots}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \ldots},$$

$$27.\quad F_{x,1}t - F_{x,3}t^3 + F_{x,5}t^5 - \ldots$$
$$= \frac{\frac{x^2}{1.2}t - \frac{x^2.x^2-1}{1.2.3.4}t^3 + \ldots}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \ldots},$$

Nimmt man das Integral von $x = -1$ bis $x = +1$, so wird $F_{x,1} = F_{x,3} =$ etc. $= 0$, und wenn man die übrigen Coëfficienten F_2, F_4, etc. setzt:

$$28.\quad 2 - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \ldots = \frac{2}{1 + \frac{1}{8}.\frac{1}{3}t^2 + \frac{1.3}{8.16}.\frac{1}{5}t^4 + \ldots}.$$

In Beziehung auf eine zweite oder höhere Integration gilt auch die in (4.) in Bezug auf die Ausdrücke für die Differentiale von y_x gemachte Bemerkung.

München, den 22. Juli 1829.

24.

Über Centrifugal-Pendel-Uhren.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die Bewegung der Centrifugal-Pendel ist bekanntlich deswegen nicht gleichförmig, weil der Widerstand der Luft, die Reibung und die bewegende Kraft, wodurch der Gang der Uhr regulirt wird, zu veränderlich sind. Indessen ist die Veränderlichkeit sehr verschieden, je nachdem die Uhr construirt ist; welche Idee mich veranlafst hat, über die Einrichtung, wobei die möglich kleinste Veränderung des Ganges Statt findet, nachzudenken. Ich bin dadurch auf folgendes Resultat gekommen:

Es sei (Taf. III. Fig. 3.) AB eine verticale Axe, $CD = a$, ein horizontaler Arm, E ein Gewicht, und $DE = l$. Dreht man die Axe, so entfernt sich das Gewicht von der Verticallinie DF. Ich nehme an, dafs der Winkel θ sich im ganzen Umkreise gleich bleibt, welches durch den Widerstand der Luft in kurzer Zeit bewirkt wird, so dafs die bewegende Kraft (Feder oder Loth) der Reibung und dem Widerstande der Luft gleich ist. Vermindert sich nun dieser, wie z. B. bei gröfserer Wärme und tieferem Barometerstande, und die Reibung, wie bei Erwärmung des Oels, so ändert sich die Umdrehungsgeschwindigkeit und der davon abhängende Winkel θ. Hieraus ersieht man, dafs derjenige Werth von θ, für welchen $\frac{\partial \nu}{\partial \theta} = 0$ ist, der für den gleichförmigen Gang passendste ist, weil der Einflufs, den die zur Wiederherstellung der Gleichheit zwischen dem Widerstande der Luft, der Reibung und der bewegenden Kraft erfolgende Aenderung von θ in dem Gange hervorbringt, nur von zweiter Ordnung ist.

Sei ν die Winkelgeschwindigkeit der Axe AB, so ist die Centrifugalkraft in horizontaler Richtung $(a + l\sin\theta)\nu^2$; und nach der Richtung DE und einer in der Vertical-Ebene darauf senkrechten zerlegt: nach dieser letztern $(a + l\sin\theta)\cos\theta.\nu^2$. Die Kraft der Schwere, nach derselben Richtung zerlegt, ist $g\sin\theta$; es ist daher, wenn der Winkel θ während der ganzen Umdrehung beständig ist:

$$(a + l\sin\theta)\cos\theta.\nu^2 = g\sin\theta,$$

oder

$$1. \quad a + l \sin\theta = \frac{g}{v^2} \operatorname{tang}\theta,$$

und wenn man differentiirt und v constant setzt:

$$l \cos\theta = \frac{g}{v^2 \cos\theta^2},$$

oder

$$2. \quad l \cos\theta^3 = \frac{g}{v^2}.$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen giebt:

$$a + l \sin\theta = l \sin\theta \cos\theta^2,$$

oder

$$a + l \sin\theta^3 = 0,$$

folglich

$$3. \quad \sin\theta = -\sqrt[3]{\frac{a}{l}},$$

woraus man sieht, daſs der Winkel θ negativ ist, oder daſs das Gewicht E und der Arm CD auf verschiedenen Seiten der Axe liegen.

Als Beispiel nehme ich an: $a = 0{,}1g$; $l = 0{,}2g$, wo g bekanntlich die in einer Secunde durch den freien Fall erlangte Geschwindigkeit ausdrückt: so hat man $\theta = -52° 32'$ und die Zeit eines Umlaufs $1'',333$. Durch Veränderung des Winkels um $2°,5$, wodurch der Widerstand der Luft, wenn er dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional gesetzt wird, um den sechsten Theil gröſser oder kleiner wird, verändert sich der tägliche Gang bloſs um etwa 5 Minuten.

München, den 21. Juli 1829.

25.

Beweis eines Lehrsatzes vom Fünfecke.

In Folge der Aufstellung desselben S. 396., 4. Band 4. Heft dieses Journals.

(Von Herrn *G........*)

Der zu beweisende Satz heifst: „Wenn alle Seiten eines beliebigen Fünfecks $ABCDE$ (Taf. III. Fig. 4.) verlängert werden, bis sie sich in A', B', C', D', E' treffen, so schneiden die fünf geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Diagonalen eines jeden der Vierecke $ABEA'$, $BACB'$, $CBDC'$, $DCED'$, $EADE'$ mit einander verbinden, sich immer alle in ein- und demselben Puncte."

Es kann dieser Satz auf den folgenden einfacheren zurückgebracht werden. Wenn vom Durchschnittspuncte O der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ (Fig. 5.) nach einer Seite AB desselben hin die Geraden OE und OF gezogen und die Durchschnittspuncte M und N der Diagonalen der beiden Vierecke $ACOE$ und $BDOF$ durch MN verbunden werden, wenn man weiter die Linien CA und OE durch PQ, die Seiten CD und MN durch LG, und die Linien OF und DB durch RS halbirt, so schneiden sich diese drei Halbirungslinien immer in einem Puncte U.

Wir setzen zur Abkürzung $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $OM = m$, $ON = n$ und nehmen OB und OA zu Coordinaten-Axen.

Die Coordinaten des Punctes P sind dann: $-\frac{c}{2}$ und $+\frac{a}{2}$,

des Punctes L - - $-\frac{c}{2}$ und $-\frac{d}{2}$,

des Punctes S - - $+\frac{b}{2}$ und $-\frac{d}{2}$,

des Punctes G - - $+\frac{n}{2}$ und $+\frac{m}{2}$.

Die Coordinaten des Punctes E finden sich aus den Gleichungen $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ und $\frac{y}{m} - \frac{x}{c} = 1$ der Linien AB und MC; die Coordinaten

des Punctes Q sind aber halb so grofs, und demnach:

$$\frac{\frac{1}{2}bc(a-m)}{ac+bm} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ma(b+c)}{mb+ac}.$$

Die Coordinaten des Punctes F finden sich aus den Gleichungen $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ und $\frac{x}{n}-\frac{y}{d}=1$ der Linien AB und DN; die des Punctes R sind halb so grofs, und also

$$\frac{\frac{1}{2}nb(a+d)}{na+bd} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ad(b-n)}{bd+na}.$$

Man kennt also für jede der drei Linien PQ, LG und SR die Coordinaten zweier Puncte, und findet also nach einiger Rechnung die Gleichungen für diese drei Linien selbst, nämlich:

für die erste: $y(b+c)+x(a-m)=\frac{ab+mc}{2}$,

für die zweite: $y(n+c)-x(m+d)=\frac{mc-nd}{2}$,

für die dritte: $y(b-n)+x(a+d)=\frac{nd+ab}{2}$.

Subtrahirt man von der ersten Gleichung die zweite, so erhält man die dritte, und es schneiden sich also die drei Linien PQ, LG und SR in einem Puncte.

Der so eben bewiesene Satz findet aber eine fünffache Anwendung in Fig. 4. Halbirt man nämlich hier die Linien AD und $C'B'$ durch eine Linie ee'; $C'D'$ und EB durch eine Gerade aa'; AC und $D'E'$ durch bb'; DB und $A'E'$ durch cc'; endlich EC und $B'A'$ durch dd', so schneiden sich also diese fünf Linien aa', bb', cc', dd', ee' in einem Puncte; von aa' wird aber auch AA' halbirt, denn die Linie aa' halbirt zugleich die drei Diagonalen eines Vierecks $AEBA'$; eben so wird BB' von bb'; CC' von cc'; DD' von dd' und EE' von ee' halbirt.

26.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Aufgabe vom Herrn Prof. *Unger* zu Erfurt.

7. Drei in einer Ecke zusammenstoſsende Seiten-Kanten einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben; man soll die der Ecke gegenüber liegende Seitenfläche so bestimmen, daſs der Inhalt der Pyramide ein Maximum sei *).

Lehrsätze von Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.

8. Wenn man in der Ebene eines Vierecks $ABCD$ (Taf. III. Fig. 6.) eine Gerade so zieht, daſs sie die vier Seiten desselben und die beiden Diagonalen AC und BD schneidet, so findet unter den Theilen der gezogenen Geraden folgende Proportion Statt:

$$\frac{RP.RS}{QP.QS} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$$

9. Wenn die Puncte V und W in v zusammenfallen, so hat man die drei folgenden Proportionen:

$$1.\ \frac{vp.vq}{vr.vs} = \frac{pq}{rs};\quad 2.\ \frac{rp.rs}{qp.qs} = \frac{rv^2}{qv^2};\quad 3.\ \frac{vp.vr}{vq.vs} = \frac{pr}{qs}.$$

Aufgaben von Anderen.

10. Die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade durch trigonometrische Functionen auszudrücken, wie es bei Gleichungen vom dritten Grade angeht, auf welche sich bekanntlich Gleichungen vom vierten Grade bringen lassen.

11. In einer prismatischen, senkrechten Röhre, in deren obern und untern Böden sich Öffnungen befinden, wird die Luft auf irgend eine Weise erwärmt, so daſs sie sich ausdehnt, leichter wird als die äuſsere Luft, und folglich aufsteigt. Es wird die Geschwindigkeit gesucht, mit welcher sie durch die obere und untere Öffnung der Röhre sich bewegen wird, und zwar wenn nicht nach Bewegungs-Gesetzen a priori, so doch nach dem hypothetischen Gesetze, daſs die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit derjenigen gleich sei, welche ein Körper erlangen würde, der von der Höhe der drückenden Säule frei herabfiele. Auch kann statt der verschiedenen Temperaturen in der Röhre, eine mittlere Temperatur angenommen werden, jedoch muſs die Elasticität der Luft und der Widerstand bei der Ausströmung, erstere nach dem Mariottischen Gesetze, letzterer nach bekannten hypothetischen Gesetzen in Berechnung kommen.

---

*) Herr Prof. Unger bemerkt bei Gelegenheit der Uebersendung dieser Aufgabe, daſs von der Aufgabe 29. im 4. Bande S. 391., die sich daselbst, und barycentrisch im 5. Band S. 102. gelöset findet, und zwar allgemeiner gestellt, noch eine andere, geometrische Auflösung von Giordano di Ottajano vorhanden sei, die sich in den *Memorie di Matematica e Fisica delle societa italiana*, *tom. IV.* (*Verona* 1788. *pag.* 4.) finde und auch von Klügel in seinem Wörterbuche, Art. Kreis, aufgenommen sei.

27.

De approximata seriei, juxta data functionis derivata dispositae, summatione.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Holm.)

Sit $s = c_0 fx + c_1 \partial fx + c_2 D^2 fx + c_3 D^3 fx + \ldots$ series summanda, et fx functio data atque $D^n fx$ hujus derivatum n^{tum}, i. e. $= \frac{d^n fx}{1.2\ldots n(dx)}$; coëfficientes vero $c_0, c_1, c_2, \ldots$ constantes qualescunque (aliquatenus tamen convergentes).

Patet jam, casum ab celeberrimo Gaufs ingeniosissime pertractatum $^0\!\int dy f(x+y)$ seu $yfx + \frac{1}{2}y^2 \partial fx + \frac{1}{3}y^3 D^2 fx + \ldots$ huc spectare. Innumerarum igitur formarum, quarum ope summatio tentari licet, hanc jam

$$s = n_0 f(x+a_0) + n_1 f(x+a_,) + n_2 f(x+a_{,,}) + \ldots$$

praecipue eligimus, cum casui isti speciali bene conveniat. Evolutione atque comparatione utriusque ipsius s valoris instituta, hae oboriuntur aequationes:

$$a)\quad \begin{cases} c_0 = n_0 \quad + n_1 \quad + n_2 \quad + \ldots + n_{r-1}, \\ c_1 = n_0 a_0 + n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}, \\ c_2 = n_0 a_0^2 + n_1 a_1^2 + n_2 a_2^2 + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}^2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_{2r-1} = n_0 a_{2|}^{2r-1} + n_1 a_1^{2r-1} + n_2 a_2^{2r-1} + \ldots + n_{r-1} a_{r-1}^{2r-1}. \end{cases}$$

Quarum quidem numerus est $= 2r$, ignotorumque idem $(= 2r)$; scilicet adsunt pluria a numero r, itemque n numero r. Ex istis, si omnia tum n, tum a elicere in potestate fuerit, problema nostrum solutum erit. Hae, cum successive gradus 1, 2, 3, ... $2r$ sint, aequationem finalem gradus satis elevati suppeditare videntur; nihilo tamen minus haec producitur, gradus dimidio minoris, quam altissimus $(2r)$ aequationum a), ex quarum eliminatione oborta est. Forma igitur nostra generalis majoribus haud laborat difficultatibus, quam casus illius nuper memoratus.

Hoc ipsum inveni, cum ad eliminandi exercitium, tum seriem quamcunque

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

sub formam producti plurium potestatum (ex. gr. $= c(1+ax)^n(1+a_1x)^{n_1}\ldots.$) exhibere (quo quidem casu maxima industria atque circumspectio adhibenda) tum plures atque plures aequationum nuper obortarum successive tractare, mihi proposuissem *). Ut vero id, quod ita particulariter inveneram, generatim demonstrare liceret, alia ingredienda erat via; qua etiam totam rem jam breviter explicare conabor.

Est modus, qui aliquando in usum venit, numeros theoremati de quacunque functione valenti intextos determinandi; isque in eo consistit, ut loco functionis indeterminatae certa quaedam eligatur, quae isti determinationi maxime sit idonea.

Hanc igitur suppositionem $fx = \frac{1}{x}$, nostro casui aptissimam vidimus. Hac enim admissa, nostra, ab initio proposita aequatio haec evadit:

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} - \ldots. = \frac{n_0}{a+x} + \frac{n_1}{x+a_1} + \frac{n_2}{x+a_2} + \ldots. + \frac{n_{r-1}}{x+a_{r-1}} + \ldots.$$

seu

$$c_0x^{-1} - c_1x^{-2} + c_2x^{-3} - \ldots. = n_0(x+a)^{-1} + n_1(x+a_1)^{-1} + n_2(x+a_2)^{-1} + \ldots.$$

Quae quidem, si illius pars dextra secundum x^{-n} evolvatur, coëfficientesque eidem ipsius x negativae potentiae annexi comparentur, rursum aequationes subsidiarias nuper expositas (a.) reddebit. Exinde igitur nihil reportatur, nisi quod doceatur, suppositionem nostram rite adhiberi. Si vero formamus functionem

$$B(-x) = (x+a_0)(x+a_{,})(x+a_{,,})\ldots.(x+a_{r-1})$$

explicatamque per $bx^r - b_1x^{r-1} + b_2x^{r-2} - \ldots. + b_r$ repraesentamus, eamque in utramque aequationis procedentis partem ducimus; id, quod quaerimus, inveniemus. Patet enim, nullas, instituta per $B.(-x)$ multiplicatione, ab dextra parte negativas ipsius x potentias superesse posse, (siquidem ex. gr. $B(-x)n(x+a)^{-1} = n(x+a_{,}).(x+a_{,,})\ldots.$ etc. sic in re-

*) Hae etiam ipsae aequationes resolvendae praecipuum implicari videbantur nodum alius cujusdam quaestionis, ejusque dignae, quae penitius perscrutaretur. Ni multum fallor, functionum secundum potentias evolutio ideo instituitur, quod in his et derivatio (differentiatio) et rederivatio (integratio) eaeque quousque libet repetitae, facillime perficiantur. Simili etiam de causa, scilicet ad differentiationem ($\triangle$) atque summationem (Σ) sublevandam, interdum secundum facultates seu coëfficientes binomiales adgrediuntur evolutionem.

Quaslibet vero harum operationum, i. e. omnes fere, ex quibus fructus capere licet quam maximos, nullo fere negotio perficies, si functiones praeire exponentialiter explicueris. Posito vero

$$fx = n_0e^{a_0x} + n_1e^{a_1x} + n_2e^{a_2x} + \ldots. \quad \text{atque} \quad fx = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots.$$

eaedem omnino oborientur aequationes (a.); quas igitur etiam hac de causa tractationem mereri credidimus.

liquis); ideoque coëfficientes negativarum potestatum quae a sinistra adesse videantur, re vera nihilo adaequari.

Exinde vero hae oboriuntur aequationes:

$$A)\quad \begin{cases} c_0 b_r + c_1 b_{r-1} + c_2 b_{r-2} + \dots + c_{r-1} b_1 + c_r b_0 = 0, \\ c_1 b_r + c_2 b_{r-1} + c_3 b_{r-2} + \dots + c_r b_1 \ + c_{r+1} b_0 = 0, \\ c_2 b_r + c_3 b_{r-1} + c_4 b_{r-2} + \dots + c_{r+1} b_1 + c_{r+2} b_0 = 0, \\ \vdots \\ c_{r-1} b_r + c_r b_{r-1} + \dots\dots\dots + c_{2r-2} b_1 + c_{2r-1} b_0 = 0. \end{cases}$$

Quarum quidem ope, cum nonnisi lineares sint, nullo fere negotio coëfficientes b_0, b_1, b_2, ... etc., uno excepto, qui arbitrarius superest numerus, determinantur. Quo facto, statuendo aequationem $B\alpha = 0$, seu

$$B)\quad b_0 \alpha^r + b_1 \alpha^{r-1} + b_2 \alpha^{r-2} + \dots + b_r = 0$$

hancque resolvendo cum re vera idem ac

$$(\alpha - a_0)(\alpha - a_1)(\alpha - a_2) \dots (\alpha - a_{r-1}) = 0$$

valeat, numeri a_0, a_1, a_2, ... a_{r-1}, utut illius radices, habebuntur.

His igitur cognitis, idque aequationis ope, quae non est nisi gradus (r) i. e. dimidii aequationis

$$c_{2r-1} = n_0 a_0^{2r-1} + n_1 a_1^{2r-1} + \dots$$

altissimae earum, quae ab initio solvendae proponebantur, facili satis negotio reliquae ignotae (n) determinabuntur. Hanc in finem ad primitivas aequationes (α) regredimur, earumque r priores per suum quemcunque numerum A_0, A_1, A_2 etc. multiplicatas addimus. Ita habebimus:

$$c_0 A_0 + c_1 A_1 + \dots + c_{r-1} A_{r-1} = n(A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \dots + A_{r-1} a^{r-1}),$$

si numeros istos ita determinamus, ut coëfficientes sint aequationis

$$A_0 + A_1 \alpha + A_{,,} \alpha^2 + \dots A_{r-1} \alpha^{r-1} = 0$$

$(= K\alpha)$, hujusque radices a_1, a_2, ... a_{r-1}, i. e. $K\alpha$ sit $\dfrac{B\alpha}{\alpha - a}$ (seu $= (\alpha - a_1)(\alpha - a_2)(\alpha - a_3) \dots (\alpha - a_{r-1})$) qua quidem divisione instituta obtinetur

$$A_{r-1} = b_0; \quad A_{r-2} = b_1 + b_0 a; \quad A_{r-3} = b_2 + a b_1 + a^2 b_0 \text{ etc.}$$

Quibus igitur valoribus introductis, totoque secundum (a) ordinato, si brevitatis causa

$$b_r c_s + b_0 c_{s-1} + b_2 c_{s-2} + \dots + b_s c_0 \text{ per } (b\,c)_s$$

indicamus, habebimus

$$n = \frac{(b\,c)_{r-1} + (b\,c)_{r-2}\, a + (b\,c)_{r-3}\, a^2 + \dots + (b\,c)_0\, a^{r-1}}{b_{r-1} + 2 b_{r-2}\, a + 3 b_{r-3}\, a^2 + \dots + r b_0\, a^{r-1}},$$

i. e. n est aliqua ipsius a functio, nobis per Fa designanda, eaque fracta,

cujus numerator (Pa) est pars producti $Ba(c_0 a^{-1} + c_1 a^{-2} + c_2 a^{-3} + \dots)$ integra (i. e. ea, quae potentiis negativis caret), denominatorque $= K\alpha$ $= dBa$.

Posita igitur $Fa = \frac{Pa}{dBa}$ seu

$$C)\quad Fa = \frac{(bc)_{r-1} + (bc)_{r-2}\,a + (bc)_{r-3}\,a^2 + \dots + b_0 c_0\, a^{r-1}}{b_{r-1} + 2b_{r-2}\,a + 3b_{r-3}\,a^2 + \dots + r b_0\, a^{r-1}}$$

habebimus $n_0 = Fa_0$, similiterque $n_1 = Fa_1$, $n_2 = Fa_2$, ... $n_{r-1} = Fa_{r-1}$; patet enim, n_5 similiter ab a_5 pendere, ac n_0 ab a_0, vel etiam similem calculum pro a_5 ac nuper pro a seu a_0 institui licere.

Jam ut vides, totum nostrum negotium aequationibus A, B, et C rite solvendis perficitur. Resolutis scilicet aequationibus A, cognoscuntur quantitates b, quae coëfficientes sunt in aequatione B). Haec vero resoluta dabit omnia (a); ex quibus suumquodque (n) per aequationem C), seu $n = Fa$ computabitur. Habemus igitur id, quod desiderabatur:

$$c_0 fx + c_1 dfx + c_2 D^2 fx + c_3 D^3 fx + \dots$$
$$= n_0 f(x + a_0) + n_1 f(x + a_1) + n_2 f(x + a_2) \dots + n_{r-1} f(x + a_{r-1}).$$

Hisque subsistere quidem liceret; lubet tamen aliqua, tum circa praecisionem obtentam disserere, tum circa utriusque istarum aequationum solutionem computoque ad hanc obtinendam aptissimo annotare; tandemque totius rei usum exemplis aliquot illustrare.

Quod igitur ad accurantiam attinet, statim vides formulam nostram summatoriam

$$\sigma = n_0 f(x + a_0) + n_1 f(x + a_1) + \dots + n_{r-1} f(x + a_{r-1})$$

rursus evolutam sub formam

$$k_0 fx + k_1 dfx + k_2 D^2 fx + \dots + k_m D^m fx + \dots$$

exhiberi posse. Quoniam vero ita semper sit

$$k_m = n_0 a_0^m + n_1 a_1^m + n_2 a_2^m + \dots + n_{r-1} a_{r-1}^m,$$

jam patet ex modo, quo numeros a et n determinavimus, esse $k_0 = c_0$, $k_1 = c_1$, generatimque $k_m = c^m$, siquidem $m < 2r$ fuerit.

Termini igitur numero $2r$ priores seriei datae

$$s = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 D^2 fx + \dots$$

per istam formulam (γ) complete repraesentantur, errorque non nisi ex altioribus provenire potest, isque aperte hic est:

$$e = (c_{2r} - k_{2r}) D^{2r} fx + (c_{2r+1} - k_{2r+1}) D^{2r+1} fx + \dots$$

quo quidem corrigendum est σ, ut evadat $= s = \sigma + e$. Hic vero error eo est minor, quo major est r, quoque citius quantitates c decrescunt,

idque quo regularius, quo ipso non possit non $c_m - k_m$ adhuc minor evadere. In casibus quidem specialibus, quos tamen in praesenti pertractari nobis haud est animus, iste error brevius exhiberi potest, ut ex. gr. nuper celeberrimus Jacobi pro casu Gaussino elegantissime docuit.

A. Aequationes *A*), ut primi gradus, juxta notissimam permutandi artem solvi quidem possunt; quoniam vero particulari gaudent forma, hac ad faciliorem solutionem uti licet. Si enim aequationes *A*, respective per β_0, β_1, β_2 etc. multiplicatae adduntur, obtinentur hae:

$$\begin{aligned} c_0\beta_0 + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_{r-1}\beta_{r-1} &= 0, \\ c_1\beta_0 + c_2\beta_1 + c_3\beta_2 + \dots + c_r\,\beta_{r-1} &= 0, \\ &\vdots \\ c_{r-2}\beta_1 + c_{r-1}\beta_1 + c_r\beta_2 + \dots + c_{2r-3}\,\beta_{r-1} &= 0 \end{aligned}$$

pro definiendo $b_1 : b_0$ (restat scilicet:
$(\beta_0 c_{r-1} + \beta_1 c_r + \beta_2 c_{r+1} + \dots + c_{2r-2}\beta_{r-1})b_1 + (\beta_0 c_r + \beta_1 c_{r+1} + \dots + \beta_{r-1} c_{2r-1})b_0 = 0$).

Hae vero si adtenderis, aperte ad casum praecedentem ipsius *A*) seu ad r unitate minuta spectant,

acceptis β_0, β_1, β_1
loco horum b'_{r-1}, b'_{r-2}, b'_{r-3}, ... etc.

Quae cum ita sint, exinde fluit modus simplicissimus, omnes casus successive simulque solvendi. Si enim a primis ducitur principium, radices praecedentes inverso ordine factores erunt idonei ad subsequentem solvendum. Sit igitur

$$1)\quad r = 1, \quad \text{i. e.} \quad A)\ b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0,$$

unde statim habetur:

$$b_0 = c_0 \quad \text{et} \quad b_1 = -c_1,$$

$$2)\quad r = 2, \quad \text{i. e.} \quad A) \begin{cases} b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 = 0, \\ b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 = 0. \end{cases}$$

Adhibitis igitur factoribus ex 1) desumtis $-c_1$ et c_0, obtinebitur

$$b_1(-c_1^2 + c_0 c_2) + b_0(-c_1 c_2 + c_0 c_3) = 0,$$

$$\text{i. e.}\quad b_1 = c_0 c_3 - c_1 c_2 \quad \text{et} \quad b_0 = c_1^2 - c_0 c_2.$$

Quoniam vero si aequationes *A*), diagonaliter inverso scripseris ordine i. e. hoc: $b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 = 0$, $b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0$, aequationes obtinentur prioribus similes, ea solum differentia, ut $b_0 b_1 b_2$; $c_3 c_2 c_1 c_0$ locum teneant respective horum $b_2 b_1 b_0$; $c_0 c_1 c_2 c_3$; statim, si ad hanc permutationem adtenderis, habebis

$$b_2 = c_2^2 - c_1 c_3.$$

3) Sit $r=3$ et

$$A)\quad \begin{cases} b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3 = 0, \\ b_3 c_1 + b_2 c_2 + b_1 c_3 + b_0 c_4 = 0, \\ b_3 c_2 + b_2 c_3 + b_1 c_4 + b_0 c_5 = 0. \end{cases}$$

Factores ex 2) jam adsunt:

$$c_2^2 - c_1 c_3,\quad c_0 c_3 - c_1 c_2,\quad c_1^2 - c_0 c_2,$$

quarum ope statim ex forma:

$$b_1 c_0 + b_0 c_1 = 0$$

habetur:

$$b_0 = c_0 = c_2^3 - 2 c_1 c_2 c_3 + c_0 c_3^2 - c_0 c_2 c_4 + c_1^2 c_4,$$
$$b_1 = -c_1 = (c_1 c_3 - c_2^2) c_3 + (c_1 c_2 - c_0 c_3) c_4 + (c_0 c_2 - c_1^2) c_5,$$

iterumque ex diagonali perversione, ut et permutatione hac:

$$< \begin{matrix} b_0 b_1 \dots c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \\ b_3 b_2 \dots c_5 c_4 c_3 c_2 c_1 c_0 \end{matrix} >$$

dantur eo ipso:

$$b_2 = c_2 c_3^2 - c_2^2 c_4 + c_1 c_2 c_5 - c_1 c_3 c_4 + c_0 c_4^2 - c_0 c_3 c_5 \text{ et}$$
$$b_3 = -c_3^3 + 2 c_2 c_3 c_4 - c_2^2 c_5 + c_1 c_3 c_5 - c_1 c_4^2.$$

Signo scilicet mutato, ut ex evolutione directa termini cujuscunque jubetur: id, quod alterna vice, i. e. pro impari ipsius r valore efficiendum.

4) $r=4$.

$$A)\quad \begin{cases} b_4 c_0 + \dots + b_0 c_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vdots \\ b_4 c_3 + \dots + b_0 c_7 = 0. \end{cases}$$

Valoribus ex casu praecedenti per b_0^3, b_1^3, b_2^3, b_3^3 distinctis, harumque aequationum radices per b_0^4, b_1^4, b_2^4, b_3^4 indicatis, statim habebitur, prioribus factorum loco adhibitis:

$$-b_0^4 = c_3 b_3^3 + c_4 b_2^3 + c_5 b_1^3 + c_6 b_0^3 \text{ et}$$
$$b_1^4 = c_4 b_3^3 + c_5 b_2^3 + c_6 b_1^3 + c_7 b_0^3$$

exque his, valoribus in c loco $b^3 \dots$ introductis, permutatisque

$$< \begin{matrix} b_0 b_1 \dots c_0 c_1 \dots c_7 \\ b_4 b_3 \dots c_7 c_6 \dots c_0 \end{matrix} >$$

habebuntur b_4 et b_3, quorum valores utut prolixiores transcribere haud lubet; b_2 vero ex quacunde aequationum A) postmodum computabitur.

Ad finem observare liceat, adhuc dari modum ad coëfficientes aequationis B) perveniendi, eumque magis directum, nihilo tamen minus

satis laboriosum. Si enim seriem $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ sub formam

$$\frac{n}{1-ax} + \frac{n_1}{1-a_1 x} + \frac{n_2}{1-a_2 x} + \ldots$$

exhibere velis, ex evolutione partis dextrae ejusque comparatione cum sinistra, statim habebitur

$$c_0 = n - n_{,} + n_{,,} + \ldots; \quad c_1 = na + n_{,} a_1 + \text{etc.}$$

i. e. omnino eaedem aequationes a), ac quae ab initio nobis oboriebantur. Si vero jam loco partis dextrae illius summam algebraicam, quae est fractio rationalis, per

$$\frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots}$$

designanda, acceperis, alius operandi modus patebit. Sub hac enim fractionis forma series proposita $c_0 + c_1 x + \ldots$ directe exhiberi potest, si haec in unitate bis dividatur, residuumque in illa etc., totumque opus ad fractionum continuarum modum absolvatur. Cujus vero rei, cum et notissima sit et satis laboriosa (praeter in casubus specialibus), ulteriore expositione in praesenti supersedere liceat.

B) Quod ad aequationem *B*) attinet, vix quidem aliquod calculandi compendium admittere videtur, cum nullum fere dubium sit, quin universalissimae sit formae, quandoquidem coëfficientes illius duplo gaudeant quantorum arbitrariorum numero, ideoque quidvis evadere posse videantur. In casibus igitur specialibus tantum aliquid ejusmodi est exspectandum; inter quos praecipue est observandus is, cum series proposita alterno deficitur termino.

Sit igitur 1) $c_1 = 0 = c_3 = c_5$ etc.

i. e. $s = c_0 fx + c_2 D^2 fx + c_4 D^4 fx + \ldots$

Si hoc in casu alternas consideremus aequationum A, mox patebit esse $b_1 = 0 = b_3 = b_5 \ldots$, nisi forte fuerit $c_2^2 - c_0 c_4 = 0 = c_4^2 - c_2 c_6 \ldots$ Ad quae si adtenderis, mox videbis ceteras aequationum A, simpliciorem induere formam, quae illi ad casum generalem pertinenti similis sit. Inde igitur solutiones huic casui accommodatas facili negotio erues. Si enim r' huc sit id, quod ibi erat r, solummodo loco

$$c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \ldots \text{ sumendum est:}$$

$$c_0 c_2 c_4 c_6 c_8 c_{10} \ldots \text{ cum } r' = 2r;$$

$$\text{vel } c_2 c_4 c_6 c_8 c_{10} c_{12} \ldots \text{ cum } r' = 2r + 1.$$

Sic ex. gr. pro $r' = 5$ statim hac permutatione habetur

$$b_0 = c_4^2 - c_2 c_6, \quad b_2 = c_2 c_8 - c_4 c_6,$$

atque $b_4 = c_4^2 - c_2 c_6$, indeque aequatio

$$B)\quad b_0 \alpha^5 + b_2 \alpha^3 + b_4 \alpha = 0,$$

soluta facillima.

II) Sit $\quad s = c_1 dfx + c_3 D^3 fx + c_5 D^5 fx + \dots$

i. e. $c_0 = 0 = c_2 = c_4$ etc.

Tum itidem facillimo negotio patebit, pro $r' = 2r + 1$ esse $b_0 = 0 = b_2 = b_4 \dots$, atque pro $r' = 2r$, $b_1 = 0 = b_3 = b_5 \dots$, nisi forte fuerit $c_3^2 - c_1 c_3 = 0 = c_5^2 - c_3 c_7 \dots$ Deinde si per b_n^r illud b_n, quod ad r attineat, ut antea in A 4), intelligitur, statim habebitur

$$b_0^2 = b_1^3 = c_1, \quad b_2^2 = b_3^3 = - c_3, \quad b_0^4 = b_1^5 = c_3^2 - c_1 c_5,$$
$$b_2^4 = b_3^5 = c_1 c_7 - c_3 c_5, \quad b_4^4 = b_5^5 = c_5^2 - c_3 c_7; \text{ etc.},$$

i. e. coëfficientes aequationis B) pro $r' = 2r$ et pro $r' = 2r + 1$ eaedem, ipsaque aequatio eadem.

Sic ex. gr. tum pro $r = 4$, tum pro $r = 5$ est aequatio B)

$$(c_3^2 - c_1 c_5)\alpha^4 + (c_1 c_7 - c_3 c_5)\alpha^2 + c_5^2 - c_3 c_7 = 0.$$

Ex hinc igitur patet, seriem nostram si alterno defecta fuerit termino, approximate summari posse solita Algebrae facultate, i. e. solvendo aequationem quartum gradum haud superantem, idque accurantia, quae circiter ad $D^{18} fx$ vel $D^{19} fx$ adscendit. Fit enim pro $r = 9$ aequatio A) haec:

$$b_0 \alpha^9 + b_2 \alpha^7 + b_4 \alpha^5 + b_6 \alpha^3 + b_8 \alpha = 0 \text{ in casu primo,}$$

vel $\quad b_1 \alpha^8 + b_3 \alpha^6 + b_5 \alpha^4 + b_7 \alpha^2 + b_9 = 0$ in casu secundo.

Quae aperte ut aequationes quarti gradus resolvi possunt. Primus vero correctionis terminus est $(c_{18} - k_{18}) D^{18} fx$, qui in casu secundo nihilo adaequatur.

Circa aequationem B) tandem observandi sunt casus, qui ex diversa radicum indole oriuntur. Quanquam enim ex modo, quo aequatio B) exoritur, cum $(n + n_,) fa$ loco $nfa + n_, fa$ sumi possit, radices illius (α) inaequales esse debere (id, quod in eliminatione directa inter aequationes α) admittendum erat, ut aequatio minoris gradus proveniret) videatur, tamen accidere potest, tum aliquas aequationis B) radicum inter se esse aequales, tum aliquas esse imaginarias. Jam si aliquae aequales fuerint, ex. gr. $a_0 = a_1$, valor ipsius n infinitus generatim prodibit; erat scilicet $n = \frac{Pa}{dBa}$, pro radice vero aequali (a) aequationis $B\alpha = 0$ est $dBa = 0$, cum idem de Pa nonnisi in casibus specialibus asserere

liceat. Exhinc igitur patet, formam admissam summae σ huic casui haud adaequari; attamen, si paululum immutatur, huic etiam accomodari potest. Si scilicet fuerit $a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_5$ loco partis

$$n_0 f(x + a_0) + n_1 f(x + a_1) + \ldots + n_s f(x + a_s) \text{ in } \sigma$$

sumendum est:

$$n_0 f(x + a_0) + n_1 d f(x + a_0) + \ldots + n \,\mathrm{D}^s f(x + a_0).$$

Sit enim ex. gr. $a_1 = a_0$. Ponatur vero, priusquam aequales devenerint, $a_0 = a - \omega$ atque $a_1 = a + \omega$, itemque $Pa.f(x + a) = \varphi a$, eritque pars ipsius σ dubia

$$p = \frac{\varphi(a - \omega)}{dB(a - \omega)} + \frac{\varphi(a + \omega)}{dB(a + \omega)}.$$

Quoniam vero $(\alpha - a - \omega)(\alpha - a + \omega)$, seu $(\alpha - a)^2 - \omega^2$ factor est ipsius α, poni potest

$$B\alpha = ((\alpha - a)^2 - \omega^2).B\alpha;$$

indeque infertur

$$dB\alpha = (\alpha - a)^2 dB\alpha + (\alpha - a).2B\alpha - \omega^2 dB\alpha,$$

ideoque

$$dB(a + \omega) = 2\omega B(a + \omega) = 2\omega(Ba + \omega dBa + \ldots)$$

similiterque

$$dB(a - \omega) = -2\omega.(Ba - \omega dBa);$$

his igitur introductis, habebitur

$$p = \frac{1}{2\omega}.\left(\frac{\varphi a + \omega d\varphi a + \ldots}{Ba + \omega dBa + \ldots} - \frac{\varphi a - \omega d\varphi a + \ldots}{Ba - \omega dBa + \ldots}\right.$$

seu

$$p = \frac{Ba.d\varphi a - \varphi a.dBa + \omega Q}{(Ba)^2 - \omega^2 R + \ldots}$$

id, quod in casu radicum aequalium, seu cum $\omega = 0$ fuerit, fit:

$$p = \frac{Ba.d\varphi a - \varphi a.dBa}{(Ba)^2}.$$

Erat vero $\varphi a = Pa.f(x + a)$, ideoque

$$d\varphi a = dPa.f(x + a) + Pa.df(x + a);$$

indeque

$$p = \frac{Ba.dPa - Pa.dBa)}{Ba^2} f(x + a) + \frac{Pa}{Ba}.df(x + a),$$

quae igitur quantitas in σ loco hujus

$$nf(x + a_0) + n_1 f(x + a_1)$$

est introducenda.

Sit ex. gr.

$$s = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + (3c_1 - 2c_0)\mathrm{D}^3 fx + 3(c_2 - 2c_1)\mathrm{D}^4 fx + (9c_1 - 6c_0 - 2c_2)\mathrm{D}^5 fx + \text{ etc.}$$

sumaturque $r=3$, quo per aequationes A) obtinebitur:

$$b_0=1,\quad b_1=0,\quad b_2=-3,\quad b_3=2,$$

i. e. aequatio B) erit $B\alpha=\alpha^3-3\alpha+2$, cui radices sunt 1, -2, 1; est scilicet $B\alpha=(\alpha-1)^2(\alpha-2)$. Inde igitur obtinetur

$$P\alpha=(\alpha^3-3\alpha+2)(c_0\alpha^{-1}+c\;\alpha^{-2}+c_2\alpha^{-3}+\ldots\ldots),$$

seu

$$P\alpha=c_0\alpha^2+c_1\alpha+c_2-3c_0,$$

atque $dP\alpha=2c_0\alpha+c_1$, $dB\alpha=3(\alpha^2-1)$, tandemque

$$n=\frac{P\alpha}{dB\alpha}=\frac{c_0\alpha^2+c_1\alpha+c_2-3c_0}{3(\alpha^2-1)},$$

qui quidem pro $\alpha=-2$ reddit

$$n_2=\frac{c_2-2c_1+c_0}{9},$$

at pro $\alpha=1$, $n=\infty$. Est vero $B\alpha=\alpha+2$, ideoque

$$B_1=3,\quad dB=1.$$

Indeque

$$d\left(\frac{P}{B}\right)_1=\frac{8c_0+2c_1-c_2}{9},\quad\text{atque}\quad\frac{P_1}{B_1}=\frac{c_2+c_1-2c_0}{3}.$$

Ideoque

$$s=\frac{c_2-2c_1+c_0}{9}f(x-2)+\frac{8c_0+2c_1-c_2}{9}f(x+1)+\frac{c_2+c_1-2c_0}{3}df(x+1)$$

accurata ad D^6fx.

Similem in modum procedi poterit, si pluria radicum aequalium paria adfuerint, vel etiam numerus aequalium major fuerit; cujus vero expositionem, ne justo prolixiores evadamus, in praesenti omittere liceat; cum quidem numerum r mutando interdum nodus eludi possit. Id saltem monuisse juvat, ejusmodi in casibus numquam tot terminos seriei s per formam σ, non nisi ex partibus hujusmodi $nf(x+a)$ compositam, quot, si derivata etiam admittantur, haud repraesentari posse.

Sic ex. gr. seriei

$$s=D^3fx+eD^5fx+e^2D^7fx+\ldots.$$

terminus primus per $\dfrac{\overset{a}{\triangle}{}^3fx}{2.3.a^3}$ repraesentari potest, errore jam ad sequentem exstante; ex principiis vero nuper allatis obtinetur

$$s=\frac{f(x+\sqrt{e})-f(x-\sqrt{e})}{2\sqrt{e^3}}-\frac{dfx}{e},$$

tumque omnes termini usque ad D^8fx vel D^9fx accurate exhibentur.

Quod ad imaginarias ipsius B) radices attinet, nulla specialis inde exoritur difficultas, sed tota quaestio ad vulgarem: $f(x+iy)$ sub

formam $X+iY$ exhibere, redit; id, quod pro functione f bene nota semper effici posse constat. Si enim ita obtinetur $f(a+ib)={}^0f_a^b+i.{}^1f_a^b$, atque $n=n^0+in'$, statim habebitur

$$(n^0+in')f(a+ib)+(n^0-in')f(a-ib) = 2(n^0\,{}^0f_a^b-n'\,{}^1f_a^b).$$

Neque vero radices imaginariae aequales magis officiunt; data enim explicatione ipsius $f(x+iy)$, inde etiam $D^n f(x+iy)$ explicandi artem semper elicere possumus. Exempla aliqua ad finem proponere est animus.

C) Valores tandem quantorum (n) ex ipsorum juxta aequationem (C) $\left(\text{seu } n=\frac{Pa}{dBa}\right)$, si rationalia fuerint, facile computantur, ni difficultas nuper pertractata offecerit, quae quidem arte modo traditá pellenda est. Si vero surda vel etiam imaginaria adfuerint quanta, certe aliquid levaminis adferatur, si loco functionis fractae $\frac{Pa}{dBa}$ alia, isti in casu $Ba=0$ aequivalens, integra (Ha) substituatur.

Hoc vero ita fit. Ponatur

$$\frac{Pa}{dBa}=Ha+Ba.\frac{Ka}{dBa},$$

eritque

$$Pa=Ha.dBa+Ba.Ka,$$

vel breviter

$$P=H.dB+BK,$$

radice subintellecta. Omnis igitur rei cardo in eo vertitur, ut aequatio functionalis formae $P=AH+BK$, ubi A, B, P sunt functiones integrae datae, H vero et K quaesitae, rite solvatur. Hoc vero effici potest vel coëfficientium indeterminatarum ope, vel magis directe modo isti simile, quo in aequatione primi gradus per numeros integros resolvenda utamur. Divisione scilicet continua efficitur $\frac{A}{B}=\cfrac{a}{b+\cfrac{a_1}{b_1+\ldots}}$, indeque calculi notissimi ope eliciuntur h et k tales, ut $Ah-Bk=1$ (seu const.) sit. Quo facto statim habetur:

$$H=B.J+hP \quad \text{et} \quad K=k.P-AJ,$$

si quidem J fuerit functio integra qualiscunque, quae tamen commoditatis causa ita determinatur, ut H et K gradus quam infimi fiant.

His jam feliciter dissertatis, methodi nostri usum paucis indicasse sufficiet. Primum vero observandum est, seriem quamcunque hujus formae

$$s_e = c_0 fx + e c_1 dfx + e^2 c_2 D^2 fx + e^3 c_3 D^3 fx + \ldots,$$

earundem aequationum ope summari posse, ac haec:

$$s_1 = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 D^2 fx + c_3 D^3 fx + \ldots,$$

i. e. factores coëfficientium seriei datae (seriei geometrice progredientis) ad interim seponi posse. Universim enim, ponendo $c_n e^n$ loco c_n, $b_n e^n$ loco b_n, atque $e\alpha$ loco α, ideoque $e\alpha_n$ loco α_n, series s_1 in s_e migrat; nihilotamen minus aequationes *A*) pro (*b*) definiendis, itemque *B*) pro (α), atque *C*) pro n, eaedem remanebunt. Fit nempe

$$n = \frac{e^{r-1}(b_0 c_0 \alpha^{r-1} + b c_1 . \alpha^{r-2} + \ldots)}{e^{r-1}(r b \alpha^{r-1} + (r-1) b_1 \alpha^{r-2} + \ldots)}$$

sicque in reliquis. Summata igitur serie

$$s_1 = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 D^2 fx + c_3 D^3 fx + \ldots,$$

sub forma

$$s_1 = n_0 f(x+\alpha_0) + n_1 f(x+\alpha_1) + \ldots,$$

eadem opera obtinebitur:

$$s_e = c_0 fx + c_1 e\, dfx + c_2 e^2 D^2 fx + c_3 e^3 D^3 fx + \ldots$$
$$= n_0 f(x+e\alpha_0) + n_1 f(x+e\alpha_{\prime}) + n_2 f(x+e\alpha_{\prime\prime}) + \text{etc.}$$

Jam igitur nostrae summationis ambitu approximationem Gaussinam comprehendi patet. Fit scilicet ex principiis jam expositis, cum

$$\int_y^0 dy f(x+y) = y fx + \tfrac{1}{2} y^2 dfx + \tfrac{1}{3} y^3 D^2 fx + \ldots$$

sit, hoc in casu:

$$c_0 = y, \quad c_1 = \tfrac{1}{2} y^2, \quad c_3 = \tfrac{1}{3} y^3 \quad \text{etc.},$$

vel, si mavis:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = \tfrac{1}{3} \quad \text{etc.}$$

indeque ex. gr. pro $r=2$, aequatio *B*)

$$\alpha_2 - \alpha + \tfrac{1}{6} = 0, \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2},$$

ideoque

$$\int_y^0 dy f(x+y) = \tfrac{1}{2} y \left[f\left(x + y\frac{1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2}\right) + f\left(x + y\frac{1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}{2}\right)\right].$$

Priusquam vero ulterius progredimur, hos speciales summationis nostrae casus proposuisse juvat. Ex regulis scilicet antea traditis obtinetur:

I) $s = c_0 fx + c_1 dfx + c_2 D^2 fx + c_3 D^3 fx =$

a) pro $r=1$: $s = c_0 f\left(x + \frac{c_1}{c_0}\right) + \left(c_4 - \frac{c_1^2}{c_0}\right) D^2 fx + \ldots$

b) pro $r=2$: $s = n_1 f(x+\alpha_1) + n_2 f(x+\alpha_2) + \varkappa D^4 fx + \ldots,$

exsistente

$$b_0 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_2 = 0, \quad \text{i. e.} \quad (c_1^2 - c_0 c_2)\alpha^2 + (c_0 c_3 - c_1 c_2)\alpha + c_2^2 - c_1 c_3 = 0,$$

unde

$$2b_0\alpha + b_1 = \pm\sqrt{(b_1^2 - 4b_0b_2)} \quad \text{et} \quad n = \frac{b_0c_0\alpha + b_1c_0 + b_0c_1}{2b_0\alpha + b_1},$$

c) pro $r = 3$: $s = n_1 f(x+\alpha_1) + n_2 f(x+\alpha_2) + n_3 f(x+\alpha_3)$ (cum errore $\varkappa_6 \mathrm{D}^6 fx$), si

$$b_0\alpha^3 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha + b_3 = 0$$

atque

$$n = \frac{b_0c_0\alpha^2 + (b_1c_0 + b_0c_1)\alpha + b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2}{3b_0\alpha^2 + 2b_1\alpha + b_2},$$

b_0, b_1, b_2, b_3, ut ad *B*) docuimus, determinatis.

II) $s_0 = c_0 fx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + c_4 \mathrm{D}^4 fx + \ldots$; erit

a) $s_0 = \frac{c_0}{2}\left[f\left(x + \sqrt{\frac{c_2}{c_0}}\right) + f\left(x - \sqrt{\frac{c_2}{c_0}}\right)\right] + \varkappa_4$,

b) $s_0 = \left(c_0 - \frac{c_2^2}{c_4}\right) fx + \frac{c_2^2}{2c_4}\left[f\left(x + \sqrt{\frac{c_4}{c_2}}\right) + f\left(x - \sqrt{\frac{c_4}{c_2}}\right)\right] + \varkappa_6$,

c) $s_0 = n_1[f(a+\alpha_1) + f(a-\alpha_1)] + n_2[f(a+\alpha_2) + f(a-\alpha_2)] + \varkappa_8$

si $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ radices sunt aequationis

$$(c_2^2 - c_0c_4)\alpha^4 + (c_0c_6 - c_2c_4)\alpha^2 + c_4^2 - c_2c_6 = 0$$

(seu $= b_0\alpha^4 + b_2\alpha^2 + b_4 = 0$), atque

$$n = \frac{b_0c_0 \,.\, \alpha^2 + b_0c_2 + c_0b_2}{4b_0\alpha^2 + 2b_2}.$$

III) $s_1 = c_1 dfx + c_3 d^3 fx + c_5 \mathrm{D}^5 fx + \ldots$; erit

a) $s_1 = \frac{c_1}{2}\sqrt{\frac{c_1}{c_3}}\left[f\left(x + \sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\right) - f\left(x - \sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\right)\right] + \varkappa_5$,

vel

b) $s_1 = \frac{n_1}{\alpha_1}[f(x+\alpha_1) - f(x-\alpha_1)] + \frac{n_2}{\alpha_2}[f(x+\alpha_2) - f(x-\alpha_2)] + \varkappa_7$,

siquidem fuerint $\pm\alpha_{,}$, $\pm\alpha_{,,}$ radices aequationis

$$B) \quad (c_3^2 - c_1c_5)\alpha^4 + (c_1c_7 - c_3c_5)\alpha^2 + c_5^2 - c_3c_7 = 0,$$

atque

$$n = \frac{b_0c_1\alpha^2 + b_0c_3 + b_2c_1}{4b_0\alpha^2 + 2b_2},$$

ubi

$$b_0 = c_3^2 - c_1c_5 \quad \text{et} \quad b_2 = c_1c_7 - c_3c_5,$$

i. e. coëfficientes suae aequationis *B*). Indicat vero $\varkappa_n$ errorem ordinis n^{ti}, cujus primus est terminus $(c_n - k_n)\mathrm{D}^n fx$.

His praemissis ad integrationem simplicem redire licet. Ex formis II) *a*) et *b*) igitur obtinetur:

$$\int_{a-e}^{a+e} dx fx = e\left[f\left(a + \frac{e}{\sqrt{3}}\right) + f\left(a - \frac{e}{\sqrt{3}}\right)\right] + \tfrac{8}{45}e^5 \mathrm{D}^4 fx + \ldots$$

vel $= \frac{e}{9}[8fa + 5(f(a + e\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + f(a - e\sqrt{\tfrac{3}{5}}))] + \tfrac{32}{700}e^7 \mathrm{D}^6 fa.$

Quae quidem formulae ad integrationem inter limites $a - e$ et $a + e$ instituendum aptissimae mihi videntur.

Latissimus vero patet formularum nostrarum usum ad integrationem repetitam instituendum. Si enim aequationem

$$f(a+x).(dx)^r = (dx)^r.(fa + x\,dfa + x^2 D^2 fa + \ldots)$$

r vicibus integraverimus, obtinebitur

$$\overset{0}{\int}_x^r (dx)^r f(a+x) = \frac{x^r}{r_1^r}\left(fa + \frac{x}{r+1}dfa + \frac{x^2}{(r+2)_2}D^2 fa + \ldots\right),$$

si fuerit n_s coëfficiens binomialis (termini $(s-1)^{\text{simi}}$ in potentia n^{ta}) atque $r_1^r = 1.2.3\ldots.r$. Hac igitur in serie sunt $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{x}{r+1}$, $c_2 = \frac{x^2}{(r+2)_2}$, ... $c_n = \frac{x^n}{(r+n)_n}$, vel etiam $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{r+1}$, $c_2 = \frac{1}{(r+2)_2}$ etc. geometrica scilicet exclusa. Erit igitur aequatio B), si secundi gradus accipitur, haec:

$$b_0\alpha^2 + b_1\alpha + b_2 = 0,$$

seu

$$\left(\left(\frac{1}{r+1}\right)^2 - \frac{1.1}{(r+2)_2}\right)\alpha^2 + \left(1.\frac{1}{(r+3)_3} - \frac{1}{r+1}.\frac{1}{(r+2)_2}\right)\alpha + \left(\frac{1}{(r+2)_2}\right)^2 - \frac{1}{r+1}.\frac{1}{(r+3)_3} = 0,$$

seu, reductione instituta:

$$\alpha^2 - \frac{4}{r+3}\alpha + \frac{2}{(r+3)(r+2)} = 0,$$

Indeque

$$\alpha = \frac{1}{r+3}.\left[2 \pm \sqrt{\left(2.\frac{r+1}{r+2}\right)}\right].$$

Ex aequatione vero C) est

$$n = \frac{(r+3)\,a - \frac{3r+1}{r+1}}{2((r+3)\,a-2)}, \quad \text{i. e.} \quad n = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \frac{r-1}{\sqrt{(2.(r+1)(r+2))}}\right).$$

His igitur valoribus substitutis, erit

$$\overset{0}{\int}_x^r (dx)^r f(a+x) = \frac{x^r}{2.r_1^r}.F,$$

$$\begin{aligned} F = {} & \left(1 - \frac{r-1}{\sqrt{(2(r+1)(r+2))}}\right).f\left[a + \frac{x}{r+3}\left(2 + \sqrt{\left(2\frac{r+1}{r+2}\right)}\right)\right] \\ & + \left(1 + \frac{r-1}{\sqrt{(2(r+1)(r+2))}}\right).f\left[a + \frac{x}{r+3}\left(2 - \sqrt{\left(2\frac{r+1}{r+2}\right)}\right)\right] \\ & + Ax^4 D^4 fa + \ldots. \end{aligned}$$

Pars vero istius seriei haec:

$$\frac{x^r}{r_1^r}.\left(fa + \frac{x^2}{(r+2)_2}D^2 fa + \frac{x^4}{(r+4)_4}D^4 fa + \ldots\right)$$

$$\text{ita} = \frac{x^r}{r_1^r}.\left(\frac{r.(5r+11)}{2.3(r+1)(r+2)}fa + \frac{(r+3)(r+4)}{12(r+1)(r+2)}\left\{\begin{array}{l} f\left[a + x\sqrt{\left(\frac{12}{(r+3)(r+4)}\right)}\right] \\ +f\left[a - x\sqrt{\left(\frac{12}{(r+3)(r+4)}\right)}\right] \end{array}\right\}\right)$$

$$+ \varkappa x^{r+6} D^6 fa + \ldots.$$

breviter exprimitur. Hoc vero ad integrationem inter limites $+x$ et $-x$ accomodari potest. Potest vero de repetita integrationis aequatione auxiliaria B) hujusque radicum indole atque limitibus simile quid eodemque fere modo, ac quo nuper celeberrimus Jacobi de simplicis elegantissime docuit, demonstrari. Id quod brevitatis causa in praesenti omittimus. Hujus vero rei ope functiones integrales, quae magis magisque transcendunt, approximate exhiberi possunt. Ex. gr.

$$\int d\varphi \int d\varphi \sqrt{(1-c^2 S\varphi^2)}, \quad \int d\varphi \int d\varphi \int d\varphi \sqrt{(1-c^2 S\varphi^2)} \quad \text{etc.}$$

vel hujusmodi:

$$\int^{\circ} d\varphi \int^{\circ} d\varphi \frac{1}{1+e^{-\varphi}} = \lambda'\varphi,$$

quae quidem

$$= \tfrac{1}{4}\varphi^2 + \frac{\varphi^2}{12}\sqrt{\frac{10}{3}}\left(\frac{1}{1+e^{-\varphi\sqrt{\frac{3}{10}}}} - \frac{1}{1+e^{\varphi\sqrt{\frac{3}{10}}}}\right) + \varkappa\varphi^7$$

evadit. Ex quo illius usum latissime patere constat. Neque vero minus innumeris aliis questionibus accomodari potest. Omnia recensere quis valet? Nonnulla igitur attulisse sufficiat. Ingeniosissimam summationis ope integrandi formam exhibuit celeberrimus Legendre (*Exerc. du calc. intégr. I.* 311.), quam ponendo

$$Fx = \frac{dfx}{24} - \frac{7\,\omega^2}{960}D^3 fx + \frac{31\,\omega^4}{8064}D^5 fx + \ldots,$$

breviter ita recapitulari licet:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, fx = \omega \sum_{n_0}^{n_1} f(n + \tfrac{1}{2}\omega) + \omega^2 (Fx_1 - Fx_0)$$

exsistentibus $x_1 = n_1\omega$, $x_n = n_0\omega$. Nostris vero ex regulis Fx per varias formulas constructas quam proxime repraesentari potest. Est enim, vel

$$Fx = \tfrac{1}{24}\left(dfx - \frac{7\,\omega^2}{40}D^3 fx - \frac{31\,\omega^4}{336}D^5 fx - \ldots\right),$$

$$\text{vel } = \tfrac{1}{24}\left(dfx - \frac{7\,\omega^2}{120}D^2 dfx + \frac{31\,\omega^4}{1680}D^4 dfx - \ldots\right);$$

ideoque juxta formas modo propositas:

$$1)\quad Fx = \frac{f(x+\omega\sqrt{(\frac{7}{40})}) - f(x-\omega\sqrt{(\frac{7}{40})})}{48\,\omega\sqrt{(\frac{7}{40})}},$$

cum correctione ordinis $\omega^4 D^5 fx$;

$$2)\quad Fx = \tfrac{1}{48}[df(x+\omega\sqrt{(\tfrac{7}{120})}) + df(x-\omega\sqrt{(\tfrac{7}{120})})],$$

$$3)\quad Fx = \tfrac{1}{24}\{\tfrac{1517}{1860}dfx + \tfrac{343}{3720}[df(x+\omega\sqrt{(\tfrac{31}{98})}) + df(x-\omega\sqrt{(\tfrac{31}{98})})]\}.$$

Correctionesque respective sunt ordinis

$$1)\ \omega^4 D^5 fx, \quad 2)\ \omega^4 D^5 fx, \quad 3)\ \omega^6 D^7 fx,$$

quae quidem pro $\int dx \int x$ ulterius minuuntur in ratione $\omega^2:1$; quo ipso ex. gr. formula 3) hoc integrale reddit cum errore ordinis $\omega^8 D^7 fx$, qui quidem, cum ω arbitrarium sit, nullo fere negotio quantumvis minuitur. Id tamen interdum usui harum formularum officere potest, quod imaginarias comprehendant quantitates; quas tamen, si $\int x$, vel saltem $d\int x$, ex elementaribus composita fuerit functionibus, secundum calculi imaginarii notissimas regulas exterminaveris. Sic ex. gr. si desideraverimus $\int dx LSx$, mox habetur $d\int x = T^1 x$ (i. e. $=$ cotang x), atque

$$T^1(a+ib) + T^1(a-ib) = 2Ta.\frac{1-\dot{T}b^2}{Ta^2+\dot{T}b^2},$$

si breviter tangentem hyperbolicum $\frac{\dot{T}ib}{i}$ seu $\frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}$ per $\dot{T}b$ designaverimus. Erit igitur juxta formulam 3);

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{n\omega} dx\, LSx = \text{const} + \omega \Sigma LS(n+\tfrac{1}{2}\omega) +$$
$$\frac{\omega^2}{24.1860} T^1 x \left(1517 + 343.\frac{1-(\dot{T}\omega\sqrt{\frac{31}{98}})^2}{1+(T^1 x)^2.(\dot{T}\omega\sqrt{\frac{31}{98}})^2}\right)$$

quae formula calculi trigonometrici ope si mavis simplificata, hanc functionem transcendentem usque ad errorem ordinis ω^8 accurate suppeditat *).

Idem alibi (p. 328.) aliam haud minus memoratu dignam exhibuit seriem

$$s = \frac{\omega^2 D fx}{12} - \frac{\omega^4}{720} d^3 fx + \frac{\omega^6}{30240} d^5 fx - \frac{\omega^8}{1209600} d^7 fx \ldots.$$

quae nostris accommodata, vel

$$s = \frac{\omega^2}{12}\left(dfx - \frac{\omega^2}{10} D^3 fx + \frac{\omega^4}{21} D^5 fx - \frac{\omega^6}{20} D^7 fx + \ldots\right)$$

vel

$$s = \frac{\omega^2}{12}\left(dfx - \frac{\omega^2}{30} D^2 dfx + \frac{\omega^4}{105} D^4 dfx - \ldots\right)$$

scribenda est, ideoque vel per

$$s = \frac{\omega\sqrt{-10}}{24}\left(f(x+\omega\sqrt{\tfrac{-1}{10}}) - f(x-\omega\sqrt{\tfrac{-1}{10}})\right) + \varkappa_5 D^5 fx$$

vel per

$$s = \frac{\omega^2}{12.60}\left[53\, dfx + \tfrac{7}{2}\left(df(x+\omega\sqrt{\tfrac{-2}{7}}) + df(x-\omega\sqrt{\tfrac{-2}{7}})\right)\right]$$
$$+ \varkappa_8 \omega^8 D^7 fx + \ldots.$$

exhibenda.

---

*) Radicem

$$\sqrt{\frac{31}{98}} \text{ statim } = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16} + \frac{8.31}{9.49} - \frac{1}{9.16.49}.\frac{15874}{15874^2-1}\right)$$

accurate ad locum 32$^{\text{inum}}$ decimalem, singularis nobis suppeditat formula.

Imaginaria igitur hic etiam adsunt, quae quidem in problemate illo ballistico eliminari possunt.

Errores (ε) eodem modo quam proxime exhiberi possunt. Cum enim sit

$$\varepsilon = (c_{2r} - k_{2r})\,\mathrm{D}^{2r} fx + (c_{2r+1} - k_{2r+1})\,\mathrm{D}^{2r+1} fx + \dots,$$

si posuerimus

$$\varkappa_{m-2r} = \frac{(c_m - k_m)}{(m+2r)_m},$$

atque

$$\mathrm{D}^{2r} fx = Fx,$$

iterum habebimus seriem

$$\varepsilon = \varkappa_0 Fx + \varkappa_1 dFx + \varkappa_2 \mathrm{D}^2 Fx + \dots$$

sub formam

$$\varepsilon = \nu_0 F(x + \alpha_0) + \nu_1 F(x + \alpha_1) + \dots$$

ponendam. Sic ex. gr. obtinetur:

$$\int_{a-e}^{a+e} dx\, fx = 2e.\left[\tfrac{4}{9} fa + \tfrac{5}{18}\left(f\left(a + e\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + f\left(a - e\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right)\right]$$
$$+ \tfrac{e^7}{35}\left[\tfrac{11057}{11070}\,\mathrm{D}^6 fa + \tfrac{1331}{4428}\left(\mathrm{D}^6 f\left(a + \tfrac{2e}{11}\sqrt{\tfrac{123}{125}}\right) + \mathrm{D}^6 f\left(a - \tfrac{2e}{11}\sqrt{\tfrac{123}{125}}\right)\right)\right]$$
$$+ \varkappa . e^{13}\,\mathrm{D}^{12} fa + \dots$$

Alio modo idem fit, hoc saltem in casu, per formulam celeberrimi Jacobi (tom. I. pag. 307.):

$$\varepsilon = \frac{1}{(2r)_r} . \int^{r+1} x^n d^n \sqrt{}\, dx,$$

quae quidem ut integratio repetita per id, quod antea docuimus, summari potest. Series $c_0 fx + c_1 dfx + c_2 \mathrm{D}^2 fx + \dots$ generatim igitur sub formam $\Sigma n f(x + a) + \Sigma m \mathrm{D}^r f(x + b) +$ etc. poni potest.

Haecque hactenus indicasse sufficiat. Quali incremento exhinc eliminandi ars augeri possit, docere, separatam mereri tractationem nobis videtur.

28.
Mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen *).

I.

Wenn eine Gleichung des fünften Grades, deren Coëfficienten rationale Zahlen sind, algebraisch auflösbar ist, so kann man den Wurzeln folgende Gestalt geben:

$$x = c + A . a^{\frac{1}{5}} . a_1^{\frac{2}{5}} . a_2^{\frac{4}{5}} . a_3^{\frac{3}{5}} + A_1 . a_1^{\frac{1}{5}} . a_2^{\frac{2}{5}} . a_3^{\frac{4}{5}} . a^{\frac{3}{5}} + A_2 . a_2^{\frac{1}{5}} . a_3^{\frac{2}{5}} . a^{\frac{4}{5}} . a_1^{\frac{3}{5}} + A_3 . a_3^{\frac{1}{5}} . a^{\frac{2}{5}} . a_1^{\frac{4}{5}} . a_2^{\frac{3}{5}},$$

wo

$$\begin{aligned} a &= m + n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_1 &= m - n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_2 &= m + n\sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{[h(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)})]}, \\ a_3 &= m - n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{[h(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)})]}, \end{aligned}$$

$$A = K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2, \quad A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1a_3,$$
$$A_2 = K + K'a_2 + K''a + K'''aa_2, \quad A_3 = K + K'a_3 + K''a_1 + K'''a_1a_3.$$

Die Gröſsen c, b, e, m, n, K, K', K'', K''' sind rationale Zahlen.

Auf diese Weise läſst sich aber die Gleichung $x^5 + ax + b = 0$ nicht auflösen, so lange a und b beliebige Gröſsen sind.

Ich habe ähnliche Lehrsätze für Gleichungen vom 7ten, 11ten, 13ten etc. Grade.

Freyberg (im Erzgebirge), den 14. März 1826.

II.

Eine allgemeine Eigenschaft derjenigen Functionen, deren Differenzial algebraisch ist, besteht darin, daſs die Summe einer beliebigen Anzahl Functionen durch einn bestimmte Anzahl der nemlichen Functionen ausgedrückt werden kann. Nemlich:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots + \varphi(x_\mu) = v - \{\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \varphi(z_3) + \ldots + \varphi(z_n)\}.$$

x_1, x_2, ... x_μ sind beliebige Gröſsen, z_1, z_2, ... z_n algebraische Functionen dieser Gröſsen und v ist eine algebraisch-logarith-

*) Der Herausgeber glaubt, daſs auch diese Bruchstücke aus den Arbeiten des leider der Wissenschaft viel zu früh durch den Tod entrissenen Hrn. Abel nicht verloren gehen dürfen.

mische Function derselben; n ist eine bestimmte, von μ unabhängige Zahl. Ist z. B. φ eine algebraische Function, so ist $n = 1$, wie bekannt, aus Legendre's *Th. etc.*

Wenn aber die Function nicht elliptisch ist, so kennt man bis jetzt keine Eigenschaften derselben. Als einen der merkwürdigsten Fälle will ich folgenden hinschreiben:

Wenn man die Function

$$\int \frac{(\alpha + \beta x) \cdot \partial x}{\sqrt{(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6)}}$$

durch $\varphi(x)$ bezeichnet, so ist

$$1. \quad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - \{\varphi(y_1) + \varphi(y_2)\},$$

wo x_1, x_2, x_3 drei willkürliche veränderliche Gröfsen, C eine Constante und y_1, y_2 die zwei Wurzeln der Gleichung

$$y^2 - \left\{\frac{c_2^2 + 2c_1 - a_4}{2c_2 - a_5} - x_1 - x_2 - x_3\right\} y + \frac{\left(\frac{c^2 - a}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}\right)}{2c_2 - a_5} = 0$$

sind. Die Gröfsen c, c_1, c_2 sind durch die drei linearen Gleichungen:

$$c + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + x_1^3 = \sqrt{(a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots\ldots + x_1^6)},$$
$$c + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + x_2^3 = \sqrt{(a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2^6)},$$
$$c + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + x_3^3 = \sqrt{(a + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_3^6)}$$

bestimmt. Durch die Gleichung 1. ist die ganze Theorie der Function $\varphi(x)$ gegeben, weil die Eigenschaft welche sie ausdrückt, wie man beweisen kann, diese Function völlig bestimmt.

Paris, den 9. August 1826.

III.

Wenn man eine Curve $AMBN$ (Taf. IV. Fig. 1.) beschreibt, deren Gleichung

$$z = \sqrt{(\cos 2\varphi)},$$

wo

$$z = AM, \quad \varphi = \angle MAB,$$

so ist der Bogen AM durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$s = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}},$$

und hängt also von den elliptischen Functionen ab.

Nun habe ich gefunden, dafs man immer die Peripherie $AMBN$ geometrisch (d. h. vermittelst des Lineals und des Zirkels) in n gleiche Theile theilen kann, wenn n eine Primzahl von der Form $2^m + 1$ ist,

oder wenn

$$n = 2^{\mu}(2^m+1)(2^{m'}+1)(2^{m''}+1)\ldots\ldots(2^{m^{(k)}}+1),$$

wo 2^m+1, $2^{m'}+1$ etc. Primzahlen sind.

Wie Sie sehen, ist dieses Theorem ganz dasselbe, wie das Gaufsische für den Kreis. Man kann auf die Weise die obige krumme Linie z. E. in 2, 3, 5, 17 etc. gleiche Theile theilen. Meine Theorie der Gleichungen, verbunden mit der Theorie *des nombres*, hat mich auf dieses Theorem geführt. Ich habe Grund zu glauben, dafs Gaufs auch darauf gekommen ist.

Paris, den 4. December 1826.

IV.

Dagegen habe ich die Summe folgender Reihe gefunden:

$$\sin\varphi.\frac{a}{1+a}+\sin 3\varphi.\frac{a^3}{1+a^3}+\sin 5\varphi.\frac{a^5}{1+a^5}+\ldots\ldots$$

(a und φ sind willkürliche reelle Gröfsen) und dergleichen. Sie läfst sich durch elliptische Functionen ausdrücken.

Christiania, den 15. November 1827.

V. 1.

Je prépare dans ce moment un théorème sur les fonctions elliptiques, où j'ai considéré la théorie de ces fonctions sous un point de vue très général. Ce mémoire sera divisé en deux parties. La première contiendra la solution de ce problème général:

„Trouver toutes les relations possibles entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques qui pourront s'exprimer par une équation de la forme:

$$1.\quad A_1\Pi_1(x_1)+A_2\Pi_2(x_2)+\ldots\ldots+A_n\Pi_n(x_n)$$
$$= r+B_1\log v_1+B_2\log v_2+\ldots\ldots+B_m\log v_m,$$

x, x_2, ... x_n, r, v_1, v_2, ... v_m étant supposés des fonctions algébriques quelconques d'un certain nombre de variables indépendantes. Π_1, Π_2, ... Π_n désignent des fonctions elliptiques quelconques, c'est à dire des intégrales de la forme:

$$\Pi_\mu(y)=\int\frac{P_\mu.\partial y}{\sqrt{(\alpha_\mu+\beta_\mu y+\gamma_\mu y^2+\delta_\mu y^3+\varepsilon_\mu y^4)}},$$

où P_μ est une fonction quelconque rationnelle de y.

Je parviens d'abord à ce théorème général:

Théorème 1. Si une équation telle que (1.) a lieu, une quelconque des fonctions $\Pi_1(x_1)$, $\Pi_2(x_2)$, ... $\Pi_n(x_n)$, p. ex. $\Pi_\mu(x_n)$ sera exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques, et on doit nécessairement avoir:

$$2.\quad \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha_\mu+\beta_\mu x+\gamma_\mu x^2+\delta_\mu x^3+\varepsilon_\mu x^4)}}=a.\frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha_\nu+\beta_\nu y+\gamma_\nu y^2+\delta_\nu y^3+\varepsilon_\nu y^4)}},$$

où a est une constante, ν différent de μ, et y une fonction rationnelle de x."

Une relation quelconque entre plusieurs fonctions elliptiques entraine ainsi nécessairement une relation entre deux fonctions de la première espèce. En vertu de ce théorème la solution du problème général pourra être principalement réduite à celle de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (2.). J'ai obtenu la solution complète de ce problème. J'ai trouvé pour résultat qu'on pourra satisfaire à (1.) d'une infinité de manières. a sera une fonction des coëfficiens α_μ, β_μ, ... α_ν, β_ν, ... et entre ceux-ci il doit y avoir une seule relation, mais qui pourra être variée d'une infinité de manières.

Voici quelques uns des résultats les plus remarquables.

2. Soit pour abréger:

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4=R,\quad \alpha'+\beta' y+\gamma' y^2+\delta' y^3+\varepsilon' y^4=R'.$$

Cela posé, si l'équation

$$3.\quad \int\frac{\partial y}{\sqrt{R'}}=a\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$$

a lieu, où y est lié à x par l'équation algébrique $f(x, y)=0$, on aura toujours

$$4.\quad \int(A'_0+A'_1 y+\ldots\ldots+A'_\mu y^{\mu})\frac{\partial y}{\sqrt{R'}}=\int(A_0+A_1 x+\ldots\ldots+A_\mu x^{\mu})\frac{\partial x}{\sqrt{R}}+r,$$

où A_0, A_1, ... A_μ sont des constantes quelconques et r une expression algébrique et logarithmique.

3. L'équation (3.) ayant lieu, on aura toujours

$$5.\quad \int\frac{\partial y}{y-e'}\cdot\frac{1}{\sqrt{R'}}=r+A\int\frac{\partial x}{\Delta x}+B\int\frac{\partial x}{x-e}\cdot\frac{1}{\sqrt{R}},$$

où l'un des paramètres e' et e est arbitraire, mais l'autre est déterminé par l'équation $f(e', e)=0$, ensorte que ces quantités sont liées entre elles par la même équation que celles y et x. r est une expression connue.

4. Si une des équations (4. et 5.) a lieu, l'équation (3.) sera satisfaite également, en déterminant convenablement le coëfficient a.

5. Il est impossible de réduire des fonctions de la forme
$$\int (A + Bx + Cx^2) \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$$
aux fonctions de la première espèce, excepté pour quelques valeurs particulières des coëfficiens de la fonction R.

6. Il est impossible de réduire une fonction de la forme
$$\int \frac{\partial x}{x-e} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$$
aux fonctions de la première et de la seconde espèce, excepté pour des valeurs particulières du paramètre e. Ces valeurs de e sont déterminées par l'équation $p^2 - q^2 . R = (x-e)^m$, où m est entier.

7. Si l'équation $\frac{\partial y}{\sqrt{R'}} = \frac{a \partial x}{\sqrt{R}}$ est satisfaite par l'équation algébrique $f(y, x) = 0$, elle sera dans tous les cas résoluble algébriquement, en sorte qu'on en pourra tirer la valeur de l'une des quantités x et y en l'autre à l'aide de radicaux. En supposant x fonction rationnelle de y, en sorte que $\varphi(y) = x$, on aura, si cette équation est de degré impair:

$$y = \text{fonct. ration.}\,(x, \sqrt[n_1]{(p_1 + q_1\sqrt{R})}, \sqrt[n_2]{(p_2 + q_2\sqrt{R})}, \ldots \sqrt[n_m]{(p_m + q_m\sqrt{R})}),$$

où $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_m, q_m$ sont des fonctions entières de x, telles que $p_1^2 - q_1^2 . R = (x - a_1)^{n_1}$, $p_2^2 - q_2^2 . R = (x - a_2)^{n_2}, \ldots p_m^2 - q_m^2 . R = (x - a_m)^{n_m}$, $a_1, a_2, \ldots a_m$ étant des constantes. Le produit des exposans n_1, $n_2, \ldots n_m$ est égal au degré de l'équation $\varphi(y) = x$.

Dans la seconde partie il sera question des fonctions elliptiques de la forme $\int \frac{P \partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$, où l'on suppose c réel et moindre que l'unité. Tous les résultats auxquels je parviens dans cette seconde partie, et qui ne sont contenus implicitement dans ceux de la première partie, sont tirés de la considération de la fonction inverse de la première espèce. Je désigne cette fonction par λx, ensorte que
$$\partial x = \frac{\partial \lambda x}{\sqrt{[(1-\lambda^2 x)(1-c^2\lambda^2 x)]}}.$$

Cette fonction λ simplifie beaucoup toute la théorie des fonctions elliptiques. Elle a des propriétés très remarquables, et qui ont une analogie parfaite avec celles des fonctions circulaires, mais leur nombre est encore plus grand. Voilà quelques-unes des plus remarquables. Nous ferons pour abréger

$\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]} = \Delta(c,x)$; $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c,x)}$, $\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b,x)}$, où $b = \sqrt{(1-c^2)}$.

1. La fonction λx est une fonction periodique de x. Cette propriété est la même que celle de $\sin x$. La fonction $\lambda(x\sqrt{-1})$ est également une fonction périodique de x.

2. L'équation $\lambda x = 0$ a une infinité de racines réelles et imaginaires, savoir $x = m\omega + n\varpi\sqrt{-1}$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Les racines de l'équation plus générale $\lambda x = \lambda \alpha$ sont $x = (-1)^m a + m\omega + n\varpi\sqrt{-1}$.

3. La fonction λx pourra être décomposé en un nombre infini de facteurs et de fractions partielles, p. ex.

$$\frac{1}{\lambda x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n . \frac{(-1)^m}{x + m\omega + n\varpi i},$$

$$\lambda x = \frac{1}{c} . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n . \frac{(-1)^m}{x + m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i}.$$

4. Les propriétés de la fonction λx sont intimément liées avec l'équation $p^2 - q^2(1-y^2)(1-c^2y^2) = 0$, où p et q sont des fonctions entières de y. En effet si l'on désigne par $\lambda\theta_1, \lambda\theta_2, \ldots . \lambda\theta_\mu$ les racines de cette équation, on aura, en supposant variables quelques-unes de ces racines,

$$\text{const.} = \lambda(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \ldots . \pm \theta_\mu)$$

en déterminant convenablement les signes des quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots . \theta_\mu$.

5. On pourra exprimer $\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \ldots . \theta_\mu)$ en fonction rationnelle de $\lambda\theta_1, \lambda\theta_2, \ldots . \lambda\theta_\mu, \Delta(c, \lambda\theta_1), \ldots . \Delta(c, \lambda\theta_\mu)$ quelles que soient les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots . \theta_\mu$.

7. S'il l'on veut que deux fonctions $\int \frac{\partial x}{\Delta(c,x)}$, $\int \frac{\partial y}{\Delta(c',y)}$, où c et c' sont moindres que l'unité, ainsi que x et y, peuvent être réduites indéfiniment l'une à l'autre, il faut qu'on ait cette relation entre les fonctions complètes

$$m\int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c,x)} : \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b',x)} = n\int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(b,x)} : \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(c',x)},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, et $b' = \sqrt{(1-c'^2)}$. Si cette équation est satisfaite, on pourra toujours exprimer y algébriquement et même rationnellement en x, de sorte que $\int \frac{\partial x}{\Delta(c,x)} = a\int \frac{\partial y}{\Delta(c',y)}$, où a est une constante dont la valeur dépend de celle du module c.

7. Si l'on suppose réductibles l'une à l'autre deux fonctions de la première espèce $\int \frac{\partial x}{\Delta(c,x)}$, $\int \frac{\partial x}{\Delta(c',y)}$, où c est moindre que l'unité et c' réel ou imaginaire, toutes les valeurs de c', propres à satisfaire à cette condition, seront données par les deux formules:

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1-\delta^3}{1+\delta^3} \cdot \frac{1-\delta^5}{1+\delta^5} \cdots; \quad \sqrt[4]{c'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{\delta} \cdot \frac{1+\delta^2}{1+\delta} \cdot \frac{1+\delta^4}{1+\delta^3} \cdot \frac{1+\delta^6}{1+\delta^5},$$

où $\delta = \pi\left(\mu\sqrt{-1} - \nu \cdot \frac{\omega}{\varpi}\right)$, μ et ν étant des nombres rationnels quelconques.

Il est à remarquer que si l'on fait $\mu = 0$, $\nu = 1$, on aura:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1-\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1-\delta^3}{1+\delta^3} \cdots; \quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{\delta} \cdot \frac{1+\delta^2}{1+\delta} \cdot \frac{1+\delta^4}{1+\delta^3} \cdots$$

Ces formules donneront donc le module c et son complément b en fonctions de $\delta = \frac{\omega}{\varpi}\pi$.

Je passe sous silence un grand nombre d'autres propriétés, tant des fonctions de la première espèce, que de celle de la seconde et de la troisième espèce.

V. 2.

Théorèmes sur les équations.

A. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques, et $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque: si l'on suppose entre $x_1, x_2, \ldots x_n$ les n équations suivantes:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n, x_1) = 0;$$
$$\varphi(x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(x_n, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $m-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par la fonction $\varphi(x, x, x, \ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé je dis que cette équation sera décomposable en $\frac{m^n-m}{n}$ équations, chacune du degré m, et dont les coëfficiens seront déterminés à l'aide d'une équation du degré $\frac{m^n-m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré m seront résolubles algébriquement.

Par. ex. si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré. Pareillement si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations:

$$x_2 = \frac{a + b x_1 + c x_1^2}{\alpha + \beta x_1}; \quad x_3 = \frac{a + b x_2 + c x_2^2}{\alpha + \beta x_2}; \quad x_1 = \frac{a + b x_3 + c x_3^2}{\alpha + \beta x_3},$$

on aura, pour déterminer x_1, x_2, x_3, une équation du sixième degré, mais elle sera décomposable en deux équations du troisième degré, les coëfficiens de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

B. Si trois racines d'une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

C. Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

Christiania, le 18. Octobre 1828.

29.

Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. math. ord. Regiom.)

1.

Proposita expressione

$$\frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{1}{b'y+a'x-t'},$$

evolvamus alterum factorem

$$\frac{1}{ax+by-t}$$

ad dignitates negativas ipsius y. Quem evolutionis modum ordine, quo in singulis fractionibus elementa x, y exhibuimus indicare placet. In producto assignato ipsorum quidem a, b' nonnisi negativae dignitates ipsorum b, a', t, t' nonnisi positivae occurrunt; elementorum x, y autem et positivae et negativae dignitates in infinitum inveniuntur. Neque tamen, uti facile constat, in ullo termino utriusque simul elementi x, y dignitates positivae, sed aut utriusque negativae, aut alterius positivae, alterius negativae erunt. Quarum porro dignitatum coëfficientes series infinitae evadunt, ad dignitates descendentes ipsorum a, b' procedentes. Distinguamus inter partem eam producti assignati, in qua utriusque x, y dignitates negativae sunt, eam partem, in qua elementi x dignitates negativae, elementi y positivae, eam denique, in qua ipsius y negativae, ipsius x positivae. Animadverti hoc singulare, fractionem propositam in tres alias discerpi posse, e quarum evolutione partes illae tres, singulae e singulis proveniant. In quibus porro evolutionibus id accidit, ut coëfficientes, qui in producto proposito series infinitae sunt, iam finito terminorum numero constent, ideoque per ipsam illam discerptionem algebraicam series illae infinitae prodeant summatae.

Simili modo, proposita expressione tres variabiles x, y, z involvente:

$$\frac{1}{ax+by+cz-t}\cdot\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}\cdot\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''},$$

factorem primum, secundum, tertium respective ad dignitates negati-

vas elementorum x, y, z evolvamus, uti rursus ipso ordine*), quo in singulis fractionibus elementa exhibuimus, indicatum est. Hic partes septem considerandae sunt, prout terminos colligis, in quibus aut omnium elementorum x, y, z dignitates negativae, aut binorum negativae, reliqui positivae, aut binorum positivae, reliqui negativae sunt. Rursus expressionem propositam in alias septem discerpere licet, e quarum evolutione partes illae septem, singulae e singulis proveniunt; in quibus rursus evolutionibus coëfficientes finiti sunt, dum in expressione proposita series infinitae erant. Generaliter proposito producto e n fractionibus conflato, quarum denominatores lineariter e n variabilibus compositae sunt, siquidem factores alios ad alius elementi dignitates negativas evolvis, quo facto productum omnium elementorum et positivas et negativas dignitates in infinitum continebit: fractionem illam compositam in alias discerpere licet, quae evolutae singulae singulas partes producti propositi amplectuntur, in quibus eiusdem elementi dignitates aut positivae aut negativae sunt, neque ullius et positivae et negativae simul inveniuntur. Nec non coëfficientes, qui in producto assignato series infinitae sunt, in his novis evolutionibus finito terminorum numero constabunt, unde simul per discerptionem illam omnium illarum serierum infinitarum summationem nanciscimur.

Sit expressio proposita

$$\frac{1}{u-t}\cdot\frac{1}{u_1-t'}\cdot\frac{1}{u_2-t''}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{u_{n-1}-t^{(n-1)}},$$

in qua $u-t$, u_1-t', etc. e n variabilibus x, x_1, x_2, ... x_{n-1} lineariter compositae sint, designantibus t, t', t'', ... $t^{(n-1)}$ terminos constantes: factor primus, secundus, tertius, etc. respective ad dignitates descendentes ipsorum x, x_1, x_2 etc. evolvatur. Sint porro $x=p$, $x_1=p_1$, $x_2=p_2$, ... $x_{n-1}=p_{n-1}$ valores variabilium x, x_1, etc., qui satisfaciunt aequationibus $u=t$, $u_1=t'$, $u_2=t''$, ... $u_{n-1}=t^{(n-1)}$. Quorum valorum expressionem algebraicam notum est communi quodam denominatore affectam esse, quam cum quibusdam determinantem nun-

*) In sequentibus quoque, ubi denominator fractionis sive generalius argumentum functionis evolvendae pluribus nominibus constat, nomen, ad cuius dignitates descendentes evolutio instituenda est, primum scribemus. Quod ad sequentia intelligenda bene tenendum est.

cupamus et designemus per Δ. In exemplo allegato de tribus fractionibus, tres variabiles involventibus, fit e. g.

$$\Delta = ab'c'' - ab''c' - b'ca'' - c''a'b + a'b''c + a''bc'.$$

Quam determinantem in hac quaestione magnas partes agere videbimus, videlicet omnes illas series infinitas, quas ut coëfficientes producti propositi evoluti invenimus, ex evolutione dignitatum negativarum determinantis provenire. Maxime autem discerptio, de qua diximus, a valoribus ipsorum $p, p_1, \ldots p_{n-1}$ pendet. Fit e. g. pars ea, quae omnium elementorum nonnisi negativas dignitates continet, et quae prae ceteris concinnitate gaudet:

$$\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x_1-p_1}\cdot\frac{1}{x_2-p_2}\cdots\frac{1}{x_{n-1}-p_{n-1}}.$$

Unde videmus e. g. in expressione $\frac{1}{uu_1\ldots u_{n-1}}$, dictum in modum evoluta, coëfficientem termini $\frac{1}{xx_1\ldots x_{n-1}}$ fieri

$$\frac{1}{\Delta}.$$

Quam expressionem memorabile est non pendere ab electione variabilium, ad quarum dignitates negativas singulae fractiones $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. evolvuntur modo ne duas ex earum numero ad eiusdem variabilis dignitates descendentes evolvas. Variabilibus igitur, quocunque modo placet, inter se permutatis, quod $2.3\ldots n$ modis fieri posse constat, variae illae series infinitae, quas pro variis evolvendi modis ut coëfficientes termini $\frac{1}{xx_1\ldots x_{n-1}}$ invenis, ex eiusdem expressionis $\frac{1}{\Delta}$ evolutione proveniunt, prout secundum aliud nomen ipsius Δ, quod et ipsum $2.3\ldots n$ nominibus constare notum est, evolutionem instituis.

Fractiones reliquae, e quarum evolutione partes prodeunt, quae unius pluriumve variabilium dignitates positivas, reliquarum negativas continent, multo prolixiores fiunt, ut infra videbimus; unde commode alia adhuc forma iis assignatur, quae ipsi illi, quam pro parte prima assignavimus, simillima fit. Namque partem, quae ipsorum $x, x_1, \ldots x_{m-1}$ negativas, ipsorum $x_m, x_{m-1}, \ldots x_{n-1}$ positivas dignitates amplectitur, invenitur fieri

$$\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{x-p}\cdot\frac{1}{x_1-p_1}\cdots\frac{1}{x_{m-1}-p_{m-1}}.$$

$$\frac{1}{p_m - x_m} \cdot \frac{1}{p_{m+1} - x_{m+1}} \cdots \frac{1}{p_{n-1} - x_{n-1}},$$

siquidem $\frac{1}{p_m}$, $\frac{1}{p_{m+1}}$, ... $\frac{1}{p_{n-1}}$ earumque dignitates respective ad dignitates descendentes ipsarum $t^{(m)}$, $t^{(m)}$, ... $t^{(n-1)}$ evolvuntur, et dignitates negativae ipsarum $t^{(m)}$, $t^{(m+1)}$, ... $t^{(n-1)}$, quae in producto ita evoluto inveniuntur, reiiciuntur. E. g. expressionis

$$\frac{1}{ax + by - t} \cdot \frac{1}{b'y + a'x - t'}$$

pars, quae negativas ipsius x, positivas ipsius y dignitates continet, fit

$$\frac{ab' - a'b}{[(ab' - a'b)x - b't + bt'][at' - a't - (ab' - a'b)y]},$$

reiectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, dignitatibus ipsius t' negativis. Quae nova repraesentatio eo et ipsa commodo gaudet, ut coëfficientes evolutionis habeat finitos.

Sed generaliores adhuc formulas adstruere licet. Etenim in expressione

$$\frac{1}{(u-t)(u_1 - t') \cdots (u_{n-1} - t^{(n-1)})} = \Sigma \frac{t^\alpha t'^{\alpha_1} \cdots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$$

numeris α, α_1, ... α_{n-1} positivi tantum valores inde a 0 usque ad infinitum conveniunt. Jam vero consideremus expressionem

$$\Sigma \frac{t^\alpha t'^{\alpha_1} \cdots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}},$$

numeris integris α, α_1, ... α_{n-1} valores omnes et positivos et negativos tributis a $-\infty$ ad $+\infty$. Quam patet prodire ex evoluto producto

$$\left(\frac{1}{u-t} + \frac{1}{t-u}\right)\left(\frac{1}{u_1 - t'} + \frac{1}{t' - u_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{u_{n-1} - t^{(n-1)}} + \frac{1}{t^{(n-1)} - u_{n-1}}\right).$$

Quod ipsis $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u_1}$, $\frac{1}{u_2}$ etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ etc. evolutis, invenitur productum aequale expressioni

$$\frac{1}{\triangle}\left(\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p-x}\right)\left(\frac{1}{x_1 - p_1} + \frac{1}{p_1 - x_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{x_{n-1} - p_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1} - x_{n-1}}\right),$$

ipsis $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum t, t', t'' etc. evolutis. Quam aequationem etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$\Sigma \frac{t^\alpha t'^{\alpha_1} \dots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}} = \frac{1}{\triangle} \Sigma \frac{p^\beta p_1^{\beta_1} \dots p_{n-1}^{\beta_{n-1}}}{x^{\beta+1} x_1^{\beta_1+1} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-1}+1}},$$

designantibus α, α_1, etc. β, β_1, etc. numeros omnes et positivos et negativos a $-\infty$ ad $+\infty$. E quo theoremate videmus, coëfficientem termini $\frac{1}{x^{\beta+1} x_1^{\beta_1+1} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-1}+1}}$ in expressione

$$\frac{1}{u^{\alpha+1} u_1^{\alpha_1+1} \dots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$$

aequalem fore coëfficienti termini $t^\alpha t'^{\alpha_1} \dots t^{(n-1)^{\alpha_{n-1}}}$ in expressione

$$\frac{1}{\triangle} p^\beta p_1^{\beta_1} \dots p_{n-1}^{\beta_{n-1}}.$$

Pro duobus elementis e. g., coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}}$$

invenitur aequalem esse coëfficienti termini $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{m+n+1}}.$$

Unde facile derivatur theorema, posito $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=p$, fore

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}u+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}u^3+\dots=$$
$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma}}\cdot\left(1+\frac{\alpha'\beta'}{\gamma}u+\frac{\alpha'(\alpha'+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta'(\beta'+1)}{1.2}u^2+\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1.2.3}u^3+\dots\right);$$

nec non relatio inter integralia definita:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\,.\,\partial\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}} = \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,\Pi n}\int_0^\pi \frac{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n\cos\lambda\varphi\,.\,\partial\varphi}{(1-\alpha\alpha)^{2n+1}},$$

designante Πx productum $1.2.3\dots x$. Quae ab Eulero olim inventa sunt.

At theorematis, de quibus in hac commentatione agimus et quorum modo mentionem injecimus, latissimam conciliare licet extensionem. Ponamus enim, $u-t$, u_1-t', etc. iam series esse quaslibet, sive finitas sive infinitas, ad dignitates integras positivas elementorum x, x_1, etc. procedentes, quarum serierum t, t', etc. sint termini constantes. Sint porro in seriebus illis u, u_1, u_2, etc. termini, qui primas ipsorum x, x_1, x_2, etc. dignitates continent, respective ax, $b'x_1$, $c''x_2$, etc., ac ponamus, uti in casu lineari, fractiones $\frac{1}{u-t}$, $\frac{1}{u_1-t'}$, $\frac{1}{u_2-t''}$, etc. evolvi respective ad dignitates descendentes terminorum ax, $b'x_1$, $c''x_2$, etc. Vocemus porro $\triangle$ determinantem differentialium partialium sequentium:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \dots\dots & \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \dots\dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\
\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}, & \dots\dots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.
\end{array}$$

Erit e. g. pro tribus functionibus u, u_1, u_2, etc., tribusque variabilibus x, y, z:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

quam patet expressionem casu, quo u, u_1, u_2 sunt expressiones lineares, in expressionem ipsius Δ supra exhibitam redire. Quibus positis dico, siquidem $x=p$, $x_1=p_1$, $x_2=p_2$, ... $x_{n-1}=p_{n-1}$ satisfaciant aequationibus $u=t$, $u_1=t'$, $u_2=t''$, ... $u_{n-1}=t^{(n-1)}$, producti

$$\frac{\Delta}{(u-t)(u_1-t')(u_2-t'')\dots(u_{n-1}-t^{(n-1)})},$$

dictum in modum evoluti, partem eam, quae omnium simul elementorum x, x_1, etc. dignitates negativas neque ullius positivas continet, ut supra in casu multo simpliciore, fieri

$$\frac{1}{(x-p)(x_1-p_1)(x_2-p_2)\dots(x_{n-1}-p_{n-1})}.$$

Nec non esse, quod magis generale est theorema,

$$\Delta\left(\frac{1}{u-t}+\frac{1}{t-u}\right)\left(\frac{1}{u_1-t'}+\frac{1}{t'-u_1}\right)\dots\left(\frac{1}{u_{n-1}-t^{(n-1)}}+\frac{1}{t^{(n-1)}-u_{n-1}}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{p-x}\right)\left(\frac{1}{x_1-p_1}+\frac{1}{p_1-x_1}\right)\dots\left(\frac{1}{x_{n-1}-p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}+x_{n-1}}\right),$$

ipsis $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p_1}$, etc. earumque dignitatibus respective ad dignitates descendentes ipsarum t, t', etc. evolutis. E quo theoremate memorabili fluunt formulae maxime generales pro radicibus aequationum inter numerum quemlibet variabilium, adeoque radicum dignitatibus et productis in seriem evolvendis. Quippe quibus ad dignitates ipsarum t, t', t'', etc. ordinatis, e theoremate proposito statim terminum generalem earum serierum eruis. Patet enim e dicto theoremate, in evolvenda expressione

$$p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

coëfficientem termini

$$t^{\beta} t'^{\beta'} \ldots . t^{(n-1)^{\beta^{(n-1)}}}$$

eundem esse atque coëfficientem termini $\frac{1}{x^{\alpha+1} x_1^{\alpha_1+1} \ldots . x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1}}$ in expressione

$$\frac{\triangle}{u^{\beta+1} u_1^{\beta'+1} \ldots . u_{n-1}^{\beta^{(n-1)}+1}},$$

dictum in modum evoluta; quem coëfficientem per regulas notas, quae pro evolvendis dignitatibus polynomii circumferuntur, statim eruis. Quae hoc loco breviter innuisse sufficiat. Ipsam iam quaestionem nostram aggrediamur.

2.

Ordimur a casu simplicissimo duarum variabilium, in quo ab initio terminos constantes $= 0$ ponemus. Fit

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)} = \frac{a}{y} \cdot \frac{1}{ax+by} - \frac{a'}{y} \cdot \frac{1}{b'y+a'x};$$

fit porro:

$$\frac{a}{y} \cdot \frac{1}{ax+by} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{ax+by},$$

unde

$$1) \quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{ax+by} - \frac{1}{y} \cdot \frac{a'}{b'y+a'x}.$$

Aequatione 1) ad dignitates descendentes ipsarum a, b' evolutis, videmus partes tres, in quas fractionem propositam

$$\frac{ab'-a'b}{(ax+by)(b'y+a'x)}$$

discerpimus, et quas per L, L_1, L_2 designemus, primam L utriusque elementi x, y negativas, secundam L_1 ipsius x negativas, ipsius y positivas, tertiam L_2 ipsius y negativas, ipsius x positivas dignitates continere.

Ponamus iam, satisfacere $x = p$, $y = q$ aequationibus

$$ax + by = t, \quad a'x + b'y = t',$$

unde

$$(ab'-a'b)p = b't - bt', \quad (ab'-a'b)q = at' - a't.$$

Mutatis in aequatione 1) x, y in $x-p$, $y-q$, quo facto $ax+by$, $a'x+b'y$ in $ax+by-t$, $a'x+b'y-t'$ abeunt, obtines

Theorema 1.

posito

$$L = \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y - at' + a't},$$

$$L_1 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{b}{ax+by-t},$$

$$L_2 = -\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'},$$

fieri

$$2)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')} = L+L_1+L_2.$$

Aequatione 2) ad dignitates descendentes elementorum a, b' evoluta, videmus, L, L_1, L_2 esse partes illas tres, quae aut utriusque x, y negativas, aut alterius negativas, alterius positivas dignitates continent. Simul autem ipso adspectu patet, in evolutione ipsorum L, L_1, L_2 dignitates variabilium x, y coëfficientes finitos habere, dum in evolutione expressionis propositae series infinitae sunt.

3.

Jam videbimus, de producto e tribus factoribus, tres variabiles involventibus

$$\frac{1}{(ax+by+cz-t)(b'y+c'z+a'x-t')(c''z+a''x+b''y-t'')}$$

similia inveniri. Eo enim ad dignitates descendentes ipsorum a, b', c'' evoluto, in evolutione dignitates variabilium x, y, z et positivae et negativae inveniuntur in infinitum; neque tamen ita, ut in ullo termino simul omnium dignitates positivae sint. Colligamus igitur terminos, qui omnium x, y, z simul dignitates negativas continent, quae pars prima erit; terminos, qui binarum variabilium negativas, reliquae positivas continent, quae erunt partes tres, prout aut elementi x, aut elementi y, aut elementi z dignitates positivae sunt; terminos denique, qui binarum variabilium dignitates positivas, reliquae negativas continent, quae et ipsae sunt partes tres, prout aut elementi x, aut elementi y, aut elementi z dignitates negativae sunt. Quae septem partes constituunt seriem, quae ex evolutione expressionis propositae ortum ducit. Jam rursus de expressione illa in septem alias discerpenda quaeramus, e quarum evolutione septem illae partes, singulae e singulis proveniant. Qua in quaestione initio, ut supra, statuemus $t = t' = t'' = 0$.

Designabimus in sequentibus per (ab') expressionem

$$(ab') = ab' - a'b,$$

porro per $(ab'c'')$ expressionem

$$(ab'c'') = a(b'c'') + b(c'a'') + c(a'b'')$$
$$= ab'c'' - ab''c' - b'ca'' - c''a'b + a'b''c + a''bc'.$$

Quae errori locum non dabit notatio, cum monomen uncis inclusum alias inveniri non soleat. Sit

1) $ax+by+cz=u,\quad a'x+b'y+c'z=u',\quad a''x+b''y+c''z=u''$;
ponatur porro:

$$\begin{aligned}
2)\quad (b'c'')y-(c'a'')x &= c''u'-c'u'' = v,\\
(b'c'')z-(a'b'')x &= b'u''-b''u' = w,\\
(c''a)z-(a''b)y &= au''-a''u = v',\\
(c''a)x-(b''c)y &= c''u-cu'' = w',\\
(ab')x-(bc')z &= b'u-bu' = v'',\\
(ab')y-(ca')z &= au'-a'u = w''.
\end{aligned}$$

Observo, siquidem ad dignitates elementorum a, b', c'' descendentes e lutionem instituas, expressiones

$\frac{1}{u}, \frac{1}{w'}, \frac{1}{v''}$ earumque dignitates ad dignitates descendentes ipsius x,

$\frac{1}{u'}, \frac{1}{w''}, \frac{1}{v}$ - - - - - - y,

$\frac{1}{v''}, \frac{1}{w}, \frac{1}{v'}$ - - - - - - z,

evolvendas esse. Fit porro e formula 1) paragraphi antecedentis:

$$\begin{aligned}
3)\quad \frac{1}{u'u''} &= \frac{(b'c'')}{vw}-\frac{c'}{u'v}-\frac{b''}{u''w},\\
\frac{1}{u''u} &= \frac{(c''a)}{v'w'}-\frac{a''}{u''v'}-\frac{c}{uw'},\\
\frac{1}{uu'} &= \frac{(ab')}{v''w''}-\frac{b}{uv''}-\frac{a'}{u'w''},
\end{aligned}$$

His praeparatis, ad inveniendam discerptionem quaesitam proficiscimur ab aequatione identica:

$$\begin{aligned}
4)\quad (ab'c'')xyz = uu'u'' &- xu(a'a''x+a''b'y+a'c''z)\\
&-yu'(b''by+bc''z+b''ax)\\
&-zu''(cc'z+c'ax+cb'y),
\end{aligned}$$

quae evolutione facta facile comprobatur. Qua divisa per $xyzuu'u''$, siquidem brevitatis causa ponitur:

$$\begin{aligned}
a'a''x+a''b'y+a'c''z &= N,\\
b''by+bc''z+b''ax &= N',\\
cc'z+c'ax+cb'y &= N'',
\end{aligned}$$

prodit:

$$5)\quad \frac{(ab'c'')}{uu'u''} = \frac{1}{xyz}-\frac{N}{yzu'u''}-\frac{N'}{zxu''u}-\frac{N''}{xyuu'}.$$

Fit autem e 3):

$$\frac{1}{u'u''} = \frac{(b'c'')}{vw}-\frac{c'}{u'v}-\frac{b''}{u''w},$$

porro e 2):

$$\begin{aligned}(b'c'')N &= a''b'v + a'c''w - (a'b'')(c'a'')x,\\ c'N &= c'a''u' - c'(c'a'')z,\\ b''N &= b''a'u'' - b''(a'b'')y,\end{aligned}$$

unde

$$\frac{N}{yzu'u''} = -\frac{(a'b'')}{yzw} - \frac{(c'a'')}{yzv} - \frac{(a'b'')(c'a'')x}{yzvw} + \frac{c'(c'a'')}{yu'v} + \frac{b''(a'b'')}{zu''w}.$$

Prorsus eodem modo invenitur

$$\frac{N'}{zxu''u} = -\frac{(b''c)}{zxw'} - \frac{(a''b)}{zxv'} - \frac{(b''c)(a''b)y}{zxv'w'} + \frac{a''(a''b)}{zu''v'} + \frac{c(b''c)}{xuw'},$$

$$\frac{N''}{xyuu'} = -\frac{(ca')}{xyw''} - \frac{(bc')}{xyv''} - \frac{(ca')(bc')z}{xyv''w''} + \frac{b(bc')}{xuv''} + \frac{a'(ca')}{yu'w''}.$$

Unde tandem fit:

$$\begin{aligned}
6)\quad \frac{(ab'c'')}{uu'u''} = \frac{1}{xyz} & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad L\\
+\frac{(a'b'')}{yzw} + \frac{(c'a'')}{yzv} + \frac{(a'b'')(c'a'')x}{yzvw} & \quad\ldots\ldots\quad L_1\\
+\frac{(b''c)}{zxw'} + \frac{(a''b)}{zxv'} + \frac{(b''c)(a''b)y}{zxv'w'} & \quad\ldots\ldots\quad L_2\\
+\frac{(ca')}{xyw''} + \frac{(bc')}{xyv''} + \frac{(ca')(bc')z}{xyv''w''} & \quad\ldots\ldots\quad L_3\\
-\frac{b(bc')}{xv''u} - \frac{c(b''c)}{xw'u} & \quad\ldots\ldots\quad L_4\\
-\frac{c'(c'a'')}{yvu'} - \frac{a'(ca')}{yu'w''} & \quad\ldots\ldots\quad L_5\\
-\frac{a''(a''b)}{zv'u''} - \frac{b''(a'b'')}{zwu''} & \quad\ldots\ldots\quad L_6.
\end{aligned}$$

n ex observatione supra facta de modo evolutionis, quo uti debe-, facile constat, esse discerptionem quaesitam expressionis propositae alias septem, quas per L, L_1, L_2, ... L_6 designavimus, casu, quo $= t' = t''$. E quo eadem omnino methodo, qua supra usi sumus, statim generaliorem eruis. Ponamus enim, $x = p$, $y = q$, $z = r$ satisfacere aequationibus $u = t$, $u' = t'$, $u'' = t''$, mutatis x, y, z in $x - p$, $y - q$, $z - r$, nancisceris e 2) discerptionem expressionis

$$\frac{(ab'c'')}{(ax+by+cz-t)(b'y+c'z+a'x-t')(c''z+a''x+b''y-t'')}.$$

Fit e. g. L sive pars, quae nonnisi negativas variabilium x, y, z dignitates continet,

$$7)\quad L = \frac{(ab'c'')}{(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t''},$$
$$\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t},$$
$$\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}.$$

Ad quatuor pluresve variabiles haec extendere non lubet, cum iam pro tribus tam prolixa exstiterint. Progredimur ad alia.

4.

E theoremate 1. §. 2. fit:

$$1)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')} = \frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}$$
$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t}$$
$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'}.$$

Porro obtinetur:

$$-\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t} =$$
$$\frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}$$
$$\frac{-1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{a}{ax+by-t}.$$

Quibus expressionibus, ut fieri debet, ad dignitates negativas ipsius x, positivas ipsius y evolutis, videmus,

$$\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t}$$

non nisi positivas dignitates ipsius t',

$$\frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{1}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}$$

et positivas et negativas ipsius t',

$$\frac{1}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{1}{ax+by-t}$$

nonnisi negativas dignitates ipsius t' cotinere. Unde

$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{b}{ax+by-t} =$$
$$\frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'},$$

rejectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, negativis ipsius t' dignitatibus. Pars autem, quae rejicitur, negativas ipsius t' dignitates continens, est:

$$\frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{a}{ax+by-t}.$$

Prorsus simili modo fit:

$$-\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}\cdot\frac{a'}{b'y+a'x-t'}=$$
$$\frac{ab'-a'b}{b't-bt'-(ab'-a'b)x}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't},$$

reiectis, quae in evolutione huius expressionis inveniuntur, negativis ipsius t dignitatibus. Unde iam e 1) nacti sumus, theorema curiosum, esse

$$2)\quad \frac{ab'-a'b}{(ax+by-t)(b'y+a'x-t')}=\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't}$$
$$+\frac{ab'-a'b}{at'-a't-(ab'-a'b)y}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)x-b't+bt'}$$
$$+\frac{ab'-a'b}{b't-bt'-(ab'-a'b)x}\cdot\frac{ab'-a'b}{(ab'-a'b)y-at'+a't},$$

siquidem in evolutionibus harum expressionum, negativae, quae inveniuntur, ipsorum t, t' dignitates rejiciuntur.

5.

Generaliora adhuc sequenti modo eruis. Etenim serie utrinque infinita

$$\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}},$$

in qua numero integro n valores omnes tribuuntur a $-\infty$ ad $+\infty$, e notationis nostrae ratione designata per

$$\frac{1}{B-A}+\frac{1}{A-B},$$

ipsam quidem eiusmodi expressionem non pro evanescente habebimus; evanescet autem, ducta in $A-B$. Fit enim:

$$A\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}}=\Sigma\frac{B^n}{A^n},\quad B\Sigma\frac{B^n}{A^{n+1}}=\Sigma\frac{B^{n+1}}{A^{n+1}},$$

unde cum

$$\Sigma\frac{B^n}{A^n}=\Sigma\frac{B^{n+1}}{A^{n+1}},$$

etiam:

$$(A-B)\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=0.$$

inc sequitur, fieri etiam:

$$1)\quad \frac{1}{C+m(A-B)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=\frac{1}{C}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right).$$

Jam proposita expressione

$$\left(\frac{1}{ax+by-t}+\frac{1}{t-ax-by}\right)\cdot\left(\frac{1}{b'y+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-a'x}\right),$$

fit:

$$b'(ax+by-t) = (ab')x - b't + bt' + b(b'y+a'x-t'),$$

unde e 1) expressio proposita in hanc abit:

$$\left(\frac{b'}{(ab')x-b't+bt'} + \frac{b'}{b't-bt'-(ab')x}\right)\cdot\left(\frac{1}{b'y+a'x-t'} + \frac{1}{t'-b'y-a'x}\right).$$

Fit porro:

$$(ab')(b'y+a'x-t') = b'((ab')y-at'+a't) + a'((ab')x-b't+bt'),$$

unde rursus e 1) fit expressio proposita:

$$2)\quad (ab')\left(\frac{1}{ax+by-t} + \frac{1}{t-ax-by}\right)\cdot\left(\frac{1}{b'y+a'x-t'} + \frac{1}{t'-b'y-a'x}\right) =$$

$$\left(\frac{(ab')}{(ab')x-b't+bt'} + \frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x}\right)\cdot\left(\frac{(ab')}{(ab')y-at'+a't} + \frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y}\right).$$

Quam etiam, uncis solutis, ita exhibere licet:

$$3)\quad \frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{(ab')}{b'y+a'x-t'} + \frac{1}{t-ax-by}\cdot\frac{(ab')}{t'-b'y-a'x} +$$

$$\frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{(ab')}{t'-b'y-a'x} + \frac{1}{t-ax-by}\cdot\frac{(ab')}{b'y+a'x-t'} =$$

$$\frac{(ab')}{(ab')x-b't+bt'}\cdot\frac{(ab')}{(ab')y-at'+a't} + \frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x}\cdot\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y} +$$

$$\frac{(ab')}{(ab')x-b't+bt'}\cdot\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y} + \frac{(ab')}{(ab')y-at'+a't}\cdot\frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x}.$$

E qua formula, reiectis ipsarum t, t' dignitatibus negativis, fluit formula 2) paragraphi antecedentis.

Formulam 3) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$4)\quad \Sigma\frac{t^m t'^n}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}} = \Sigma\frac{(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}x^\mu y^\nu},$$

designantibus m, n, μ, ν numeros omnes et positivos et negativos a $-\infty$ ad $+\infty$. Quam etiam proponere licet ut

Theorema 2.

Designantibus m, n numeros integros quoslibet sive positivos sive negativos, in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}}$$

coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu}$ eundem nancisceris atque coëfficientem te[rmini] $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{1}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}}\cdot(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}.$$

Adnotare convenit, quoties m sit negativus, necessario etiam μ fie[ri]

negativum, et vice versa, quoties μ sit positivus, necessario etiam m fieri positivum; eodemque modo, quoties n sit negativus, necessario etiam ν fieri negativum, et vice versa, quoties ν sit positivus, necessario etiam n fieri positivum; porro esse $m+n=\mu+\nu-2$. Observo, quoties m, n sint positivi, coëfficientes expressionis primae fieri series infinitas, secundae finitas; quoties m, n alter positivus, alter negativus, et primae et secundae expressionis coëfficientes fieri series finitas; quoties m, n negativi, primae fieri finitas, secundae series infinitas. Unde omnibus casibus hoc theoremate sive serierum infinitarum summationem, sive finitarum transformationem obtines.

Corollarium.

Evolvamus ipsum coëfficientem termini $\frac{1}{x^\mu y^\nu}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}(b'y+a'x)^{n+1}},$$

qui posito $\mu=m+1+\lambda$, $\nu=n+1-\lambda$, idem est atque coëfficiens termini $\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$ in expressione

$$\frac{1}{a^{m+1}b'^{n+1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{x}\right)^{m+1}\left(1+\frac{a'}{b'}\cdot\frac{x}{y}\right)^{n+1}}.$$

Quem coëfficientem, posito $\frac{ba'}{ab'}=u$, atque insuper

$$A=\frac{(m+1)(m+2)\dots.(m+\lambda)}{1.2\dots.\lambda}\cdot\frac{b^\lambda}{a^{m+1+\lambda}b'^{n+1}},$$

invenimus

$$(-1)^\lambda A\left(1+\frac{(m+\lambda+1)(n+1)}{\lambda+1.1}u+\frac{(m+\lambda+1)(m+\lambda+2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}u^2+\dots.\right).$$

Quaeramus porro coëfficientem termini $t^m t'^n$ in expressione

$$\frac{(b't-bt')^{\mu-1}(at'-a't)^{\nu-1}}{(ab'-a'b)^{\mu+\nu-1}}=\frac{(b't-bt')^{m+\lambda}(at'-a't)^{n-\lambda}}{(ab'-a'b)^{m+n+1}},$$

sive quod idem est, coëfficientem termini $\left(\frac{t'}{t}\right)^\lambda$ in expressione

fit $$\frac{1}{a^{m+\lambda+1}b'^{n-\lambda+1}(1-u)^{m+n+1}}\cdot\left(1-\frac{b}{b}\cdot\frac{t'}{t}\right)^{m+\lambda}\left(1-\frac{a'}{a}\cdot\frac{t}{t'}\right)^{n-\lambda},$$

Item, rursus posito

$$A=\frac{(m+\lambda)(m+\lambda-1)\dots.(m+1)}{1.2\dots.\lambda}\cdot\frac{b^\lambda}{a^{m+1+\lambda}b'^{n+1}},$$

ista evolutione, invenimus

$$\frac{(-1)^\lambda A}{(1-u)^{m+n+1}}\left(1+\frac{m(n-\lambda)}{\lambda+1}u+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}u^2+\dots.\right).$$

Unde cum e theoremate 2. utrique coëfficientes inter se aequales sint, posito

$$m+\lambda+1=\alpha,\quad n+1=\beta,\quad \lambda+1=\gamma,\quad m=-\alpha',\quad \lambda-n=\beta',$$

eruimus formulam:

$$5)\quad 1+\frac{\alpha\beta}{r}u+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}u^3+\dots=$$
$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma}}\left(1+\frac{\alpha'\beta'}{\gamma}u+\frac{\alpha'(\alpha'+1).\beta'(\beta'+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}u^2+\frac{\alpha'(\alpha'+1)(\alpha'+2).\beta'(\beta'+1)(\beta'+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}u^3+\dots\right),$$

qua in formula $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma$. Quam olim Eulerus dedit.

6.

Similia de tribus variabilibus, tribusque factoribus inveniuntur sequenti modo. E formula 1) paragraphi antecedentis facile constat, fieri etiam:

$$1)\quad \frac{1}{E+m(A-B)+n(C-D)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{C-D}+\frac{1}{D-C}\right)$$
$$=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{C-D}+\frac{1}{D-C}\right),$$

porro:

$$2)\quad \frac{1}{C+m(A-B)}\cdot\frac{1}{D+n(A-B)}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right)=\frac{1}{CD}\left(\frac{1}{A-B}+\frac{1}{B-A}\right),$$

quas formulas ut lemmata antemittamus.

Jam e 2) paragraphi antecedentis, mutatis t, t' in $t-cz$, $t'-c'z$, obtines:

$$(ab')\left(\frac{1}{ax+by+cz-t}+\frac{1}{t-ax-by-cz}\right)\left(\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-c'z-a'x}\right)=$$
$$\left(\frac{(ab')}{(ab')x-(bc')z-b't+bt'}+\frac{(ab')}{b't-bt'-(ab')x+(bc')z}\right).$$
$$\left(\frac{(ab')}{(ab')y-(ca')z-at'+a't}+\frac{(ab')}{at'-a't-(ab')y+(ca')z}\right).$$

Ducatur haec aequatio in expressionem:

$$\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''}+\frac{1}{t''-c''z-a''x-b''y}.$$

Fit autem

$$(ab')(c''z+a''x+b''y-t'')=(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b\dots$$
$$+a''((ab')x-(bc')z-b't+bt')$$
$$+b''((ab')y-(ca')z-at'+a't)$$

unde videmus, advocato lemmate 1), loco tertii factoris adiecti in alt[era] aequationis parte adhiberi posse sequentem:

$$\frac{(ab')}{(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}+\frac{(ab')}{(ab')t''+(a'b'')t+(a''b)t'-(a'b''c\dots}\ \dots ri$$

Fit porro:

$$(ab'c'')[(ab')x-(bc')z-b't+bt'] =$$
$$(ab')[(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t''] -$$
$$(bc')[(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'],$$
$$(ab'c'')[(ab')y-(ca')z-at'+a't] =$$
$$(ab')[(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t] -$$
$$(ca')[(ab'c'')z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'].$$

Unde advocato lemmate 2), videmus post mutationem tertii factoris pro duobus primis factoribus, adhiberi posse hos:

$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab')[(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(bc')t'']}+\frac{(ab'c'')}{(ab')[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t''-(ab'c'')x]}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab')[(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t]}+\frac{(ab'c'')}{(ab')[(c''a)t'+(ca')t''+(c'a'')t-(ab'c'')y]}\right).$$

Hinc tandem aequatio nostra in hanc abit:

$$3)\quad (ab'c'')\left(\frac{1}{ax+by+cz-t}+\frac{1}{t-ax-by-cz}\right).$$
$$\left(\frac{1}{b'y+c'z+a'x-t'}+\frac{1}{t'-b'y-c'z-a'x}\right).$$
$$\left(\frac{1}{c''z+a''x+b''y-t''}+\frac{1}{t''-c''z-a''x-b''y}\right) =$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')x-(b'c'')t-(b''c)t'-(b \ldots}+\frac{(ab'c'')}{(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t''-(ab'c'')x}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{(ab'c'')y-(c''a)t'-(ca')t''-(c'a'')t}+\frac{(ab'c'')}{(c'a)t'+(ca')t''+(c'a'' \ldots y}\right).$$
$$\left(\frac{(ab'c'')}{\ldots z-(ab')t''-(a'b'')t-(a''b)t'}+\frac{(ab'c'')}{(ab')t''+(a'b)t+(a'' \ldots z}\right).$$

... sitis, ut supra:

U... $a''x+by+cz=u$, ... $x+b'y+c'z=u'$, ... $b''y+c'' \ldots z,$

atis $=t$, nt $x=p$, ... r aequationibus $u=t$, $u'=t'$, ... $u''=t''$;

ui... et ...ositis, for... us ita exhibere li...

si $\quad (ab'c'')\left(\frac{1}{u-\ldots}\ldots+\frac{1}{t'-u'}\right)\left(\frac{1}{u''-t}\ldots+\frac{1}{t''-u''}\right) =$

fi $\quad \left(\frac{1}{x-p}\ldots\frac{1}{y-q}\right)\left(\frac{1}{z-r}+\frac{1}{r-z}\right),$

...dem adnotatur, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{w}$, ... e dignitates respectivas ad descen-

...s ipsarum x, y, z, porro ... earumque dignitates ad descenden-

...rum t, t', t'' dignita... ...das esse.

Ubi in formula 4) eas tantum partes consideras, quae nonnisi po-
sitivas dignitates ipsarum t, t', t'' continent, fit

$$5)\quad \frac{(ab'c'')}{(u-t)(u'-t')(u''-t'')} =$$

$$\frac{1}{(x-p)(y-q)(z-r)} + \frac{1}{(p-x)(y-q)(z-r)} + \frac{1}{(x-p)(q-y)(z-r)} + \frac{1}{(x-p)(y-q)(r-z)}$$
$$+ \frac{1}{(x-p)(q-y)(r-z)} + \frac{1}{(p-x)(y-q)(r-z)} + \frac{1}{(p-x)(q-y)(z-r)}$$

siquidem in hisce expressionibus, dictum in modum evolutis, reiiciuntur termini, qui negativas ipsarum t, t', t'' dignitates continent. Quae est repraesentatio nova septem partium, in quas expressio

$$\frac{(ab'c'')}{(u-t)(u'-t')(u''-t'')}$$

discerpitur. Cuius e. g. pars ea, quae nonnisi negativas dignitates omnium x, y, z continet, fit

$$\frac{1}{(x-p)(y-\ldots)\ldots r)},$$

sicuti invenimus formula 7) §. 3.

Formulam 3) etiam hunc in modum ...

$$6)\quad \Sigma \frac{t^m t'^n \ldots}{(ax+by+cz)^{m+1}(b'y+c'z+a'x\ldots)\ldots} =$$
$$\Sigma \frac{[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t'']^{\mu-1}[(c''a)t'\ldots a')t''\ldots'')t]^{\nu\ldots}}{(ab'\ldots)\ldots u\ldots y^{\nu}\ldots z^{\pi}}$$

siqui... mmis d... ignatis numeris integris m, ... π ... vam fo... tribuu... ositivi ... negativi omnes a ... et ut lam et ... onere...

Theorema 3.

... n, p numeros integ... uoslibet si... positivos

D... expressione ... dem in ... sive nega... $\frac{1}{\ldots^{m+1}(b'\ldots c'z+a'\ldots}$ ... ntur et ... iam ...

$\frac{1}{u}$ ... aequal... enti termino $t^m t' \ldots t''^p$

coëfficientem ...

in expressione ... $\frac{[(b'c'')t+(b''c)t'+(bc')t'']^{\ldots}[(c''a)\ldots+(\ldots}{(ab'\ldots}$ ... $[(ab'c''+(a''b')t+(\ldots$

... negativi, respec...

Adnotare convenit, quoties ... ν, π sint positivi, ... μ, ν, π negativos fore, et vice versa ... esse $m+n+p=$ ... etiam m, n, p respective positivos fo...

Omnino similia theoremata de numero quolibet variabilium, quae proposuimus, eruuntur.

7.

Commodam hoc loco inserere licet observationem. Consideremus pressionem:

$$(at+a't'+a''t'')^m(bt+b't'+b''t'')^n(ct+c't'+c''t'')^p.$$

umerum factorum et variabilium eundem esse statuimus, qui in casu oposito est tres; eadem autem de numero alio quolibet valebunt. Statamus porro, m, n, p esse integros positivos. Posito $\Pi x = 1.2.3\ldots.x$, nstat per regulas notas evolutionis polynomii, expressione illa evoluta, re coëfficientem termini $t^\mu t'^\nu t''^\pi$:

$$\frac{\Pi m\,\Pi n\,\Pi p}{\Pi\alpha\,\Pi\alpha'\,\Pi\alpha''.\Pi\beta\,\Pi\beta'\,\Pi\beta''.\Pi\gamma\,\Pi\gamma'\,\Pi\gamma''}.a^\alpha a'^{\alpha'} a''^{\alpha''}.b^\beta b'^{\beta'} b''^{\beta''}.c^\gamma c'^{\gamma'} c''^{\gamma''},$$

quidem numeris integris positivis α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' valos tribuuntur omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

$$\alpha+\alpha'+\alpha''=m,\quad \beta+\beta'+\beta''=n,\quad \gamma+\gamma'+\gamma''=p,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=\mu,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=\nu,\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=\pi.$$

sdem positis, evoluta expressione

$$(at+bt'+ct'')^\mu(a't+b't'+c't'')^\nu(a''t+b''t'+c''t'')^\pi,$$

anciscimur ut coëfficientem termini $t^m t'^n t''^p$ expressionem

$$\frac{\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi}{\Pi\alpha\,\Pi\beta\,\Pi\gamma.\Pi\alpha'\,\Pi\beta'\,\Pi\gamma'.\Pi\alpha''\,\Pi\beta''\,\Pi\gamma''}.a^\alpha b^\beta c^\gamma.a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'}.a''^{\alpha''} b''^{\beta''} c''^{\gamma''}.$$

Qua cum priore comparata, invenitur, coëfficientes illos omnino er se convenire, nisi quod loco $\Pi m\,\Pi n\,\Pi p$ in altero inveniatur $\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi$. Jnde videmus, utrumque coëfficientem esse inter se ut $\Pi m\,\Pi n\,\Pi p$ ad $\Pi\mu\,\Pi\nu\,\Pi\pi$.

Ponamus iam, ipsis m, n, p valores quoslibet tribui, et evolvamus expressionem

$$(at+a't'+a''t'')^m(b't'+bt+b''t'')^n(c''t''+ct+c't')^p$$

ad descendentes dignitates ipsorum a, b', c'', sive quod idem est, factorem primum, secundum, tertium respective ad descendentes dignitates ipsorum t, t', t''. Quaeramus coëfficientem termini $t^\mu t'^\nu t''^\pi$, qui, ut omnino in evolutione illa inveniatur, sint $m-\mu$, $n-\nu$, $p-\pi$ numeri integri sive positivi sive negativi, necesse est. Adhibebo in sequentibus signum $\frac{\Pi m}{\Pi\mu}$ etiam casu, quo m, μ sunt quantitates quaelibet, quarum tamen

differentia est numerus integer, pro exprimendo producto $m(m-1)(m-2)\ldots$ $\ldots(\mu+1)$, quoties $m-\mu$ est positivum, sive $\frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots\mu}$, quoties $\mu-m$ positivum est. Patet, si $m-u=\mu-v$, fore etiam

$$1)\quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-u)}{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-v)}=\frac{\Pi m}{\Pi n}.$$

Jam per regulas notas nanciscimur ut coëfficientem quaesitum in evolutione proposita expressionem:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m+1-\alpha-\alpha')}{\Pi\alpha\,\Pi\alpha'}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n+1-\beta-\beta')}{\Pi\beta\,\Pi\beta'}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p+1-\gamma-\gamma')}{\Pi\gamma\,\Pi\gamma'}$$
$$a^{m-\alpha-\alpha'}a'^{\alpha}a''^{\alpha'}\cdot b'^{n-\beta-\beta'}b''^{\beta}b^{\beta'}\cdot c''^{p-\gamma-\gamma'}c^{\gamma}c'^{\gamma'},$$

siquidem numeris integris positivis α, α', β, β', γ, γ' tribuimus valores omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

2) $m-\alpha-\alpha'+\beta'+\gamma=\mu$, $n-\beta-\beta'+\gamma'+\alpha=\nu$, $p-\gamma-\gamma'+\alpha'+\beta=\pi$.

Modo simili, evoluta expressione

$$(at+bt'+ct'')^{\mu}(b't'+c't''+a't)^{\nu}(c''t''+a''t+b''t')^{\pi}$$

nanciscimur ut coëfficientem termini $t^{\mu}t'^{\nu}t''^{\pi}$ expressionem:

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu+1-\beta'-\gamma)}{\Pi\beta'\,\Pi\gamma}\cdot\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu+1-\gamma'-\alpha)}{\Pi\gamma'\,\Pi\alpha}\cdot\frac{\pi(\pi-1)\ldots(\pi+1-\alpha'-\beta)}{\Pi\alpha'\,\Pi\beta}$$
$$a^{\mu-\beta'-\gamma}b^{\beta}c^{\gamma}\cdot b'^{\nu-\gamma'-\alpha}c'^{\gamma'}a'^{\alpha}\cdot c''^{\pi-\alpha'-\beta}a''^{\alpha'}b''^{\beta},$$

designantibus α, α', β, β', γ, γ' numeros integros positivos omnes, qui satisfaciunt aequationibus:

$\mu-\beta'-\gamma+\alpha+\alpha'=m$, $\nu-\gamma'-\alpha+\beta+\beta'=n$, $\pi-\alpha'-\beta+\gamma+\gamma'=p$,

quae omnino eaedem sunt atque aequationes 2). Unde cum ex iisdem sit $\mu-\beta'-\gamma=m-\alpha-\alpha'$, $\nu-\gamma'-\alpha=n-\beta-\beta'$, $\pi-\alpha'-\beta=p-\gamma-\gamma'$, utroque coëfficiente inter se comparato, videmus alterum ad alterum esse ut

$$1 \text{ ad } \frac{\Pi\mu}{\Pi m}\cdot\frac{\Pi\nu}{\Pi n}\cdot\frac{\Pi\pi}{\Pi p}.$$

Quaecum eodem modo se habeant de numero quolibet variabilium, nanciscimur

Theorema 4.

Sint m, n, p, ... quantitates quaelibet, $m-\mu$, $n-\nu$, $p-\pi$, ... numeri integri positivi vel negativi, porro $m+n+p+\ldots=\mu+\nu+\pi\ldots$; expressionibus

$$(at+a't'+a''t''+\ldots)^{m}(b't'+bt+b''t''+\ldots)^{n}(c''t''+ct+c't'+\ldots)^{p}\ldots,$$
$$(at+bt'+ct''+\ldots)^{\mu}(b't'+a't+c't''+\ldots)^{\nu}(c''t''+a''t+b''t'+\ldots)^{\pi}\ldots,$$

in quibus supponimus eundem esse numerum factorum et variabilium $t, t', t'', \dots$, ad dignitates descendentes ipsarum $a, b', c'', \dots$, sive quod idem est, factoribus earum primo, secundo, tertio, etc. respective ad dignitates descendentes ipsarum $t, t', t'', \dots$ evolutis, coëfficiens termini $t^{\mu} t'^{\nu} t''^{\pi} \dots$ in priore fit ad coëfficientem termini $t^{m} t'^{n} t''^{p} \dots$ in posteriore ut

$$1 \text{ ad } \frac{\Pi\mu}{\Pi m} \cdot \frac{\Pi\nu}{\Pi n} \cdot \frac{\Pi\pi}{\Pi p} \cdots$$

8.

E theoremate 4) modo proposito, theoremata 2), 3), ubi insuper loco $t, t', t'', \dots$ ponitur x, y, z, in sequentia abeunt:

Theorema 5.

Coëfficiens termini $\frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b'y+a'x)^{n+1}}$$

aequalis est ipsi

$$\frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi m} \cdot \frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi n} \cdot \frac{1}{(ab'-a'b)^{m+n+1}}$$

ducto in coëfficientem termini $x^{\mu-1} y^{\nu-1}$ expressionis

$$(b'x-a'y)^{m}(ay-bx)^{n}.$$

Theorema 6.

Coëfficiens termini $\frac{1}{x^{\mu} y^{\nu} z^{\pi}}$ in expressione

$$\frac{1}{(ax+by+cz)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b'y+c'z+a'x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(c''z+a''x+b''y)^{p+1}}$$

aequalis est ipsi

$$\frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi m} \cdot \frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi n} \cdot \frac{\Pi(\pi-1)}{\Pi p} \cdot \frac{1}{(ab'c'')^{m+n+p+1}},$$

ducto in coëfficientem termini $x^{\mu-1} y^{\nu-1} z^{\pi-1}$ expressionis

$$[(b'c'')x+(c'a'')y+(a'b'')z]^{m}\,[(c''a)y+(a''b)z+(b''c)x]^{n}\,[(ab')z+(bc')x+(ca')y]^{p}.$$

Corollarium.

Designemus coëfficientem termini $\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}$ in expressione

$$\frac{1}{\left[\left(a+b\cdot\frac{y}{x}\right)\left(b'+a'\frac{x}{y}\right)\right]^{n+1}}$$

per P_{λ}; porro coëfficientem termini $\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}$ in expressione

$$\left[\left(b'-a'.\frac{y}{x}\right)\left(a-b\,\frac{x}{y}\right)\right]^n$$

per Q_λ; ubi in theoremate 5) ponimus $m=n$, $\mu=n+1+\lambda$, $\nu=n+1-\lambda$, videmus fieri

$$1)\quad P_\lambda=\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,.\,\Pi n\,.\,(ab')^{2n+1}}\,Q_\lambda.$$

Porro posito $\frac{y}{x}=\epsilon^{i\varphi}$, $a=b'=1$, $b=a'=-\alpha$, ubi supponimus $\alpha<1$, facile constat, esse:

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}}=P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos2\varphi+\ldots.+2P_\lambda\cos\lambda\varphi+\ldots.$$

$$(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n\;=Q_0+2Q_1\cos\varphi+2Q_2\cos2\varphi+\ldots.+2Q_\lambda\cos\lambda\varphi+\ldots.$$

Unde e notissimis calculi integralis praeceptis:

$$P_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\partial\varphi\,.\cos\lambda\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}},$$

$$Q_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\partial\varphi(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n\cos\lambda\varphi.$$

Quibus substitutis in aequationem 1), obtinemus:

$$2)\int_0^\pi\frac{\partial\varphi\,.\cos\lambda\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^{n+1}}=\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{\Pi n\,\Pi n}\int_0^\pi\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi\,(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha\alpha)^n}{(1-\alpha\alpha)^{2n+1}}.$$

Quae olim ab Eulero inventa est formula.

30.

Über die Relationen der Functionen, welche der Gleichung $F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x \dots + F_n y . \varphi_n x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y \dots + F_n x . \varphi_n y$ genugthun.

(Von Herrn *L. J. Magnus* zu Berlin.)

In der 41. Abhandlung des 2. Bandes dieses Journals hat Herr Abel, indem er die Functionen bestimmte, welche der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$ genugthun, ein Verfahren angegeben, wie man in jeder Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröſsen die unbekannten Functionen finden kann. Dieses Verfahren ist in der That allgemein anwendbar, aber man wird zugeben, daſs es auf sehr ermüdende Rechnungen führen kann, wenn die gegebene Gleichung eine gröſsere Anzahl unbekannter Functionen enthält. Ich will in dem Folgenden einige Gleichungen aufstellen, welche dazu dienen können, die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe in den meisten Fällen bedeutend zu erleichtern. Diese Gleichungen haben mit denen, welche Herr Professor Jacobi in seiner schönen Abhandlung über die Pfaffsche Integrations-Methode, ebenfalls im zweiten Bande dieses Journals mitgetheilt hat, eine auffallende Ähnlichkeit.

1.

Es sei

$$1)\quad F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + F_3 y . \varphi_3 x + \dots + F_n y . \varphi_n x$$
$$= F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + F_3 x . \varphi_3 y + \dots + F_n x . \varphi_n y$$

eine gegebene symmetrische Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröſsen x und y. Wir wollen diejenigen Relationen zwischen den Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ und $F_1, F_2, \dots F_n$ suchen, welche statt finden müssen, damit diese Gleichung bestehen kann. Das nächste Mittel zur Lösung, welches sich darbietet, besteht darin, die Gleichung in n zweigliedrige Gleichungen zu theilen, in welchen sich die Variabeln separiren lassen. Man könnte z. B.

$$F_1 y . \varphi_1 x = F_1 x . \varphi_1 y;\ F_2 y . \varphi_2 x = F_2 x . \varphi_2 y;\ \dots\ F_n y . \varphi_n x = F_n x . \varphi_n y$$

setzen, und aus diesen würde man durch Division

$$\frac{\varphi_1 x}{F_1 x} = \frac{\varphi_1 y}{F_1 y}; \quad \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{\varphi_2 y}{F_2 y}; \quad \ldots . \quad \frac{\varphi_n x}{F_n x} = \frac{\varphi_n y}{F_n y}$$

erhalten, welche Gleichungen wegen der Unabhängigkeit von x und y nur Statt haben können, wenn

$$\frac{\varphi_1 x}{F_1 x} = c'; \quad \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = c''; \quad \ldots . \quad \frac{\varphi_n x}{F_n x} = c^{(n)}$$

ist, wo c', c'', ... $c^{(n)}$ n willkürliche Constanten bedeuten. Diese Lösung ist aber nur eine singuläre, und da wir noch nicht wissen, aus wie vielen Gleichungen die vollständige Lösung besteht, und wie viele willkürliche Constanten dazu gehören, so bleibt uns nichts übrig als von dem Falle einer zweigliedrigen Gleichung

$$2. \quad F_1 y.\varphi_1 x = F_1 x.\varphi_1 y,$$

deren vollständige Lösung durch

$$3. \quad \varphi_1 x = c_1 F_1 x$$

ausgedrückt wird, zu dem Falle einer viergliedrigen fortzugehen.

2.

Dividirt man die viergliedrige Gleichung

$$4. \quad F_1 y.\varphi_1 x + F_2 y.\varphi_2 x = F_1 x.\varphi_1 y + F_2 x.\varphi_2 y$$

durch $F_2 y.F_2 x$, so kommt:

$$\frac{F_1 y}{F_2 y}\cdot\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} + \frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{F_1 x}{F_2 x}\cdot\frac{\varphi_1 y}{F_2 y} + \frac{\varphi_2 y}{F_2 y},$$

und differentiirt man nun nach x, so erhält man:

$$\frac{F_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} + \partial\frac{\varphi_2 x}{F_2 x} = \frac{\varphi_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{F_1 x}{F_2 x};$$

diese Gleichung aber nach y differentiirt, giebt:

$$\partial\frac{F_1 y}{F_2 y}\,\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = \partial\frac{F_1 x}{F_2 x}\,\partial\frac{\varphi_1 y}{F_2 y},$$

wo, der Kürze wegen, die Differential-Coëfficienten $\dfrac{\partial\frac{F_1 x}{F_2 x}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\frac{F_1 y}{F_2 y}}{\partial y}$, mit i... durch $\partial\frac{F_1 x}{F_2 x}$, $\partial\frac{F_1 y}{F_2 y}$ etc. bezeichnet sind. Die zuletzt erhaltene Gleichung ist aber nur zweigliedrig und hat die Form (2.); daher ist

$$\partial\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = c_1\,\partial\frac{F_1 x}{F_2 x},$$

und durch Integration ergiebt sich

$$\frac{\varphi_1 x}{F_2 x} = c_1\frac{F_1 x}{F_2 x} + c_{1,2} \quad \text{oder} \quad \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x,$$

wo wir der, durch die Integration hinzugekommenen Constante einen

doppelten Index geben. Setzt man für $\varphi_1 x$ den eben gefundenen Werth, und für $\varphi_1 y$ den entsprechenden, nämlich $c_1 F_1 + c_{1,2} F_2 y$, so verwandelt sich die Gleichung (4.) in

$$c_{1,2} F_1 y . F_2 x + F_2 y . \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x . F_2 y + F_2 x . \varphi_2 y,$$

oder in

$$F_2 y [\varphi_2 x - c_{1,2} F_1 x] = F_2 x [\varphi_2 y - c_{1,2} F_1 y],$$

wiederum eine zweigliedrige Gleichung von der Form (2.), aus welcher also

$$\varphi_2 x - c_{1,2} F_1 x = c_2 F_2 x$$

folgt. Man hat daher zur vollständigen Lösung der Gleichung (4.) das System der beiden Gleichungen:

$$5. \quad \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x. \end{cases}$$

3.

Dividirt man die sechsgliedrige Gleichung

$$6. \quad F_1 y . \varphi_1 x + F_2 y . \varphi_2 x + F_3 y . \varphi_3 x = F_1 x . \varphi_1 y + F_2 x . \varphi_2 y + F_3 x . \varphi_3 y$$

durch $F_3 x F_3 y$, so kommt:

$$\frac{F_1 y}{F_3 y} . \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} + \frac{F_2 y}{F_3 y} . \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} + \frac{\varphi_3 x}{F_3 x} = \frac{F_1 x}{F_3 x} . \frac{\varphi_1 y}{F_3 y} + \frac{F_2 x}{F_3 x} . \frac{\varphi_2 y}{F_3 y} + \frac{\varphi_3 y}{F_3 y},$$

und differentiirt man diese Gleichung nach einander nach x und nach y, so ergiebt sich

$$\partial \frac{F_1 y}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} + \partial \frac{F_2 y}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} \partial \frac{\varphi_1 y}{F_3 y} + \partial \frac{F_2 x}{F_3 y} \partial \frac{\varphi_2 y}{F_3 y}.$$

Dieses ist eine viergliedrige Gleichung von der Form (4.), daher ist nach den Gleichungen (5.):

$$\partial \frac{\varphi_1 x}{F_3 x} = c_1 \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_{1,2} \partial \frac{F_2 x}{F_3 x},$$

$$\partial \frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = c_{1,2} \partial \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_2 \partial \frac{F_2 x}{F_3 x},$$

wenn man integrirt:

$$\frac{\varphi_1 x}{F_3 x} = c_1 \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_{1,2} \frac{F_2 x}{F_3 x} + c_{1,3},$$

$$\frac{\varphi_2 x}{F_3 x} = c_{1,2} \frac{F_1 x}{F_3 x} + c_2 \frac{F_2 x}{F_3 x} + c_{2,3},$$

oder

$$\varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x,$$

$$\varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x.$$

Setzt man diese Werthe für φ_1 und φ_2 in die Gleichung (6.), so ergiebt sich:

$$c_{1,3}F_1y.F_3x+c_{2,3}F_2y.F_3x+F_3y.\varphi_3x=c_{1,3}F_1x.F_3y+c_{2,3}F_2x.F_3y+F_3x.\varphi_3y$$

oder

$$F_3y.[\varphi_3x-c_{1,3}F_1x-c_{2,3}F_2x] = F_3x.[\varphi_3y-c_{1,3}F_1y-c_{2,3}F_2y],$$

eine zweigliedrige Gleichung, aus welcher

$$\varphi_3x-c_{1,3}F_1x-c_{2,3}F_2x = c_3F_3x$$

folgt. Die vollständige Lösung der Gleichung (6.) besteht also in dem Systeme der 3 Gleichungen

$$7.\quad \begin{cases} \varphi_1x = c_1F_1x+c_{1,2}F_2x+c_{1,3}F_3x, \\ \varphi_2x = c_{1,2}F_1x+c_2F_2x+c_{2,3}F_3x, \\ \varphi_3x = c_{1,3}F_1x+c_{2,3}F_2x+c_3F_3x. \end{cases}$$

4.

Dividirt man die achtgliedrige Gleichung

$$8.\quad F_1y.\varphi_1x+F_2y.\varphi_2x+F_3y.\varphi_3x+F_4y.\varphi_4x$$
$$= F_1x.\varphi_1y+F_2x.\varphi_2y+F_3x.\varphi_3y+F_4x.\varphi_4y$$

durch F_4xF_4y und differentiirt das Resultat nach einander nach x und nach y, so erhält man eine sechsgliedrige Gleichung von der Form (6.), und daraus die Werthe von $\partial\frac{\varphi_1x}{F_4x}$, $\partial\frac{\varphi_2x}{F_4x}$, $\partial\frac{\varphi_3x}{F_4x}$, welche integrirt, geben:

$$\begin{aligned} \varphi_1x &= c_1F_1x+c_{1,2}F_2x+c_{1,3}F_3x+c_{1,4}F_4x, \\ \varphi_2x &= c_{1,2}F_1x+c_2F_2x+c_{2,3}F_3x+c_{2,4}F_4x, \\ \varphi_3x &= c_{1,3}F_1x+c_{2,3}F_2x+c_3F_3x+c_{3,4}F_4x, \end{aligned}$$

wo $c_{1,4}$, $c_{2,4}$, $c_{3,4}$ die durch die letzte Integration hinzugekommenen Constanten bedeuten. Substituirt man diese Werthe für φ_1, φ_2; φ_3 in die Gleichung (8.), so ergiebt sich die zweigliedrige Gleichung

$$F_4y.[\varphi_4x-c_{1,4}F_1x-c_{2,4}F_2x-c_{3,4}F_3x]$$
$$= F_4x.[\varphi_4y-c_{1,4}F_1y-c_{2,4}F_2y-c_{3,4}F_3y],$$

aus welcher

$$\varphi_4x-c_{1,4}F_1x-c_{2,4}F_2x-c_{3,4}F_3x = c_4F_4x$$

folgt, und die vollständige Lösung der Gleichung (8.) besteht somit dem System der 4 Gleichungen:

$$9.\quad \begin{cases} \varphi_1x = c_1F_1x+c_{1,2}F_2x+c_{1,3}F_3x+c_{1,4}F_4x, \\ \varphi_2x = c_{1,2}F_1x+c_2F_2x+c_{2,3}F_3x+c_{2,4}F_4x, \\ \varphi_3x = c_{1,3}F_1x+c_{2,3}F_2x+c_3F_3x+c_{3,4}F_4x, \\ \varphi_4x = c_{1,4}F_1x+c_{2,4}F_2x+c_{3,4}F_3x+c_4F_4x, \end{cases}$$

Ohne Gleichungen mit noch mehreren Gliedern vorzunehmen, sieht man jetzt deutlich, daſs die vollständige Lösung der Gleichung (1.) von $2n$ Gliedern in einem Systeme von n Gleichungen, nämlich:

$$B.\ \begin{cases} \varphi_1 x = c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3} F_3 x + c_{1,4} F_4 x + \ldots + c_{1,n} F_n x, \\ \varphi_2 x = c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3} F_3 x + c_{2,4} F_4 x + \ldots + c_{2,n} F_n x, \\ \varphi_3 x = c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3 F_3 x + c_{3,4} F_4 x + \ldots + c_{3,n} F_n x, \\ \varphi_4 x = c_{1,4} F_1 x + c_{2,4} F_2 x + c_{3,4} F_3 x + c_4 F_4 x + \ldots + c_{4,n} F_n x, \\ \vdots \\ \varphi_n x = c_{1,n} F_1 x + c_{2,n} F_2 x + c_{3,n} F_3 x + c_{4,n} F_4 x + \ldots + c_n F_n x, \end{cases}$$

bestehen mufs; und die Vervollständigung des Beweises für die Richtigkeit des Gesetzes dadurch, dafs man zeigt, es müsse dasselbe für eine Gleichung der angegebenen Form von $2n$ Gliedern Statt finden, wenn es für eine solche Gleichung von $2(n-1)$ Gliedern gilt, hat keine weitere Schwierigkeit.

Jede einzelne Gleichung des Systems (*B.*) enthält n von einander unabhängige Constanten; das ganze System aber enthält deren in allem $\frac{n(n+1)}{2}$. Die Horizontalreihen, welche von diesen Constanten gebildet werden, sind den von ihnen formirten Verticalreihen gleich, und die nur einmal vorkommenden Constanten machen daher eine Diagonalreihe aus.

Es ist fast überflüssig zu bemerken, dafs unsere Lösung auch für den Fall pafst, wenn die gegebene Gleichung Glieder ohne x und ohne y enthält, wie z. B. die Gleichung

$$F_1 y.\varphi_1 x + F_2 y.\varphi_2 x + \varphi_3 x = F_1 x.\varphi_1 y + F_2 x.\varphi_2 y + \varphi_3 y.$$

Denn diese Gleichung entsteht aus der Gleichung (6.), wenn man darin $F_3 x = F_3 y = 1$ setzt, und durch dieselbe Substitution verwandeln sich die Gleichungen (7.) in

$$\begin{aligned} \varphi_1 x &= c_1 F_1 x + c_{1,2} F_2 x + c_{1,3}, \\ \varphi_2 x &= c_{1,2} F_1 x + c_2 F_2 x + c_{2,3}, \\ \varphi_3 x &= c_{1,3} F_1 x + c_{2,3} F_2 x + c_3. \end{aligned}$$

5.

Wir wollen jetzt einige Anwendungen der aufgestellten Gleichungen zeigen.

1. Es seien zuerst die Functionen ψ, f_1 und f_2 zu bestimmen, welche der Gleichung

$$10.\quad \psi(x+y) = f_1 y . f_2 x + f_2 y . f_1 x$$

genugthun.

Differentiirt man diese Gleichung sowohl nach x als nach y, so erhält man, die Differential-Coëfficienten von ψ, f_1 und f_2 durch ψ', f_1', f_2' bezeichnend:

$$\psi'(x+y) = f_1 y f_2' x + f_2 y f_1' x,$$
$$\psi'(x+y) = f_1' y f_2 x + f_2' y f_1 x,$$

und wenn man $\psi'(x+y)$ eliminirt,

$$f_1 y . f_2' x + f_2 y . f_1' x = f_1 x . f_2' y + f_2 x . f_1' y$$

eine viergliedrige Gleichung von der Form (1.). Sollen nun die Gröfsen x und y von einander unabhängig sein, so müssen die Gleichungen (5.) Statt finden, und wenn man, um diese auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, für φ_1, φ_2, F_1 und F_2 respective f_2', f_1', f_1 und f_2 setzt, und, der Leichtigkeit wegen, c_1, $c_{1,2}$, c_2 mit a^2, b^2, c^2 vertauscht, so hat man unmittelbar:

$$f_2' x = a^2 f_1 x + b^2 f_2 x,$$
$$f_1' x = b^2 f_1 x + c^2 f_2 x:$$

zwei gleichzeitige Differential-Gleichungen, welche hinreichend sind, die Functionen f_1 und f_2 zu bestimmen. Führt man die Integration nach der bekannten Methode aus, so ergiebt sich

$$11. \quad \begin{cases} f_1 x = \quad h e^{m_1 x} + k e^{m_2 x} \\ f_2 x = \alpha [h e^{m_1 x} - k e^{m_2 x}], \end{cases}$$

wenn wir nämlich $b^2 + ac$ durch m_1, $b^2 - ac$ durch m_2, $\frac{a}{c}$ durch α und zwei neue Constanten durch h und k bezeichnen.

Setzt man, um ψ zu bestimmen, in (10.) $y = 0$, so kommt

$$\psi(x) = f_1(0) f_2 x + f_2(0) f_1 x,$$

und da aus (11.) $f_1(0) = h + k$ und $f_2 0 = \alpha(h - k)$ folgt, so ist

$$12. \quad \psi(x) = 2\alpha [h^2 e^{m_1 x} - k^2 e^{m_2 x}].$$

2. Es seien ferner die Functionen f_1, f_2 und ψ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$13. \quad \psi(x+y) = f_1 y f_1 x + f_2 y f_2 x$$

genugthun.

Differentiirt man und eliminirt $\psi'(x+y)$, so erhält man

$$f_1 y . f_1' x + f_2 y . f_2' x = f_1 x . f_1' y + f_2 x . f_2' y,$$

und unsere Gleichungen (5.) geben, auf den gegenwärtigen Fall angewendet, unmittelbar:

$$f_1' x = a f_1 x + b f_2 x,$$
$$f_2' x = b f_1 x + c f_2 x,$$

wenn man statt c_1, $c_{1,2}$, c_2 die Buchstaben a, b, c schreibt. Die Integration dieser beiden gleichzeitigen Differentialgleichungen giebt

$$14. \quad \begin{cases} f_1 x = h e^{m_1 x} + k e^{m_2 x}, \\ f_2 x = \alpha h e^{m_1 x} + \frac{1}{\alpha} k e^{m_2 x}, \end{cases}$$

wo α eine Wurzel der Gleichung $b\alpha^2 + (a+c)\alpha - b = 0$, m_1 und m_2 die Werthe des Ausdrucks $a + b\alpha$ bezeichnen, die man erhält, wenn diese und die andere Wurzel jener Gleichung für α gesetzt werden, und wo h und k zwei neue Constanten bedeuten. Aus (13. u. 14.) findet man:

$$15. \quad \psi(x) = (1+\alpha^2)\left(h^2 e^{m_1 x} + \frac{1}{\alpha^2} k^2 e^{m_2 x}\right).$$

3. Es seien die Functionen $f_1, f_2, \ldots . f_n$ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$16. \quad \psi(x+y) = f_n y . f_1 x + f_{n-1} y . f_2 x + f_{n-2} y . f_3 x + \ldots . + f_2 y . f_{n-1} x + f_1 y . f_n x$$

genugthun.

Differentiirt man und eliminirt $\psi'(x+y)$, so kommt

$$f_n y . f_1' x + f_{n-1} y . f_2' x + f_{n-2} y . f_3' x + \ldots . + f_1 y . f_n' x$$
$$= f_n x . f_1' y + f_{n-1} x . f_2' y + f_{n-2} x . f_3' y + \ldots . + f_1 x . f_n' y.$$

Obgleich nun die Anzahl der zu findenden Functionen unbestimmt gelassen ist, so läfst sich doch vermittelst der Gleichungen (*B.*) ihre Form finden. Denn diese geben für den gegenwärtigen Fall:

$$\begin{aligned} f_1' x &= c_1 f_n x + c_{1,2} f_{n-1} x + \ldots . + c_{1,n} f_1 x, \\ f_2' x &= c_{1,2} f_n x + c_2 f_{n-1} x + \ldots . + c_{2,n} f_1 x, \\ &\vdots \\ f_n' x &= c_{1,n} f_n x + c_{2,n} f_{n-1} x + \ldots . + c_n f_1 x, \end{aligned}$$

aus welchen, durch Integration, für fx die Form

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots . + C_n e^{m_n x}$$

gefunden wird.

6.

Wenn man erstens $\sin\alpha$ durch $\varphi\alpha$ und $\cos\alpha = \frac{\partial \sin\alpha}{\partial\alpha}$ durch $\varphi'\alpha$ bezeichnet; so ist

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta + \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R} \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta - \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R},$$

wenn $R = 1$ ist. Wenn man zweitens $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2).(1+e^2x^2)]}}$ durch α, x aber durch $\varphi\alpha$ bezeichnet, so hat man ebenfalls:

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta + \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R} \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varphi\alpha . \varphi'\beta - \varphi\beta . \varphi'\alpha}{R},$$

wenn nämlich $R = 1 + e^2 c^2 \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta$ ist *).

---

*) Wegen der letztern Gleichungen kann man Herrn Abel's vortreffliche Abhandlung „*Recherches sur les fonctions elliptiques*" im zweiten Bande dieses Journals p. 101. nachsehen.

Wir wollen untersuchen, ob es aufser der erwähnten circulairen und elliptischen Function $\varphi\alpha$ noch andere Functionen giebt, welche die Eigenschaft haben, dafs bei ihnen die beiden genannten Gleichungen, oder noch allgemeiner die Gleichungen

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{F\alpha.f\beta+F\beta.f\alpha}{\varrho(\alpha_1\beta)} \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha-\beta)=\frac{F\alpha.f\beta-F\beta.f\alpha}{\varrho(\alpha_1\beta)}$$

zu gleicher Zeit Statt finden.

Zu dem Ende dividiren wir beide Gleichungen durch einander; dann kommt:

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{F\alpha.f\beta+F\beta.f\alpha}{F\alpha.f\beta-F\beta.f\alpha}, \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{f\alpha}{F\alpha}+\frac{f\beta}{F\beta}}{\frac{f\alpha}{F\alpha}-\frac{f\beta}{F\beta}},$$

und wenn wir $\frac{f\beta}{F\beta}$ durch $\psi\beta$ bezeichnen:

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta)}{\varphi(\alpha-\beta)}=\frac{\psi\alpha+\psi\beta}{\psi\alpha-\psi\beta}.$$

Setzt man nun $\alpha+\beta=x$ und $\alpha-\beta=y$, und entwickelt $\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$, so kommt:

$$\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\varphi x+\varphi y}{\varphi x-\varphi y}.\psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

oder, $\frac{\varphi x+\varphi y}{\varphi x-\varphi y}$ durch a bezeichnend:

$$\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=a\psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Wir differentiiren diese Gleichung nun nach x und nach y; dies giebt:

$$\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right).\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right).\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

woraus, wenn man $\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)$ eliminirt,

$$\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+2a.\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)=0,$$

oder, wenn durch $\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)$ dividirt und $\frac{\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ durch $\pi(x-y)$ bezeichnet wird:

$$\pi(x-y)=\frac{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a}$$

folgt. Differentiirt man diese Gleichung wieder nach x und nach y, so kommt

$$\pi(x-y) = \frac{a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y\,\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a^2}$$

$$-\pi(x-y) = \frac{a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y}\right)\right]+\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\right].\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)}{a^2},$$

und, wenn man addirt und mit a^2 multiplicirt:

$$a.\left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Substituirt man hierin die Werthe der Differential-Coëfficienten, die sich aus der Gleichung $a=\frac{\varphi x+\varphi y}{\varphi x-\varphi y}$ ergeben, so hat man

$$\varphi y.(2\varphi x.\varphi'^2 x-\varphi^2 x.\varphi'' x)+\varphi^3 y.\varphi'' x=\varphi x.(2\varphi y.\varphi'^2 y-\varphi^2 y.\varphi'' y)+\varphi^3 x.\varphi'' y.$$

Unsere Formeln (4.) geben für diese Gleichung, wenn man die 3 Constanten durch $2a$, $2b$ und $2c$ bezeichnet:

$$2\varphi'^2 x-\varphi x.\varphi'' x = 2a\quad+2b\varphi^2 x,$$
$$\varphi'' x = 2b\varphi x+2c\varphi x^3.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen müssen übereinstimmen, wenn eine Function φ von der vorausgesetzten Beschaffenheit existiren soll. Eliminiren wir $\varphi'' x$, so erhalten wir

$$\varphi'^2 x = a+2b\varphi^2 x+c\varphi^4 x,$$

und statt der zuletzt genannten Gleichungen können wir also die beiden folgenden setzen:

$$\varphi'^2 x = a+2b\varphi^2 x+c\varphi^4 x,$$
$$\varphi'' x = \quad 2b\varphi x+2c\varphi^3 x,$$

von denen die letzte, wie man leicht sieht, die Differential-Gleichung der ersten ist. Es stimmen also beide Gleichungen wirklich mit einander überein. Setzt man nun $\varphi x = z$, und also $\varphi' x=\frac{\partial z}{\partial x}$, so giebt die erste Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{(a+2bz^2+cz^4)}},\quad \text{also}\quad x=\int\frac{\partial z}{\sqrt{(a+2bz^2+cz^4)}},$$

und folglich gehört z oder φx zu den elliptischen Functionen, von welchen die Kreisfunction nur ein besonderer Fall ist, und es giebt keine andere Functionen weiter, welche die genannte Eigenschaft haben.

Am 28. November 1828.

31.

Recherches sur la figure et le mouvement d'une bulle d'air dans un liquide de densité constante.

(Par Mr. *Theremin*, capitaine du génie des voies de communications à Ircoutsk en Sibérie.)

(Suite du mémoire No. 4. tom. V. cah. 1.)

3me Partie. Figure de la bulle en mouvement.

Le seul mouvement qu'il importe de connaître dans le problême qui nous occupe, est celui d'une bulle libre, qui s'élève dans un liquide en vertu de la différence de la densité.

Il n'est pas évident si la figure de la bulle en mouvement sera ou ne sera pas la même que celle de la bulle en repos, car on sait qu'un corps en mouvement dans un fluide éprouve de la part de ce fluide une résistance égale au produit d'une constante par le carré de la vitesse; la quantité constante dépend de la densité du fluide, de celle du corps en mouvement, et en supposant que le corps en mouvement soit une sphère, le rayon de cette sphère entre aussi dans l'expression de cette constante. Ainsi en nommant d la densité du fluide, D celle de l'air de la bulle, et r le rayon de la sphère osculatrice au point culminant, on aura pour expression de la résistance du fluide:

$$\frac{Md}{D}\cdot\frac{v^2}{r},$$

M étant une constante donnée par l'expérience, et v étant la vitesse du corps en mouvement, qui est ici la bulle.

La résistance du fluide étant directement opposée à la direction du mouvement de la bulle qui est verticale, l'expression de cette résistance contre un élément ∂A de la surface supérieure doit être ajoutée à la pression que cet élément éprouve de la part du fluide en repos; donc, l'équation qui caractérise la surface supérieure de la bulle, étant, comme nous l'avons trouvé précédemment:

$$\partial p.\partial A - p.\partial^2 A = 0, \text{ d'où l'on tire } \frac{\partial p}{\partial A} = \text{const.}:$$

il ne s'agit que de remplacer la pression p sur un élément ∂A, par les quantités dont elle se compose; nous aurons pour p, 1°. La pression du

liquide, qui est
$$gd(h-z).\partial x.\partial y.$$
2°. La pression due à la résistance au mouvement, qui agit dans le même sens que la pression due à la hauteur du fluide, et dont l'expression est:
$$\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}.\partial x.\partial y.$$
3°. Enfin la résistance due à la cohésion c, dont l'expression, comme nous l'avons trouvé précédemment, est:
$$C\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A$$
et qui agit en sens contraire aux deux premières forces.

L'équation fondamentale $\frac{p}{\partial A} =$ const., donnera donc:
$$\frac{\left(gd(h-z)+\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}\right)\partial x.\partial y-C\frac{\partial z}{\partial s}.\partial A}{\partial A} = \text{constante.}$$
Mais si l'on se rappelle que $\partial A = \partial x.\partial y \sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)}$, et que pour $z=a$ on a $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, on aura, en passant à l'équation de la génératrice plane en z et x, et remplaçant ∂s par $\left(\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}\right)\partial x$, l'équation suivante de la génératrice plane:
$$1.\quad gd(h-z)+M\frac{d}{D}.\frac{v^2}{r}-C\frac{\partial z}{\partial x} = gd(h-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}.$$
Il faut observer que cette équation convient à la bulle dans tous les points de son mouvement, et que pour chaque point la hauteur h varie; donc en nommant h' l'ordonnée verticale du mouvement, à partir du fond du vase, la hauteur du liquide en un instant quelconque sera $h-h'$; et en mettant cette quantité au lieu de h dans l'équation (1.), elle donne:
$$(2.)\quad gd(h-h'-z)+\frac{Md}{D}.\frac{v^2}{r}-C\frac{\partial z}{\partial x} = gd(h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}.$$
La densité D de l'air n'est pas non plus constante et dépend évidemment de la hauteur à laquelle la bulle se trouve dans le liquide; ainsi en nommant par exemple D' la densité de l'air libre, et H la hauteur du liquide qui fait équilibre à la pression atmosphérique, on aura suivant la loi de Mariotte:
$$D':D = H:H+h-h',$$
d'où l'on tire:
$$3.\quad D = \frac{D'}{H}(H+h-h').$$
Nous ferons plus tard usage de cette expression.

On peut simplifier l'équation (2.) en posant $\frac{M}{gD} = m$, $\frac{C}{gd} = n$; alors l'équation (2.) donne:

$$4.\quad (h - h' - z) + \frac{m}{r} . v^2 - n \frac{\partial z}{\partial x} = (h - h' - a) \sqrt{\left(1 + \frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}:$$

équation dont nous tirerons celle de la surface supérieure de la bulle, si nous pouvons en éliminer la quantité v: opération à laquelle les équations du mouvement de la bulle sont nécessaires.

Si l'on nomme α le volume de la bulle à la hauteur h', et α' son volume dans l'air libre, on aura suivant la loi de Mariotte:

$$\alpha : \alpha' = H : H + h - h',$$

d'où l'on tire:

$$5.\quad \alpha = \frac{\alpha' H}{H + h - h'},$$

D étant la densité de l'air de la bulle à la hauteur h', et d celle de l'eau, la force qui fait monter la bulle dans le liquide sera $g\alpha(d - D)$, ou bien, en mettant au lieu de D et α leurs valeurs (3. et 5.):

$$\frac{g \alpha' H \left(d - \frac{D'}{H}(H + h - h' h)\right)}{H + h - h'}.$$

En faisant les réductions, et posant pour abréger:

$$6.\quad \frac{\partial H}{D'} - H - h = P,\quad H + h = Q,\quad g\alpha' D' = R,$$

cette expression prend la forme plus simple:

$$7.\quad R \frac{(P + h')}{(Q - h')}.$$

D'un autre côté nous avons trouvé $\frac{Md}{D} . \frac{v^2}{r}$ pour la résistance du liquide; donc comme cette résistance diminue la force qui fait monter la bulle, on aura, en retranchant cette expression de la valeur (7.), l'expression de la force accélératrice totale qui fait monter la bulle, et l'équation de la force sera:

$$8.\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R \frac{(P + h')}{(Q - h')} - \frac{Md}{D} . \frac{v^2}{r}.$$

Si nous observons que la vitesse v a pour expression $v = \frac{\partial h'}{\partial t}$, il sera facile d'éliminer v et ∂t entre cette expression, l'équation (8.) et l'équation (4.), et il viendra:

$$9.\quad (h - h' - z) + \frac{m(\partial h')^2 (P + h') D . R}{(Dr \partial^2 h' + Md . (\partial h')^2)(Q - h')} - n \frac{\partial z}{\partial x} = (h - h' - a) \sqrt{\left(1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)}$$

Voilà l'équation générale de la génératrice plane pour un instant quelconque. Observons que dans cette équation, h' et a, sont variables tous les deux; h' comme étant l'ordonnée du mouvement et a, qui exprime la hauteur de la bulle, variera 1° avec la figure de la bulle, c'est à dire avec h', et 2°, avec le volume de la bulle α, qui est aussi fonction de de h'; mais si nous désirons l'équation de la surface pour une hauteur déterminée h', il faut poser à la fois $a =$ const. et $h' =$ const., d'où $\partial h' = 0$, ce qui réduit l'équation (9.) à celle ci plus simple:

$$10. \quad (h-h'-z) - n\frac{\partial z}{\partial x} = (h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)}$$

d'où l'on tire aisément:

$$11. \quad \frac{\partial z}{n(h-h'-z) \pm \sqrt{[((h-h'-a)^2-1+n^2)(h-h'-z)^2-((h-h'-a)^2-1)(h-h'-a)^2]}} = \frac{\partial x}{(h-h'-a)^2-1},$$

équation différentielle qui exprime la courbe cherchée, et dans laquelle il ne faut prendre que le signe inférieur du radical. Avec ce signe, si $z = a$, on trouve $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Pour comparer la figure de la bulle en repos avec celle de la bulle en mouvement, rappellons nous que nous avons trouvé pour la bulle en repos:

$$12. \quad \frac{\partial z}{n(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-n^2)]}} = \frac{\partial x}{(h-a)^2-n^2}.$$

Pour comparer cette équation avec celle (11.), il faut que les hauteurs du liquide, au dessus de la bulle, soient égales dans l'une et dans l'autre; donc il faut poser $h-h' = h$, et l'équation (11.) donne:

$$13. \quad \frac{\partial z}{n(h-z)-\sqrt{[((h-a)^2+n^2-1)(h-z)^2-(h-a)^2((h-a)^2-1)]}} = \frac{\partial x}{(h-a)^2-1}.$$

Mais rien n'empêche de faire dans les équations (12.) et (13.) $n = 1$, et alors ces équations, si l'on en tire $\frac{\partial z}{\partial x}$, donnent:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-1)]}}{(h-a)^2-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(h-z)-(h-a)\sqrt{[(h-z)^2-((h-a)^2-1)]}}{(h-a)^2-1},$$

Cela fait voir que pour des hauteurs égales de liquide, la bulle en repos et la bulle en mouvement ont absolument la même forme.

Passons à la recherche du mouvement de la bulle. Pour cela mettons dans l'expression (8.) de la force accélératrice au lieu de r sa valeur

tirée de l'équation (4.), il viendra:

$$14.\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R\left(\frac{R+h'}{Q-h'}\right) - \frac{Md}{mD}\cdot\left[(h-h'-a)\sqrt{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)} + n\frac{\partial z}{\partial x} - (h-h'-z)\right].$$

C'est l'expression de la force accélératrice d'un point quelconque de la bulle. Pour avoir l'expression de cette force, relative à un point particulier de la bulle, il faut donner à z et à $\frac{\partial z}{\partial x}$ les valeurs qui leurs conviennent dans ce point; ainsi, si l'on voulait avoir la valeur de la force accélératrice au point culminant, il faudrait faire $z = a$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, et l'expression (14.) se réduirait à celle-ci plus simple:

$$15.\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = R\left(\frac{P+h'}{Q-h'}\right),$$

que nous pouvons prendre pour l'équation du mouvement de la bulle même.

En multipliant chaque membre par $\partial h'$ et intégrant, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial h'}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2}v^2 = (P+Q)R\left(\log\frac{1}{(Q-h')} - \frac{h'}{P+Q}\right) + \text{const.}$$

Substituant dans cette équation les valeurs (6.) de P, Q et R, elle donne:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = g\alpha'\partial H\left(\log\frac{1}{(H+h-h')} - \frac{D'h'}{\partial H}\right) + \text{const.}$$

et si l'on observe qu'à l'origine du mouvement on a à la fois $v = 0$, $h' = 0$, on en tirera: const. $= g\alpha' D' \log(H+h)$, et

$$16.\quad v = \pm\sqrt{\left[g\alpha'\partial H\left(\log\left(\frac{H+h}{H+h-h'}\right) - \frac{D'h'}{\partial H}\right)\right]}.$$

C'est l'expression de la vitesse au bout du temps dans lequel la bulle s'est élevée à la hauteur h'. On peut tirer sur le champ un résultat remarquable de l'équation (16.). Pour cela nommons φ le volume d'une autre bulle dans le même vase, nous aurons pour la vitesse v' de cette bulle à la hauteur h', l'expression:

$$v' = \pm\sqrt{\left[g\varphi\partial H\left(\log\left(\frac{H+h}{H+h-h'}\right) - \frac{D'h'}{\partial H}\right)\right]};$$

en divisant cette équation par celle (16.), élevant au carré et réduisant, il vient:

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{\varphi}{\alpha'};$$

c'est à dire: les carrés des vitesses de deux bulles, qui ont parcourues des espaces égaux dans le même vase, sont entr'eux comme les volumes de ces bulles.

Si la hauteur du liquide h était assez petite pour qu'on put considérer α et D comme constants, les équations du mouvement se simpli-

fieraient beaucoup. En effet, le second membre de l'équation (15.) qui n'est autre chose que $g\alpha(d-D)$, serait constant, et en faisant $g(d-D)=k$, on aurait simplement:

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=\alpha.k,$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\partial h'}{\partial t}=\alpha k.t+\text{const.},\ \text{ou bien}\ v=\alpha.kt+C.$$

Mais v et t étant nuls en même temps, on a simplement

$$17.\quad \frac{\partial h'}{\partial t}=\alpha k.t,\quad v=\alpha.kt.$$

Intégrant la première de ces équations, on a $h'=\frac{1}{2}\alpha k t^2+C$. Mais $C=0$, puisque h' et t sont zéro à la fois. Donc $h'=\frac{1}{2}\alpha k t^2$ est l'expression de l'espace en fonction du temps. Mettant la valeur de t, tirée de l'équation (17.), dans cette expression, on aura:

$$h'=\frac{1}{2}\frac{v^2}{\alpha k}.$$

Mais pour une bulle du volume φ on aurait aussi $h'=\frac{1}{2}\frac{v'^2}{\varphi k}$, donc

$$\frac{v'^2}{v^2}=\frac{\varphi}{\alpha}:$$

résultat, que nous avons déjà obtenu dans le cas général.

Si nous nommons v' la vitesse d'une bulle φ au bout d'un temps t, nous aurons en vertu de l'équation (17.): $v'=\varphi k t$, d'où $\frac{v'}{v}=\frac{\varphi}{\alpha}$, c'est à dire, qu'au bout d'un même temps les vitesses sont entr'elles comme les volumes; si au contraire on suppose les vitesses égales, on aura, en nomment t' le tems du mouvement de la seconde bulle: $t':t=\alpha:\varphi$, c'est à dire, que les temps nécessaires pour acquérir la même vitesse, sont en raison inverse des volumes des bulles. De l'expression de l'espace, $h'=\frac{1}{2}\alpha k t^2$, nous conclurons encore, que les espaces parcourus dans le même temps, sont entr'eux comme les volumes des bulles; et que les carrés des temps employés à parcourir des espaces égaux, sont en raison inverse de ces volumes.

Je ne pousserai pas plus loin ces recherches, la figure de la bulle et son mouvement me paraissant suffisamment connus par ce que j'en ai dit; d'ailleurs, les recherches ultérieures ne présenteroient évidemment que des difficultés de calcul, peut être insurmontables, sans offrir d'autres résultats intéressans.

A Ircoutsk le 20. Octobre 1829.

32.

Über die Summe der Reihen $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\ldots$ und $1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{19^2}+\ldots$

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Da diese Reihen sehr langsam convergiren, so hat Euler sie in andere, schneller convergirende verwandelt, die aber, da die Coëfficienten von den Bernoullischen Zahlen abhängen, nach einer gewissen Anzahl Glieder wieder divergiren. Dieses hat Legendre bewogen (*Traité de fonct. ellipt. T. II. p.* 397.), andere ganz convergirende Reihen zu suchen, die die Summe derselben darstellen. Da aber die Glieder der von ihm gefundenen Reihen nach einem nicht so einfachen Gesetze fortgehen, als nachstehende, auf die ich beim Studium des Legendreschen Werks gekommen bin, so erlaube ich mir dieselben hier mitzutheilen.

1. Es sei:

$$1.\quad z = \int\theta^2\partial\log\sin\theta - 2\theta\int\theta\partial\log\sin\theta + \theta^2\log\sin\theta,$$

so ist:

$$\partial^2 z = 2\log\sin\theta\,\partial\theta^2,$$

folglich auch:

$$2.\quad z = 2\iint\log\sin\theta\,\partial\theta^2.$$

Es ist aber:

$$\log\sin\theta = -\log 2 - \cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{3}\cos 6\theta - \tfrac{1}{4}\cos 8\theta - \ldots,$$

und wenn man das Integral jedesmal von $\theta=0$ anfangen läfst:

$$\int\log\sin\theta\,\partial\theta = -\theta\log 2 + \tfrac{1}{2}(\sin 2\theta + (\tfrac{1}{2})^2\sin 4\theta + (\tfrac{1}{3})^2\sin 6\theta + (\tfrac{1}{4})^2\sin 8\theta + \ldots)$$

$$\iint\log\sin\theta\,\partial\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\theta^2\log 2 + \tfrac{1}{4}(\cos 2\theta + \tfrac{1}{2^3}\cos 4\theta + \tfrac{1}{3^3}\cos 6\theta + \tfrac{1}{4^3}\cos 8\theta + \ldots)$$
$$-\tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots),$$

also:

$$3.\quad z = \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + \tfrac{1}{2^3}\cos 4\theta + \tfrac{1}{3^3}\cos 6\theta + \tfrac{1}{4^3}\cos 8\theta + \ldots)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots) - \theta^2\log 2.$$

Substituirt man nun in die Gleichung (1.)

$$\theta = \sin\theta + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}\sin\theta^3 + \frac{1.3}{2.4}.\tfrac{1}{5}\sin\theta^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\tfrac{1}{7}\sin\theta^7 + \ldots,$$

$$\theta^2 = \sin\theta^2 + \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}\sin\theta^4 + \frac{2.4}{3.5}.\tfrac{1}{3}\sin\theta^6 + \frac{2.4.6}{3.5.7}.\tfrac{1}{4}\sin\theta^8 + \ldots,$$

so erhält man:

$$4.\quad z = \tfrac{1}{2}\left(\sin\theta^2 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^2\sin\theta^4 + \frac{2.4}{3.5}.(\tfrac{1}{3})^2\sin\theta^6 + \frac{2.4.6}{3.5.7}.(\tfrac{1}{4})^2\sin\theta^8 + \dots\right)$$
$$-2\theta\left(\sin\theta + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3^2})\sin\theta^3 + \frac{1.3}{2.4}.(\tfrac{1}{5})^2\sin\theta^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.(\tfrac{1}{7})^2\sin\theta^7 + \dots\right)$$
$$+\ \theta^2\log\sin\theta.$$

Setzt man mit Legendre:

$$(1,6)^3 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \dots$$
$$(2,6)^3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{14^3} + \dots$$

u. s. w.

so giebt die Reihe (3.) für $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$z = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(1,6)^3 - \tfrac{1}{2}(2,6)^3 - (3,6)^3 + \tfrac{1}{2}(4,6)^3 + \tfrac{1}{2}(5,6)^3 + (6,6)^3] - \tfrac{1}{2}S_3 - \frac{\pi^2}{36}\log 2,$$

wo $S_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$ ist.

Es ist aber, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned}
(1,6)^3 + (2,6)^3 + (3,6)^3 + (4,6)^3 + (5,6)^3 + (6,6)^3 &= 216\,(6,6)^3 = S_3\\
(2,6)^3 + (4,6)^3 + (6,6)^3 &= 27\,(6,6)^3\\
+(3,6)^3 + (6,6)^3 &= 8\,(6,6)^3\\
(6,6)^3 &= (6,6)^3
\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, $+3$, und addirt die Producte, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(1,6)^3 - \tfrac{1}{2}(2,6)^3 - (3,6)^3 - \tfrac{1}{2}(4,6)^3 + \tfrac{1}{2}(5,6)^3 + (6,6)^3 = 27\,(6,6)^3 = \tfrac{1}{8}S_3,$$

folglich für $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$5.\quad z = -\tfrac{1}{3}S_3 - \frac{\pi^2}{36}\log 2.$$

Vergleicht man diesen Werth mit der Gleichung (4.), nach Substitution von $\theta = \frac{\pi}{6}$, so folgt:

$$6.\quad S_3 = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3^2.2^3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5^2.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7^2.2^7} + \dots\right)$$
$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{2^2.2^2} + \frac{1.2}{3.5}.\frac{1}{2^3.3^2} + \frac{1.2.3}{3.5.7}.\frac{1}{2^4.4^2} + \dots\right).$$

Die numerischen Werthe der beiden Reihen bis auf 22 Decimalstellen genau, sind:

1,59426 65472 59595 61676 81
0,39220 96441 00001 33136 84,

folglich:

S_3 = 1,20205 69031 59594 28539 97.

2. Wenn man ferner:

$$(1,6)^2 = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{13^2}+\dots$$

$$(2,6)^2 = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{14^2}+\dots$$

u. s. w.

setzt, so ist nach den umstehenden Formeln:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = -\frac{\pi}{6}\log 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}[(1,6)^2+(2,6)^2-(4,6)^2-(5,6)^2],$$

und da (Legendre am angeführten Orte):

$$(1,6)^2+(2,6)^2-(4,6)^2-(5,6)^2 = \tfrac{12}{5}(1,6)^2-\tfrac{2}{15}\pi^2$$

so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{30}-\frac{\pi}{6}\log 2-\frac{3.\sqrt{3}}{5}(1,6)^2.$$

Nun ist aber auch:

$$\int\log\sin\theta\,\partial\theta = \theta\log\sin\theta - \int\theta\,\partial\log\sin\theta,$$

mithin:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log\sin\theta\,\partial\theta = -\frac{\pi}{6}\log 2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^2.2^5}+\dots\right).$$

Setzt man die in Parenthesen eingeschlossene Reihe $=R$, dessen numerischer Werth

$$0,50747 \quad 08032 \quad 04826 \quad 81251 \quad 060$$

ist, und vergleicht die beiden für $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\sin\theta\,\partial\theta$ gefundenen Werthe, so ergiebt sich:

$$(1.6)^2 = \frac{\pi^2}{18}+\frac{5R}{3.\sqrt{3}},$$

und also:

$$(2.6)^2 = \frac{\pi^2}{54}+\frac{R}{3.\sqrt{3}},$$

$$(4.6)^2 = \frac{\pi^2}{54}-\frac{R}{3.\sqrt{3}},$$

$$(5.6)^2 = \frac{\pi^2}{18}-\frac{5R}{3.\sqrt{3}}.$$

Es ist $\frac{R}{3.\sqrt{3}} = 0,09766 \quad 28016 \quad 12060 \quad 78710 \quad 840$

und $\frac{\pi^2}{54} = 0,18277 \quad 04518 \quad 72025 \quad 15960 \quad 805,$

folglich $(4.6)^2 = 0,08510 \quad 76502 \quad 59964 \quad 37249 \quad 965,$

welches man gleichfalls durch die Eulersche Formel erhält.

München, den 8. Januar 1830.

33.
Über die Bestimmung der Lage der Haupt-Umdrehungs-Axen eines Körpers.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die gewöhnlich angegebene Auflösung dieser Aufgabe führt auf eine cubische Gleichung, die sich aber in einer etwas verwickelten Gestalt darstellt. Das folgende Verfahren, welches Gaufs zur Auflösung einer andern Aufgabe: „*Determinatio attractionis etc. etc.*" angewandt hat, giebt auf einem directeren Wege eine Gleichung von symmetrischer Form.

Es seien die Momente in Beziehung auf die bekannten Axen der x, y, z, und auf den Schwerpunct bezogen:

$$1.\quad \begin{cases} \int xx\,\partial m = \alpha; & \int xy\,\partial m = \delta, \\ \int yy\,\partial m = \beta; & \int yz\,\partial m = \varepsilon, \\ \int zz\,\partial m = \gamma; & \int zx\,\partial m = \theta, \end{cases}$$

und die Coordinaten, auf die Haupt-Umdrehungs-Axen bezogen, x', y', z'; und

$$2.\quad \begin{cases} \int x'x'\,\partial m = \xi; & \int x'y'\,\partial m = 0, \\ \int y'y'\,\partial m = \upsilon; & \int y'z'\,\partial m = 0, \\ \int z'z'\,\partial m = \zeta; & \int z'x'\,\partial m = 0: \end{cases}$$

Sei nun:

$$3.\quad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a'x + b'y + c'z, \\ z' = a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Da die Entfernung jedes Puncts vom Anfangspuncte der Coordinaten bei beiden Systemen dieselbe ist, so mufs $x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz$ sein. Folglich:

$$4.\quad \begin{cases} aa + a'a' + a''a'' = 1; & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ bb + b'b' + b''b'' = 1; & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ cc + c'c' + c''c'' = 1; & ca + c'a' + c''a'' = 0. \end{cases}$$

Wir haben also zur Bestimmung der 12 unbekannten Gröfsen ξ, υ, ζ, a, b, c, a' etc. eben so viele Gleichungen (2.) und (4.), so dafs also die Auflösung der Aufgabe algebraisch möglich ist. Man hat ferner, wenn man die Gleichungen (3.) resp. mit a, a', a''; b, b', b'' und c, c', c'' multi-

plicirt, die Producte je drei und drei addirt, und die Gleichungen (4) berücksichtigt:

$$5.\quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'; \end{cases}$$

demnach auch, in Folge der bei den Gleichungen (3.) gemachten Bemerkung:

$$6.\quad \begin{cases} aa + bb + cc = 1; & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'a' + b'b' + c'c' = 1; & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a'' + b''b'' + c''c'' = 1; & a''a + b''b + c''c = 0. \end{cases}$$

Werden nun in die Gleichungen (1.) die Gleichungen (5.) und (2.) substituirt, so findet man:

$$7.\quad \begin{cases} \alpha = aa.\xi + a'a'.v + a''a''.\zeta, \\ \beta = bb.\xi + b'b'.v + b''b''.\zeta, \\ \gamma = cc.\xi + c'c'.v + c''c''.\zeta, \\ \delta = ab.\xi + a'b'.v + a''b''.\zeta, \\ \varepsilon = bc.\xi + b'c'.v + b''c''.\zeta, \\ \theta = ca.\xi + c'a'.v + c''a''.\zeta. \end{cases}$$

Diese geben, mit Berücksichtigung der Gleichungen (6.):

$$8.\quad \begin{cases} \alpha a + \delta b + \theta c = \xi a, \\ \delta a + \beta b + \varepsilon c = \xi b, \\ \theta a + \varepsilon b + \gamma c = \xi c, \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha a' + \delta b' + \theta c' = v a', \\ \delta a' + \beta b' + \varepsilon c' = v b', \\ \theta a' + \varepsilon b' + \gamma c' = v c', \end{cases}$$

$$10.\quad \begin{cases} \alpha a'' + \delta b'' + \theta c'' = \zeta a'', \\ \delta a'' + \beta b'' + \varepsilon c'' = \zeta b'', \\ \theta a'' + \varepsilon b'' + \gamma c'' = \zeta c''. \end{cases}$$

Durch Elimination von a, b und c aus den Gleichungen (8.) findet man folgende Gleichung zwischen ξ und den bekannten Gröfsen α, β, γ etc.

$$11.\quad 0 = (\alpha-\xi)(\beta-\xi)(\gamma-\xi) - \delta\delta(\gamma-\xi) - \varepsilon\varepsilon(\alpha-\xi) - \theta\theta(\beta-\xi) + 2\delta\varepsilon\theta.$$

Eben dieselbe Gleichung findet man, wie auf den ersten Anblick erhellet, durch Elimination von a', b', c' aus (9.) zwischen v und α, β, etc.; und durch Elimination von a'', b'', c'' aus (10.) zwischen ζ und α, β, etc. Also ist, wenn man die Gleichung (11.) nach den Potenzen ordnet, und statt ξ, u setzt:

$$12.\quad u^3 - (\alpha+\beta+\gamma)u^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\delta\delta-\varepsilon\varepsilon-\theta\theta)u + \alpha\varepsilon\varepsilon+\beta\theta\theta+\gamma\delta\delta-2\delta\varepsilon\theta-\alpha\beta\gamma = 0,$$

deren drei Wurzeln die Werthe von ξ, υ und ζ sind.

Aus den Gleichungen (8.) hat man ferner:

$$a((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta) = b((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon) = c((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon);$$

woraus folgt:

$$13.\quad \begin{cases} \lambda a = \dfrac{1}{(\alpha-\xi)\xi-\delta\theta}, \\ \lambda b = \dfrac{1}{(\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta}, \\ \lambda c = \dfrac{1}{(\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon}, \end{cases}$$

und also:

$$\lambda\lambda = \frac{1}{((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta)^2} + \frac{1}{((\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta)^2} + \frac{1}{((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon)^2}.$$

Auf gleiche Weise findet man a', b' und c' durch υ, und a'', b'' und c'' durch ζ.

München, den 20. October 1829.

34.
Théorème sur les nombres.

Théorème. Si trois nombres entiers sont tels que le quarré du plus grand soit égal à la somme des quarrés des deux plus petits, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par soixante. (Annales de mathém. de Mr. Gergonne, tome XX, cahier VII. page 212.)

Démonstration. (Par un abonné.)

Les trois nombres r, s, t dans l'équation $r^2+s^2=t^2$ peuvent être supposés débarassés de tout diviseur commun, car si l'on peut prouver que le produit des nombres ainsi réduits est un multiple de 60, la même conséquence s'étendra au produit des nombres primitifs. L'équation étant dans cet état, deux des nombres qui entrent dans notre équation, seront impairs, et le troisième sera pair. Il est facile de voir que r et s ne sauraient être l'un et l'autre impairs. En effet, comme tout quarré impair est de la forme $8n+1$, la somme r^2+s^2 aurait dans ce cas la forme $8n+2$, qui ne saurait convenir au quarré t^2. L'un des nombres r, s est donc pair. Supposons que ce soit r. Comme on a $r^2=t^2-s^2$, t^2 et s^2 étant des quarrés impairs et par conséquent de la forme $8n+1$, r^2 sera divisible par 8, et r par conséquent multiple de 4. Il est donc prouvé que l'un des nombres r, s est divisible par 4.

On prouve avec la même facilité que l'un de ces nombres r, s est divisible par 3. Il suffit pour cela de remarquer que le quarré de tout nombre non-divisible par 3 étant de la forme $3n+1$, la somme r^2+s^2 aurait la forme $3n+2$, si aucun des nombres r, s n'était divisible par 3, tandisque le quarré t^2 aurait la forme $3n+1$, ou serait divisible par 3.

Prouvons enfin que des 3 nombres r, s, t l'un est toujours divisible par 5. C'est ce que nous allons faire en démontrant que si ni r ni s ne le sont, t le sera nécessairement. Tout quarré non divisible par 5 étant de l'une des formes $5n+1$, $5n+4$, il peut arriver trois cas différens, lorsque r et s ne sont ni l'un ni l'autre divisibles par 5. Les quarrés de ces

nombres peuvent être l'un et l'autre de la forme $5n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $5n+4$, ou enfin l'un de la forme $5n+1$, l'autre de la forme $5n+4$. Les deux premiers cas ne sauraient avoir lieu, car dans le premier r^2+s^2 aurait la forme $5n+2$ et dans le second la forme $5n+3$, qui ne sauraient convenir ni l'une ni l'autre au quarré t^2. Il ne reste donc que le troisième cas dans lequel t^2 sera de la forme $5n$, c'est à dire divisible par 5; t est donc toujours divisible par 5, si ni r ni s ne le sont.

En réunissant ce qui précède, on voit que le produit rst est divisible par 4, par 3 et par 5, et comme 3, 4 et 5 sont premiers entre eux, rst sera aussi un multiple du produit $3.4.5$, ce qu'il s'agissoit de prouver.

35.

Sur un principe général dans la théorie des séries.

(Par Mr. *de Schmidten*, prof. des mathém. à Copenhague.)

Après avoir exposé le principe général pour le développement en série de forme quelconque d'une fonction, soit explicite, soit implicite, je considère en particulier les séries proprement dites, ou celles qui ne sont qu'une somme de termes.

Le principe que je présente à leur égard, renferme beaucoup de résultats qui ont été trouvés par des méthodes diverses, et dont la liaison est souvent difficile à saisir. Mais l'objet de cette note étant surtout de ramener à un seul point de vue les résultats différens les plus généraux, je ne m'occupe pas de l'évaluation qui d'ailleurs n'est possible que dans des cas fort particuliers, et je ne fais qu'indiquer les corrolaires dont les développemens n'auroient d'autre difficulté que la longueur du calcul.

1.

Pour développer une fonction en série de la manière la plus générale, on lui donne la forme

$$F(x) = \varphi[A_1 + f_1(x)\varphi(A_2 + f_2 x\,\varphi(A_3 + \ldots.))],$$

où φ est le signe d'une fonction quelconque, $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. sont des fonctions quelconques de x, et A_1, A_2, A_3, ... des quantités qui dépendent de la fonction $F(x)$ et qu'il s'agit de déterminer.

Soit $\psi(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$, telle que $\psi(\varphi(x)) = x$, et x_1, x_2, x_3, ... des valeurs de x telles que

$$f_1(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 0, \quad f_3(x_3) = 0,$$

on aura pour A_1, A_2 etc. les valeurs suivantes:

$$\psi(F(x_1)) = A_1, \quad \psi\left(\frac{\psi(F(x_2)) - A_1}{f_1(x_2)}\right) = A_2, \quad \psi\left(\frac{\psi\left(\frac{\psi(F(x_3)) - A_1}{f_1(x_3)}\right)}{f_2(x_3)}\right) = A_3 \text{ etc.}$$

On voit que les quantités A_1, A_2, etc. se déterminent d'autant de manières différentes qu'il y a des combinaisons entre les racines des équations:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0 \text{ etc.}$$

Soit $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, on aura:

$$A_1 = \frac{1}{f(x_1)},\quad A_2 = \frac{f_1(x_2)}{\frac{1}{F(x_2)} - A_1},\quad A_3 = \frac{f_2(x_3)}{\frac{f_1(x_3)}{\frac{1}{F(x_3)} - A_1} - A_2},$$

Si l'on fait $\varphi(x) = x$, on a la forme d'une série proprement dite, ou une somme de termes qu'on pourroit appeler **série linéaire**, savoir:

$$F(x) = A_1 + A_2 f_1(x) + A_3 f_1(x) f_2(x) + \ldots.$$

Si toutes les valeurs de x qu'on tire des équations:

$$f_1(x) = 0,\quad f_2(x) = 0,\ \text{etc.}$$

sont égales à zéro, on trouvera que les valeurs de A_1, A_2 etc. se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, dont les vraies valeurs se trouvent par le calcul differentiel.

Si les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... sont toutes égales à x, on tombe dans le cas le plus simple, la série de **Taylor**.

2.

Si la fonction est donnée implicitement, on la développe en série par le principe de substitutions successives. Soit donnée l'équation

$$y = \varphi(x, y),$$

on aura:

$$y = \varphi[x, \varphi(x, \varphi(x, \ldots))].$$

Si l'équation est différentielle, on peut toujours lui donner la forme

$$\varphi\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}, \ldots\ y, x\right) = \psi\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}, \ldots\ y, x\right)$$

de sorte que le premier membre soit intégrable par des fonctions connues. On en tire une équation **intégrale**, renfermant n constantes arbitraires de la forme

$$y = f(x, y),$$

d'où l'on aura

$$y = f[x, f(x, f(x, \ldots))],$$

$f(x, y)$ étant une fonction de x et de y qui renferme n coëfficiens différentiels avec autant d'intégrations et de constantes arbitraires.

Comme une équation quelconque peut être partagée de beaucoup de manières en deux membres tels que le premier soit intégrable, on peut aussi lui trouver beaucoup de formes d'intégration différentes.

Ce n'est que dans le cas où l'équation elle-même est linéaire que l'intégrale aura la forme des séries auxquelles nous avons donné ce nom. Aussi est-il facile de voir que chaque terme de la série se dérive du précédent par autant de différentiations et d'intégrations, qu'indiquent re-

spectivement les coëfficiens différentiels les plus élevés sous les signes ψ et φ.

3.

La forme générale d'une série linéaire est:

$$F(t) = \Sigma . y_x t^x,$$

où x peut être prise depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Celle-ci mène en général à deux problèmes, celui de la transformer en une autre, et celui d'en dériver de nouvelles relations entre des fonctions et des séries correspondantes. Le premier se résoud de la manière la plus générale par la théorie des fonctions génératrices, et le second se réduit à un principe général dont le développement est l'objet de ce qui va suivre.

Soit ∇z une fonction quelconque linéaire de z, telle que

$$\nabla(z+y) = \nabla z + \nabla y;$$

comme par exemple

$$\nabla z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \text{ ou } \nabla z = \int X z \, \partial x,$$

X étant une fonction quelconque de x, etc.

Soient u et v des fonctions quelconques de t, on aura:

$$1. \quad \nabla . u F(v) = \Sigma . y_x \nabla (u v^x).$$

Les signes d'intégration ou de différentiation contenus dans ∇ se rapportent à la variable t.

De l'équation $F(t) = \Sigma y_x t^x$ on tire par l'introduction des imaginaires celles-ci:

$$2. \quad f(t) = \Sigma . y_x \cos t x,$$

$$3. \quad \varphi(t) = \Sigma . y_x \sin t x,$$

$$f(t) \text{ étant } = \frac{F(e^{t\sqrt{-1}}) + F(e^{-t\sqrt{-1}})}{2} \text{ et } \varphi(t) = \frac{F(e^{t\sqrt{-1}}) - F(e^{-t\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

et par le même procédé que ci-dessus:

$$\nabla . u f(v) = \Sigma . y_x \nabla (u \cos v x),$$

$$\nabla . u \varphi(v) = \Sigma . y_x \nabla (u \sin v x).$$

4.

Les corollaires des équations (1., 2. et 3.) les plus simples, se trouvent en supposant ∇ le signe de différentiation et supposant u et v de la forme t^m ou e^{mt}.

Faisant $\nabla = \Sigma$, on aura de l'un coté du signe $=$ une série ordinaire et de l'autre coté une série à double entrée. Ainsi, en ne prenant les Σ qu'entre les limites 0 et $+\infty$, on aura de l'équation (1.):

$$u_1F(v_1)+u_2F(v_2)+u_3F(v_3)+\ldots. = (u_1v_1+u_2v_2+\ldots.)y_1$$
$$+(u_1v_1^2+u_2v_2^2+\ldots.)y_2$$
$$+(u_1v_1^3+u_2v_2^3+\ldots.)y_3$$
$$+\ldots..$$

et de l'équation (2.):

$$u_1f(v_1)+u_2f(v_2)+\ldots. = (u_1\cos v_1+u_2\cos v_2+\ldots.)y_1$$
$$+(u_1\cos 2v_1+u_2\cos 2v_2+\ldots.)y_2$$
$$+(u_1\cos 3v_1+u_2\cos 3v_3+\ldots.)y_3$$
$$+\ldots..,$$

u_1, u_2, ... v_1, v_2, ... étant les valeurs de u et de v qui répondent aux valeurs de $t=1$, 2, 3 etc. On tirera une expression semblable de l'équation (3.).

Déterminant convenablement les fonctions u_n et v_n, les séries infinies du second membre se réduiront à des fonctions connues, et l'on aura ainsi une égalité de deux séries de formes différentes.

Supposant dans l'équation (1.) $v_n=(nt)^2$, $u_n=(-1)^{n+1}(nt)^{-2k}$, k étant un nombre entier quelconque, et remarquant que

$$1^{2n}-2^{2n}+3^{2n}-\ldots.=0,\ \tfrac{1}{2}=1-1+1-1\ldots.,$$

n étant un nombre entier positif, on aura:

$$\frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{F(t^2)}{1^{2k}}-\frac{F(4t^2)}{2^{2k}}+\frac{F(9t^2)}{3^{2k}}\ldots.\right)=y_1\Sigma.(-1)^{n+1}(nt)^{-2(k-1)}$$
$$+y_2\Sigma.(-1)^{n+1}(nt)^{-2(k-2)}$$
$$+\ldots.$$
$$+y_k\Sigma.(-1)^{n+1}$$

le nombre n étant pris depuis 0 jusqu'à ∞.

De l'équation (2.), en faisant $v_n=nt$ et $u_n=(-1)^{n+1}$, et observant que $\frac{1}{2}=\cos\theta-\cos2\theta+\cos3\theta-\ldots.$, on tire l'équation:

$$f(t)-f(2t)+f(3t)-\ldots.=\tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{1}{2}y_2+\tfrac{1}{2}y_3+\ldots.=\tfrac{1}{2}f(0).$$

Ces formules ont été presentées par M. Babbage dans un mémoire fort intéressant (Philos. transact. 1816), dans lequel il s'occupe de l'évaluation de ces séries et indique les circonstances sous lesquelles la divergence des séries rend le résultat inexact.

Soit encore $v_n=nv$, $u_n=u^n$, on aura:

$$uf(v)+u^2f(2v)+u^3f(3v)+\ldots.$$
$$=\frac{u(\cos v-u)}{1-2u\cos v+u^2}y_1+\frac{u(\cos 2v-u)}{1-2u\cos 2v+u^2}y_2+\ldots.$$

De la formule

$$\nabla . u\varphi(v) = \Sigma . y_x \nabla u \sin vx,$$

en supposant $\nabla = \Sigma$, $u_n = \sin\frac{np\pi}{m}$, $v_n = \frac{n\pi}{m}$, et les intégrales aux différences finies étant prises depuis $n = 1$ jusqu'à $n = m$, et depuis $x = 1$ jusqu'à $x = m$; p, m, n étant des nombres entiers, on tire:

$$\begin{aligned}
&\Sigma . u\varphi(v) \\
&= \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right) y_1 \\
&+ \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{4\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(\sin\frac{p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)\pi}{m} + \sin\frac{2p\pi}{m}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}\sin\frac{(m-1)(m-1)\pi}{m}\right) y_{m-1},
\end{aligned}$$

et observant que le coëfficient d'un membre quelconque y_r est

$$= \frac{\sin p\pi \sin\frac{(m-1)r\pi}{m} - \sin r\pi \sin\frac{(m-1)p\pi}{m}}{2\left(\cos\frac{p\pi}{m} - \cos\frac{r\pi}{m}\right)},$$

on voit que tous les coëfficiens doivent s'évanouir excepté le cas où $p = r$, dans lequel cette expression deviendra $= \frac{m}{2}$, et l'on aura:

$$\Sigma \sin\frac{np\pi}{m}\varphi\left(\frac{n\pi}{m}\right) = \frac{m}{2}y_p \quad \text{ou} \quad \frac{2}{m}\Sigma\Sigma . y_x \sin\frac{np\pi}{m}\sin\frac{nx\pi}{m} = y_p,$$

ce qui est la formule connue de Lagrange, de laquelle découlent celles de M. Fourier:

$$\left.\begin{aligned}
f(a) &= \frac{2}{\pi}\iint f(z)\sin ax \sin zx\, \partial z\, \partial x \\
f(a) &= \frac{2}{\pi}\iint f(z)\cos ax \cos zx\, \partial z\, \partial x
\end{aligned}\right\} \begin{Bmatrix} x = 0, & z = 0 \\ x = \infty, & z = \infty \end{Bmatrix}.$$

Ces beaux théorèmes donnent aussi les relations les plus remarquables entre des intégrales définies et des fonctions connues. Ainsi, en supposant $fz = e^{-qz}$, et observant que

$$\int e^{-qz}\cos xz\, \partial z = \frac{q}{x^2 + q^2} \quad \text{et} \quad \int e^{-qz}\sin xz\, \partial z = \frac{x}{x^2 + q^2} \begin{Bmatrix} z = 0 \\ z = \infty \end{Bmatrix},$$

on a

$$\frac{\pi}{2}e^{-qa} = \int \frac{x\sin ax}{x^2 + q^2}\partial x, \quad \frac{\pi}{2}e^{-qa} = \int \frac{q\cos ax}{x^2 + q^2}\partial x.$$

De même en supposant

$$f(z) = \int e^{-u^2 - \frac{z^2}{u^2}} . \partial u \begin{Bmatrix} u = 0 \\ u = \infty \end{Bmatrix},$$

et observant que

$$\int e^{-\frac{z^2}{u^2}} \cos zx\,\partial z = \frac{\sqrt{\pi}}{2} u e^{-\frac{x^2 u^2}{4}}, \text{ on a:}$$

$$\int e^{-u^2-\frac{a^2}{u^2}}.\partial u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{\cos xa\,\partial a}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

5.

Faisant $\nabla = \int$ entre des limites indéterminées, on aura:

$$\int u F(v)\,\partial t = \Sigma.y_x \int u v^x \partial t,$$

$$\int \frac{u}{2} (e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) + e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}}))\,\partial t = \Sigma.y_x \int \cos(w+vx)\,\partial t,$$

$$\int \frac{u}{2\sqrt{-1}} (e^{w\sqrt{-1}} F(e^{v\sqrt{-1}}) - e^{-w\sqrt{-1}} F(e^{-v\sqrt{-1}}))\,\partial t = \Sigma.y_x \int \sin(w+vx)\,\partial t,$$

w étant une nouvelle fonction de t.

Déterminant convenablement les fonctions u, v, w, et Ft on en tire un grand nombre de corollaires remarquables.

L'équation

$$\int u F(v)\,\partial t = \Sigma y_x \int u v^x \partial t \begin{Bmatrix} x=0 \\ x=\infty \end{Bmatrix}$$

en faisant

$$\alpha) \quad u = t^m (1-at)^p, \quad v = t,$$

$m-1$ et p étant des nombres positifs et les limites de l'intégrale étant $t=0$, $t=\frac{1}{a}$, donne:

$$\frac{\int t^m (1-at)^p F(t)\,\partial t}{\int t^{m-1} (1-at)^p\,\partial t} = \Sigma.\frac{m(m+1)\ldots(m+x)}{(p+m+1)\ldots(p+m+1+x)}.\frac{y_x}{a^{x+1}},$$

ou, si l'on fait $p=\frac{n}{a}$, $a=0$:

$$\frac{\int t^m e^{-nt} F(t)\,\partial t}{\int t^{m-1} e^{-nt}\,\partial t} = \Sigma.\frac{m(m+1)\ldots(m+x)}{n^{x+1}} y_x,$$

$$\beta) \quad \text{Si } u = t^\gamma (1-at)^\delta, \quad v = t^\alpha (1-at)^\beta,$$

γ et α étant des nombres entiers, on a:

$$\int t^\gamma (1-at)^\delta F(t^\alpha (1-at)^\beta)\,\partial t = \Sigma.\frac{1.2\ldots(\gamma+\alpha x)}{(1+\delta+\beta x)\ldots(1+\delta+\gamma+(\beta+\alpha)x)}.\frac{y_x}{a^{\gamma+\alpha x+1}},$$

ou, si l'on fait $\beta=\frac{m}{a}$, $a=0$:

$$\int t^\gamma e^{-nt} F(t^\alpha e^{-mt})\,\partial t = \Sigma.\frac{1.2\ldots(\gamma+\alpha x).y_x}{(n+mx)^{\gamma+\alpha x+1}},$$

$$\gamma) \quad \text{Soit } u = (1-at^n)^p, \quad v = t,$$

les limites de $t=0$

$$\text{et } =\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}},$$

n, p, $x-\gamma n$ étant positifs et n entier. Soit $\int t^x(1-at^n)^p\partial t$ compris entre les limites assignées $=f(x)$, on aura:

$$\begin{aligned}\int(1-a\,t^n)^p\,F(t)\partial t = f(0)\Sigma\,&\frac{1.(1+n)\dots.(1+(x-1)\,n)\,y_{xn}}{(1+(p+1)\,n)\dots.(1+(p+x)\,n)\,a^x}\\ +f(1)\Sigma\,&\frac{2.(2+n)\dots.(2+(x-1)\,n)\,y_{xn+1}}{(2+(p+1)\,n)\dots.(2+(p+x)\,n)\,a^x}\\ +\dots.&\\ +f(n-1)\Sigma\,&\frac{n(n+n)\dots.(n+(x-1)\,n)\,y_{xn+n-1}}{(n+(p+1)\,n)\dots.(n+(p+x)\,n)\,a^x},\end{aligned}$$

ou, si l'on fait $p=\frac{m}{a}$, $a=0$:

$$\begin{aligned}\int e^{-mt^n}F(t)\partial t = &\int e^{-mt^n}\partial t\,\Sigma\,\frac{1.(1+n)\dots.(1+(x-1)\,n)}{(m\,n)^x}\,y_{xn}\\ +&\int e^{-mt^n}t\,\partial t\,\Sigma\,\frac{2.(2+n)\dots.(2+(x-1)\,n)\,y_{xn+1}}{(mn)^x}\\ +&\dots.\\ +&\int e^{-mt^n}t^{n-1}\partial t\,\Sigma\,\frac{n.2n\dots.xn.y_{xn+n-1}}{(mn)^x}.\end{aligned}$$

En faisant $n=2$, on aura entre les limites $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ et $+\frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$\int(1-a\,t^2)^p\,t\,\partial t = 0,$$

d'où

$$\int e^{-mt^2}F(t)\,\partial t = \left(y_0+\frac{1}{2m}y_2+\frac{1.3}{2^2\,m^2}y_4+\frac{1.3.5}{2^3\,m^3}y_6+\dots.\right)\int e^{-mt^2}\partial t.$$

δ) Soit $u = t^{2m}e^{-\delta t^2}$, $v = t^2e^{-\beta t^2}$,

m étant un nombre entier, on a:

$$\frac{\int t^{2m}e^{-\delta t^2}F(t^2e^{-\beta t^2})\,\partial t}{\int e^{-t^2}\partial t} = \Sigma\,\frac{1.3.5\dots.(2\,(m+x)-1)\,y_x}{2^{m+x}(\delta+\beta x)^{m+x+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{matrix}t=-\infty\\ t=+\infty\end{matrix}\right\}.$$

Ces corollaires donnent d'autres en vertu des formes particulières de la fonction $F(t)$ ou de y_x. Ainsi du corollaire (δ.) on aura, en faisant $\beta=0$, $m=0$, $F(x)=\cos\sqrt{x}$ ou $y_x=\pm\frac{1}{1.2\dots.2x}$:

$$\int e^{-\delta t^2}\cos t\,\partial t = \frac{e^{-\frac{1}{4\delta}}\int e^{-t^2}\partial t}{\sqrt{\delta}}\left\{\begin{matrix}t=-\infty\\ t=+\infty\end{matrix}\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{4\delta}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\delta}}.$$

Faisant dans le second (β.) $F(t)=\cos t$, $\gamma=0$, $\alpha=1$, on aura:

$$\frac{1}{\delta}-\frac{1}{(\delta+2\beta)^3}+\frac{1}{(\delta+4\beta)^5}-\dots. = \int e^{-\delta t}\cos(t\,e^{-\beta t})\,\partial t,$$

et du premier (α.), en faisant $F(t)=\cos(ct)$ ou $F(t)=\sin(ct)$, on aura

$$\int t^m e^{-pt}\cos(ct)\partial t = \frac{p^{m+1}}{(p^2+c^2)^{\frac{m+1}{2}}}\cos\left((m+1)\operatorname{arc tang}=\frac{c}{p}\right)\int t^m e^{-pt}\partial t,$$

$$\int t^m e^{-pt}\sin(ct)\partial t = \frac{p^{m+1}}{(p^2+c^2)^{\frac{m+1}{2}}}\sin\left((m+1)\operatorname{arc tang}=\frac{c}{p}\right)\int t^m e^{-pt}\partial t.$$

6.

Les formules

$$A)\quad \int\frac{u}{2}\left(e^{w\sqrt{-1}}F(e^{v\sqrt{-1}})+e^{-w\sqrt{-1}}F(e^{-v\sqrt{-1}})\right)\partial t = \Sigma y_x\int u\cos(w+vx)\partial t,$$

$$B)\quad \int\frac{u}{2\sqrt{-1}}\left(e^{w\sqrt{-1}}F(e^{v\sqrt{-1}})-e^{-w\sqrt{-1}}F(e^{-v\sqrt{-1}})\right)\partial t = \Sigma y_x\int u\sin(w+vx)\partial t,$$

donnent lieu à deux corollaires remarquables.

α) Faisant dans la première $u=\Sigma A_m\cos mt$, dans la seconde $u=\Sigma A_m\sin mt$, dans l'une et l'autre $v=t$, $w=n-t$, les limites de m et de x étant $+\infty$ et $-\infty$, et observant que

$$\cos mt\cos xt = \frac{\cos(m+x)t-\cos(m-x)t}{2},$$

$$\sin mt\sin xt = \frac{\cos(m+x)t-\cos(m-x)t}{2},$$

on aura entre les limites $t=0$, $t=\pi$:

$$C)\quad \frac{1}{\pi}\int\left(e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}})+e^{nt}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\Sigma A_m\cos mt\,\partial t=\Sigma y_x A_{n-x}+\Sigma y_x A_{x-n},$$

$$D)\quad \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\left(e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}})-e^{nt}F(e^{t\sqrt{-1}})\right)\Sigma A_m\sin mt\,\partial t=\Sigma y_x A_{x-n}-\Sigma y_x A_{n-x}.$$

En faisant dans la première de ces formules

$$\Sigma A_m\cos mt = A_0 = 1,$$

on aura:

$$E)\quad \frac{1}{2\pi}\int\left(e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}})+e^{nt}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\partial t = y_n,$$

et faisant dans l'une et l'autre $A_m=p^m$, $n=0$, et ne prenant x et m que depuis 0 jusqu'à ∞, on tombe dans les formules de M. Poisson:

$$\frac{1}{\pi}\int\left(F(e^{t\sqrt{-1}})+F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\frac{1-p\cos t}{1-2p\cos t+p^2}\partial t=y_0+\Sigma y_x p^x=F(0)+F(p),$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\left(F(e^{t\sqrt{-1}})-F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\frac{p\sin t}{1-2p\cos t+p^2}\partial t=\Sigma y_x p^x-y_0=F(p)-F(0).$$

β) Faisant dans la première $u=\int\varphi(z)\cos tz\,\partial z$, dans la seconde $u=\int\varphi(z)\sin tz\,\partial z$ $\begin{Bmatrix}t=0\\t=\infty\end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix}z=0\\z=\infty\end{Bmatrix}$ $w=-nt$, $v=t$, on aura:

$$\frac{1}{\pi}\iint\left(e^{-nt\sqrt{-1}}F(e^{t\sqrt{-1}})+e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\varphi(z)\cos tz\,\partial t\,\partial z=\Sigma y_x\varphi(x-n),$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\iint\left(e^{-nt\sqrt{-1}}F(e^{t\sqrt{-1}})-e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\varphi(z)\sin tz\,\partial t\,\partial z=\Sigma y_x\varphi(x-n)$$

Soit par exemple

$$\varphi(z) = e^{-qz},$$

on trouvera celles-ci:

$$\frac{1}{\pi}\int\left(e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}}) + e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\frac{q\,\partial t}{t^2+q^2} = e^{-nq}F(e^{-q}).$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\left(e^{-nt}F(e^{t\sqrt{-1}}) - e^{nt\sqrt{-1}}F(e^{-t\sqrt{-1}})\right)\frac{t\,\partial t}{t^2+q^2} = e^{-nq}F(e^{-q}).$$

En donnant à $F(t)$ ou à y_x des formes particulières, on parvient à d'autres corollaires des formules (*A.* et *B.*).

α) En supposant $F(t) = \Sigma A_m t^m . \Sigma B_n t^{-n}$, les intégrales étant prises depuis n et $m = 0$ jusqu'à n et $m = \infty$, et faisant dans la formule (*E.*) $n = 0$, on aura la formule de M. **Parceval**:

$$\frac{1}{2\pi}\int\left(F(e^{t\sqrt{-1}}) + Fe^{-t\sqrt{-1}}\right)\partial t = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots.$$

β) Supposant $F(t) = f\left(t + \frac{1}{t}\right)$, les formules (*A.* et *B.*) deviendront:

$$\int u\cos w f(2\cos v)\,\partial t = \Sigma y_x \int u\cos(w+vx)\,\partial t,$$

$$\int u\sin w f(2\cos v)\,\partial t = \Sigma y_x \int u\sin(w+vx)\,\partial t,$$

et si l'on donne à $f(t)$ la forme $A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$, on aura:

$$\frac{1}{\pi}\int\cos nt f(2\cos t)\,\partial t = A_n + (n+2)A_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{1.2}A_{n+4} + \ldots \begin{Bmatrix} t=0 \\ t=\pi \end{Bmatrix}.$$

Soit encore $f(t) = e^t$, on aura:

$$\frac{1}{\pi}\int e^{2\cos t}\,\partial t = 1 + 1 + \frac{1}{1.2.1.2} + \frac{1}{1.2.3.1.2.3} + \ldots.$$

En faisant $f(t) = \frac{1}{(a+bt)^n}$, on aura une autre série connue.

Si l'on fait

$$F(t) = \log\left[1 + t\left(1 + \frac{a}{t}\right)^n\right],$$

on aura:

$$\frac{1}{2\pi}\int\log\left(1 + 2\cos t + 2na + \frac{2n(n-1)}{1.2}a^2\cos t + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3\cos 2t + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (1 + 2a\cos t + a^2)^n\right)\partial t \begin{Bmatrix} t=0 \\ t=\pi \end{Bmatrix}$$

$$= na - \frac{2n(2n-1)}{1.2}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{3} - \ldots.$$

36.

Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie vermittelst des barycentrischen Calculs.

(Von dem Herrn Ober-Lehrer *F. Minding* zu Berlin.)

Die im Folgenden, mit Hülfe des von Herrn Prof. Möbius erfundenen barycentrischen Calculs zu lösenden Aufgaben sind für diese Methode bloſse Eliminationsprobleme. Eben deswegen schien es, bei ihrer Wichtigkeit, interessant, sie einmal auf diesem Wege zu lösen.

1. Es sind die barycentrischen Ausdrücke dreier Puncte in einer Ebene gegeben; man sucht den Flächenraum des Dreiecks, welches diese drei Puncte zu Spitzen hat.

Seien die Ausdrücke der drei Puncte:

$$qP = aA + bB + cC; \quad q'P' = a'A + b'B + c'C; \quad q''P'' = a''A + b''B + c''C.$$

Eliminirt man den Fundamentalpunct A, so erhält man:

$$a'qP - aq'P' = \beta'B + \gamma'C \quad \text{und} \quad a''q'P' - a'q''P'' = \beta''B + \gamma''C,$$

wo:

$$\beta' = ba' - b'a, \quad \gamma' = ca' - c'a, \quad \beta'' = b'a'' - b''a', \quad \gamma'' = c'a'' - c''a'.$$

Eliminirt man ferner den Fundamentalpunct B, so kommt:

$$\beta''a'qP - (\beta''a + \beta'a'')q'P' + \beta'a'q''P'' = \beta''\gamma' - \gamma''\beta'.C.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} ABC : BCP &= q : a. \\ BCP : CPP' &= -aq' : \beta'. \\ CPP' : PP'P'' &= \beta'a'q'' : \beta''\gamma' - \beta'\gamma''. \\ \hline \text{Mithin:}\quad ABC : PP'P'' &= a'.qq'q'' : \beta'\gamma'' - \beta''\gamma'. \end{aligned}$$

Die Gröſse $\frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{a'}$ ist $= a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)$.

Bezeichnet man $a(b'c'' - b''c')$ mit A, $a'(b''c - bc'')$ mit A', $a''(bc' - b'c)$ mit A'', so sieht man, daſs A in A' übergeht, wenn man die Accente in dem Ausdrucke für A um eine Einheit erhöht, und statt c''' immer wieder c schreibt. Auf ähnliche Weise entsteht auch A'' aus A'.

Man hat also:

$$\text{I.} \quad \frac{PP'P''}{ABC} = \frac{A + A' + A''}{qq'q''}.$$

2. Es sind die Ausdrücke dreier gerader Linien in einer Ebene gegeben; man soll das Dreieck finden, welches sie einschliefsen.

Seien die Ausdrücke:

$$A+xB+(a+bx)C;\quad A+xB+(a'+b'x)C;\quad A+xB+(a''+b''x)C.$$

Heifsen die Durchschnittspuncte der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und ersten, der Reihe nach, Π, Π', Π''. Man findet:

$q\Pi = (b-b')A-(a-a')B+(a'b-ab')C.$ Auf gleiche Weise:

$$q'\Pi' = (b'-b'')A-(a'-a'')B+(a''b'-a'b'')C.$$

$$q''\Pi'' = (b''-b)A-(a''-a)B+(ab''-a''b)C.$$

Bezeichnet man nun die Gröfse: $a(b'-b'')+a'(b''-b)+a''(b-b')$ mit M, so erhält man für den ersten Theil A des Zählers in I.:

$$A = -a''(b-b')M.$$

Eben so:

$$A' = -a(b'-b'')M,\quad A'' = -a'(b''-b)M.$$

Hieraus folgt, wie man leicht sieht:

$$\text{II.}\quad \frac{\Pi\Pi'\Pi''}{ABC} = \frac{M^2}{-qq'q''}.$$

3. Es sind vier Puncte im Raume gegeben; man finde das Tetraëder, welches sie zu Spitzen hat.

Heifsen die Puncte: P, P', P'', P''', und sei:

$$qP = aA+bB+cC+dD.$$

Für P', P'', P''' gelten die nemlichen Coëfficienten, resp. mit den Accenten $'$, $''$, $'''$ versehen. Man findet, ganz wie vorhin, durch Elimination von A, B, C:

$$\text{III.}\quad \frac{PP'P''P'''}{ABCD} = \frac{A+A'+A''}{qq'q''q'''.a'a''},$$

wobei man hat:

$$A=\delta'(\beta''\gamma'''-\beta'''\gamma'');\quad A'=\delta''(\beta'''\gamma'-\beta'\gamma''');\quad A''=\delta'''(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'),$$

und

$$\begin{array}{lll}
\beta' = a'b-ab', & \gamma' = a'c-ac', & \delta' = a'd-ad'. \\
\beta'' = a''b'-a'b'', & \gamma'' = a''c'-a'c'', & \delta'' = a''d'-a'd''. \\
\beta''' = a'''b''-a''b''', & \gamma''' = a'''c''-a''c''', & \delta''' = a'''d''-a''d'''.
\end{array}$$

Man kann den Ausdruck: $A+A'+A''$ leicht entwickeln, und wird ihn dann durch $a'a''$ theilbar finden. Ohnehin stand es auch frei, $a=a'=a''=a'''=1$ zu setzen.

4. Vier Ebenen sind gegeben; man soll das Tetraëder finden, welches sie einschliefsen.

Bezeichnen wir einen beliebigen Punct der ersten Ebene mit P, die drei andern resp. mit P', P'', P'''.

Sei $P \equiv A + xB + yC + (a + bx + cy)C$; um die drei andern Ebenen auszudrücken, accentuiren wir a, b, c resp. ein-, zwei- und dreimal.

Die Durchschnittspuncte der Ebenen 1 2 3, 2 3 4, 3 4 1, 4 1 2 heifsen der Reihe nach Π, Π', Π'', Π'''.

Man findet: $q\Pi = (bc')A + (ca')B + (ab')C + (abc)D$, wo

$$(bc') = b(c'-c'') + b'(c''-c) + b''(c-c').$$
$$(ca') = a(c''-c') + a'(c-c'') + a''(c'-c).$$
$$(ab') = a(b'-b'') + a'(b''-b) + a''(b-b').$$
$$(abc) = a(bc') + b(ca') + c(ab') = a(b'c''-b''c') + a'(b''c-bc'') + a''(bc'-b'c).$$
$$q = (bc') + (ca') + (ab') + (abc).$$

Um die Ausdrücke von Π', Π'', Π''' zu finden, darf man nur die Accente in den Coëfficienten des Ausdrucks von Π successive um eine Einheit erhöhen, und statt a^{IV} immer a, statt b^{IV} b, statt c^{IV} c schreiben.

Man findet nach III.:

$$\frac{\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''}{ABCD} = \frac{A + A' + A''}{qq'q''q'''(b'c'')(b''c''')}.$$

In diesem Ausdrucke ist $A = \delta'(\beta''\gamma''' - \beta'''\gamma'')$, wie vorhin; eben so A' und A''.

Für die Gröfsen β', γ', δ', etc. hat man:

$$\beta' = (b'c'')(ca') - (bc')(c'a''); \quad \gamma' = (b'c'')(ab') - (a'b'')(bc');$$
$$\delta' = (b'c'')(abc) - (bc')(a'b'c').$$

Man darf nur die Accente erhöhen, um der Reihe nach β'', β''', γ'', γ''', δ'', δ''' zu erhalten. Man setze:

$$a'''(bc') - a(b'c'') + a'(b''c''') - a''(b'''c) = M.$$

Nach den nöthigen Reductionen erhält man:

$$\beta' = -(c''-c')M; \quad \gamma' = -(b'-b'')M; \quad \delta' = -(b'c''-b''c)M.$$
$$\beta'' = +(c'''-c'')M; \quad \gamma'' = +(b''-b''')M; \quad \delta'' = +(b''c'''-b'''c'')M.$$
$$\beta''' = -(c-c''')M; \quad \gamma''' = -(b'''-b)M; \quad \delta''' = -(b'''c-bc''')M.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$A = -M^3(b''c'-b'c'').(b''c'''); \quad A' = -M^3(b'''c''-b''c''')((b''c''')-(b'''c));$$
$$A'' = -M^3(bc'''-b'''c)(b'c'').$$

Eine weitere Reduction ergiebt:

$$(bc'''-b'''c)(b'c'') - (b'''c)(b'''c''-b''c''') = (c'''b'-c'b''')(b''c''').$$

Hieraus folgt $A + A' + A'' = M^3(b'c'')(b''c''')$, und als Resultat:

$$\text{IV.}\quad \frac{\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''}{ABCD} = \frac{M^3}{q\,q'\,q''\,q'''}.$$

5. Die Ausdrücke II. und IV. bedürfen leichter Modificationen in den Fällen, wo der zu Grunde gelegte barycentrische Ausdruck für eine gerade Linie oder Ebene nicht unmittelbar anzuwenden ist. Um keine Lücke zu lassen, mögen diese Fälle noch angegeben werden.

Man sieht, dafs wenn die Linie, deren Ausdruck ist

$$A + xB + (a + bx)\,C,$$

mit der Fundamentallinie AB zusammenfallen soll, man nur $a = b = 0$ zu setzen hat.

Soll dagegen diese Linie mit AC zusammenfallen, so betrachte man zunächst den allgemeinen Ausdruck: $A + exB + (a + bx)\,C$, wo e ein constanter Coëfficient ist. Die durch diesen Ausdruck dargestellte Linie fällt mit AC zusammen, wenn $e = 0$. Setzt man nun $ex = y$, so geht der Ausdruck über in: $A + yB + \left(a + \frac{b}{e}y\right)C$, woraus zu ersehen ist, dafs man, wenn die gegebene Linie AC selbst sein soll, in dem Ausdrucke II. nur b als eine unendliche Gröfse anzusehen hat. Man erhält demnach für ein Dreieck, welches von der Fundamentallinie AC und den beiden andern: $A + xB + (a' + b'x)\,C$, $A + xB + (a'' + b''x)\,C$ eingeschlossen wird, den Ausdruck:

$$\frac{(a'' - a')^2}{(1 + a')(1 + a'')(b' - b'' - a' + a'' + a''b' - a'b'')}.$$

Soll die Linie mit BC zusammenfallen, so darf man nur a als unendlich ansehen.

Soll dieselbe Linie durch den Fundamentalpunct A gehen, so mufs $a = 0$ sein. Soll sie durch B gehen, $b = 0$. Soll dieselbe aber durch C gehen, so müfste ihr Ausdruck eigentlich sein:

$$A + gB + yC.$$

Nach der zum Grunde gelegten Form findet man aber das richtige Resultat, wenn man nur $a = -gb = \infty$ setzt. Es ergiebt sich dann nach II.:

$$\frac{\Pi\Pi'\Pi''}{ABC} = \frac{(a' - a'' + g(b' - b''))^2}{1 + g + a' + gb'.1 + g + a'' + gb''.q'}.$$

Man könnte auch das Dreieck für diesen Fall direct aus den Ausdrük-

ken der drei Geraden berechnen, und würde dann genau das nemliche Resultat finden.

6. Soll die Ebene: $A + xB + yC + (a + bx + cy)D$ mit der Fundamental-Ebene zusammenfallen, so muſs $a = b = c = 0$ sein. Soll sie mit ABD zusammenfallen, so darf man in dem Ausdrucke IV. nur c als unendlich betrachten. Soll sie mit ACD zusammenfallen, so ist $b = \infty$, und, wenn sie mit BCD zusammenfällt, $a = \infty$ zu setzen.

Soll diese Ebene durch einen der Fundamentalpuncte A, B, C gehen, so darf man nur resp. a, b, c, $= 0$ setzen. Geht sie durch D, so muſs ihr Ausdruck die Form haben:

$$A + xB + (e + fx)C + yD.$$

In diesem Falle hat man in dem Ausdrucke IV. $b = -fc$, $a = -ec$ zu setzen, und c als unendlich anzusehn.

37.

Combinatorisch-analytische Abhandlung, enthaltend den Beweis der vier Summationsformeln Band 3. Heft 2. S. 207. d. Journals.

(Von Herrn Pr. *Gudermann* in Cleve.)

1.

Die zu beweisenden Formeln sind einfache Folgerungen aus einem Satze, den wir in einer Allgemeinheit entwickeln und aufstellen werden, welche überflüssig sein würde, wenn es bloſs auf den Beweis der vier Summationsformeln ankäme. Die Potenz $(x+z)^n$ kann nämlich, wenn n eine positive ganze Zahl ist, also entwickelt werden, daſs das allgemeine Glied des in der Form einer geschlossenen Reihe erhaltenen Ausdrucks die Form $\varphi x.\psi z$ erhält, wie im Newtonschen Binomialtheoreme; aber der von uns aufzustellende Ausdruck wird, auſser einer willkürlich zu bestimmenden positiven ganzen Zahl m, noch $m+n+1$, und also beliebig viele, völlig willkürliche Gröſsen $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc. enthalten, so daſs er nicht bloſs der allgemeinste Ausdruck für die Potenz $(x+z)^n$, sondern bei aller Allgemeinheit noch eben so einfach sein wird, wie es die Newtonsche Formel selbst ist. Es wird hier ein combinatorisches Theorem vorausgeschickt, worauf die Herleitung des gesuchten Ausdrucks gegründet ist. Es wird $\underset{A}{\overset{r}{C}}$ eine aus den Elementen einer Scale A gebildete Combinationsklasse des $r$ten Grades bezeichnen, wenn die Wiederholungen der Elemente in den Formen gestattet sind; sind diese aber verboten, so dient das Zeichen $\underset{A}{\overset{r}{C'}}$. Ich nehme die Reihe oder primitive Scale $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc., welche mit völlig willkürlichen Elementen besetzt ist (für die Arithmetik sind sie Zahlen) und leite daraus besondere Scalen her, die ich wie folgt bezeichne:

$$(1) = \overset{0}{a},$$
$$(2) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a},$$
$$(3) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a},$$
$$\vdots$$
$$(\alpha) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots . \overset{\alpha-1}{a},$$
$$(n+\alpha) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots . \overset{n}{a}, \overset{n+1}{a}, \ldots . \overset{n+\alpha-1}{a},$$

Wird alsdann der folgende Ausdruck gebildet:

$$\varphi(r,n) = S(-1)^\alpha . \overset{\alpha}{\underset{(n+\alpha-1)}{C'}} . \overset{\beta}{\underset{(n+\alpha)}{C}} \qquad \text{conditione: } (\alpha+\beta=r),$$

in welchem α und β veränderliche positive ganze Zahlen sind, welche der beigefügten Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=r$ Genüge leisten und das dem allgemeinen Gliede vorgesetzte Zeichen S das Summationszeichen ist, so ist immer:

$$\varphi(r,n) = 0, \text{ wenn } r > 0.$$

Denn für $r=0$ haben wir offenbar $\varphi(0,n)=1$.

Die Veränderlichkeit der Scalen $(n+\alpha-1)$ und $(n+\alpha)$, die das allgemeine Glied aufweiset, macht einige Schwierigkeit, und es ist eine wohl zu bemerkende Eigenthümlichkeit, daſs die Scale, woraus die Combinationsformen mit unbedingten Wiederholungen gebildet sind, immer ein Glied oder Element mehr enthalten muſs, als die Scale, woraus die Combinationsformen mit verbotenen Wiederholungen zusammengesetzt werden *).

2.

Um den Beweis zu führen, bemerke man, daſs nach den Grundregeln des Combinirens:

$$\overset{\beta}{\underset{(n+\alpha)}{C}} = \overset{\beta}{\underset{(n+\alpha-1)}{C}} + \overset{n+\alpha-1}{a} . \overset{\beta-1}{\underset{n+\alpha}{C}} \text{ und}$$
$$\overset{\alpha+1}{\underset{(n+\alpha)}{C'}} = \overset{\alpha+1}{\underset{(n+\alpha-1)}{C'}} + \overset{n+\alpha-1}{a} . \overset{\alpha}{\underset{(n+\alpha-1)}{C'}}$$

ist, und daſs man aus diesen beiden Gleichungen das Element $\overset{n+\alpha-1}{a}$ eliminiren kann. Die neue Gleichung enthält dann freilich dieses Element

*) Über den hier vorkommenden Gebrauch des Zeichens S sehe man Rothe's Theorie combinatorischer Integrale. Da aber nach Eulers Bezeichnung $Sy = \Sigma y + y +$ const. ist, so habe ich das von Rothe gebrauchte Zeichen Σ in S abgeändert.

noch, aber nicht mehr explicite. Dadurch erhält man:

$$\underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta}{C}} = \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\beta}{C}} - \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha+1}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta-1}{C}} + \underset{(n+\alpha)}{\overset{\alpha+1}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta-1}{C}},$$

und wird dieser Ausdruck substituirt, so ist:

$$\varphi(r,n) = \underset{\alpha+\beta=r}{S}(-1)^{\alpha}.\, \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\beta}{C}} + \underset{\alpha+\beta=r}{S}(-1)^{\alpha+1}.\, \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\alpha+1}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta-1}{C}} + \underset{\alpha+\beta=r}{S}(-1)^{\alpha}.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\alpha+1}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha)}{\overset{\beta-1}{C}}.$$

Wird er nun reducirt (man sehe die einfachen Regeln der erwähnten Schrift), so findet man:

$$\varphi(r,n) = S(-1)^{\alpha}.\, \underset{(n+\alpha-2)}{\overset{\alpha}{C'}} \,.\, \underset{(n+\alpha-1)}{\overset{\beta}{C}} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Also:

$$\varphi(r,n) = \varphi(r,n-1).$$

Man hat also auch $\varphi(r,1) = \varphi(r,n)$, und da $\underset{(\alpha)}{\overset{\alpha}{C'}}$ nur noch eine einzige Combinationsform begreift, nämlich: $\overset{0}{a}\overset{1}{a}\overset{2}{a} \ldots \overset{\alpha-1}{a}$, so kann der Rest des Beweises der Kürze wegen hier wegbleiben, wofern man aus der Formel $\varphi(r,n) = \varphi(r,n-1)$ nicht sogleich $\varphi(r,n) = \varphi(r,0)$ schliefsen will; denn $\varphi(r,0)$ ist offenbar $=0$, weil $\underset{(\alpha-1)}{\overset{\alpha}{C'}} = 0$ ist.

Zusatz. Nimmt man an, dafs $\overset{n}{a} = \overset{n+1}{a} = \overset{n+2}{a} \ldots = \overset{n+\alpha}{a} = 0$ sei, so haben alle Glieder des Ausdrucks $\varphi(r,n)$ eine gemeinschaftliche Scale $(n) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n-1}{a}$ mit n Elementen, und für diesen einfachen Fall ist die Wahrheit des Satzes $\varphi(r,n) = 0$ allgemein bekannt.

3.

Die bewiesene Formel kann auch also dargestellt werden:

$$S(-1)^{\alpha}.\, \underset{(m-\beta)}{\overset{\alpha}{C'}} \,.\, \underset{(m-\beta+1)}{\overset{\beta}{C}} = 0,$$

wenn wieder $\alpha+\beta = r$ die Bedingungs-Gleichung ist; denn es ist $n+\alpha-1 = n+r-1-\beta$, und man hat also nur m für $n+r-1$ gesetzt, welches, da n unbestimmt war, erlaubt ist und die Allgemeinheit der Formel um nichts vermindert.

Führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$[x|\overset{n}{a}] = (x-\overset{0}{a})(x-\overset{1}{a})(x-\overset{2}{a}) \ldots (x-\overset{n-1}{a}),$$

so ist bekanntlich nach den Elementen des combinatorischen Analysis:

$$1.\quad [x|\overset{n}{a}] = S(-1)^{\alpha}.\, \underset{(n)}{\overset{\alpha}{C'}}\, x^{n-\alpha},$$

$$2.\quad \frac{1}{[x|\overset{n}{a}]} = S\underset{(n)}{\overset{\alpha}{C}}.\, x^{-n-\alpha},$$

und die Reihe (2.) bricht dann nicht ab, wohl aber die Reihe (1.). Durch diese Formeln sind die Producte $[x|\overset{n}{a}]$ und ihre reciproken Werthe auf Potenzen von x zurückgeführt. Daher wird man nach geschehener Umkehrung die Potenzen von x durch Producte von der Form $[x|\overset{n}{a}]$ ausgedrückt erhalten. Für die Formel (1.) werden wir aber andere an die Stelle setzen, welche allgemeiner sind als sie. Dabei kommen aber die numerischen Facultäten in Anwendung, deren Beziehungsart nach Vandermonde gewählt wird, weil sie vor der von Kramp gewählten viele Vorzüge hat. Es sei nämlich:

$[x,\overset{n}{d}] = x(x-d)(x-2d)\ldots(x-nd+d)$ und $[x,\overset{-n}{d}] = \dfrac{1}{(x+d)(x+2d)\ldots(x+nd)}$,

und wenn $d = +1$ ist, so werde gesetzt:

$[\overset{n}{x}] = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ und $[\overset{-n}{x}] = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

Die sogenannten Permutationszahlen sind zwar ebenfalls Facultäten; aber für sie sei des häufigeren Gebrauches wegen noch einfacher:

$0' = 1$; $1' = 1$; $2' = 1.2$; $3' = 1.2.3$; .... also $\alpha' = [\overset{\alpha}{\alpha}] = [1,\overset{\alpha}{-1}] = \dfrac{1}{[\overset{-\alpha}{0}]}$.

4.

Nehmen wir nun nach diesen Vorbereitungen die folgende Scale zweitheiliger Elemente:

$(x,m) = (x-\overset{0}{a}),\ (x-\overset{1}{a}),\ (x-\overset{2}{a}),\ \ldots\ (x-\overset{m-1}{a})$ und daneben noch:

$(m) = \overset{0}{a},\quad \overset{1}{a}\quad \overset{2}{a}\quad \ldots\quad \overset{m-1}{a},$

so haben wir die beiden Formeln:

$$3.\quad \underset{(x,m)}{\overset{n}{C}} = \frac{[\overset{n}{m}]}{n'}.x^n - \frac{[m-\overset{n-1}{1}]}{(n-1)'}.\underset{(m)}{\overset{1}{C'}}.x^{n-1}\ldots + (-1)^\alpha\frac{[m-\overset{n-\alpha}{\alpha}]}{(n-\alpha)'}.\underset{(m)}{\overset{\alpha}{C'}}.x^{n-\alpha}\ldots + (-1)^n.\underset{(m)}{\overset{n}{C'}}.x^0,$$

$$4.\quad \underset{(x,m)}{\overset{n}{C'}} = \frac{[\overset{n}{m,-1}]}{n'}.x^n - \frac{[\overset{n-1}{m+1,-1}]}{(n-1)'}.\underset{(m)}{\overset{1}{C}}.x^{n-1}\ldots + (-1)^\alpha\frac{[\overset{n-\alpha}{m+\alpha,-1}]}{(n-\alpha)'}.\underset{(m)}{\overset{\alpha}{C}}.x^{n-\alpha}\ldots + (-1)^n.\underset{(m)}{\overset{n}{C}}.x^0.$$

Man kann diese aus den Formeln (1. und 2.) leicht herleiten; man kann sie aber auch unmittelbar aus den Gesetzen des Combinirens finden, wobei dann der Gebrauch der ungeschlossenen Reihe (2.), welcher anstöfsig sein könnte, unnöthig ist. Die Formel (4.) findet man endlich auch in „*Dissertatio analytica de functionibus quibusdam symmetricis, auctore*

J. F. Posselt," aus einem analytischen Ausdrucke für $\overset{n}{\underset{(m)}{C}}$ sehr einfach hergeleitet.

Diese beiden Formeln sind sich nun, wie man sieht, sehr ähnlich, und sie gestatten eine Reversion, wobei das früher bewiesene combinatorische Theorem $\varphi(r,n)=0$ in Anwendung kommt. Es hilft aber die Bemerkung, dafs es nur nöthig ist, die eine dieser Formeln umzukehren; das Resultat stimmt nämlich mit der Formel, welche durch die zweite Reversion gefunden wird, im Wesen überein.

5.

Nehmen wir also die Formel $\overset{n}{\underset{(x,m)}{C'}} = S(-1)^{\alpha}\frac{[m-\alpha]^{n-\alpha}}{(n-\alpha)'}.\overset{\alpha}{\underset{(m)}{C'}}.x^{n-\alpha}$, um sie zur Reversion geeigneter zu machen. Weil nämlich $(-1)^{n-\alpha}.\frac{[m-\alpha]^{n-\alpha}}{(n-\alpha)'}$ $=[-m+n-1]^{n-\alpha}$ ist, so erhalten wir, $m+n$ statt m setzend, weil ohnehin $\overset{n}{\underset{(x,m)}{C'}}=0$ ist, wenn $n>m$:

$$(-1)^n.\overset{n}{\underset{(x,m+n)}{C'}} = S\frac{[-m-1]^{n-\gamma}}{(n-\gamma)'}.\overset{\gamma}{\underset{(m+n)}{C'}}.x^{n-\gamma}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $(-1)^{\beta}.\overset{\beta}{\underset{(m+n+1)}{C}}$ und setzen wir dann α für n, so giebt eine Summation nach der Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=n$:

$$(-1)^n.\underset{\alpha+\beta=n}{S}\overset{\alpha}{\underset{(x,m+\alpha)}{C'}}.\overset{\beta}{\underset{(m+\alpha+1)}{C}} = S\frac{[-m-1]^{\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)'}x^{\alpha-\gamma}.(-1)^{\beta}\underset{\alpha+\beta=n}{\overset{\gamma}{\underset{(m+\alpha)}{C'}}.\overset{\beta}{\underset{(m+\alpha+1)}{C}}}.$$

Führen wir zu gröfserer Deutlichkeit auf der rechten Seite eine neue Veränderliche $\alpha-\gamma=\delta$ ein und setzen wir zur Abkürzung $m+\alpha=\mu$, so ist, wenn wir α eliminiren, $\alpha=\gamma+\delta$ und $\mu=m+\delta+\gamma$, also $\gamma+\delta+\beta=n$, und daher:

$$(-1)^n.\underset{\alpha+\beta=n}{S}\overset{\alpha}{\underset{(x,m+\alpha)}{C'}}.\overset{\beta}{\underset{(m+\alpha+1)}{C}} = S\frac{[-m-1]^{\delta}}{\delta'}.x^{\delta}.(-1)^{\beta}\underset{\substack{\beta+\gamma+\delta=n\\ \mu=m+\gamma+\delta}}{\overset{\gamma}{\underset{(\mu)}{C'}}.\overset{\beta}{\underset{(\mu+1)}{C}}}.$$

Nun sind aber in Anwendung des Theorems $\varphi(n-\delta, m+\delta+1)=0$ die Coëfficienten von $\frac{[-m-1]^{\delta}}{\delta'}.x^{\delta}$ für die einzelnen Werthe $\delta=0,1,2,3$, etc. gleich Null, wobei nur der für $\delta=n$, also für $\beta=\gamma=0$ ausgenommen und $=1$ ist; also hat man

$$[-m-1]^{n}_{n'}.x^n = (-1)^n.\,S\;\overset{\beta}{\underset{(m+\alpha+1)}{C}}\;.\;\overset{\alpha}{\underset{(x,\,m+\alpha)}{C'}}\qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(-1)^n$, setzt dann $x+z$ für x und $-\overset{0}{a}$ für $x-\overset{0}{a}$; auch $-\overset{1}{a}$ für $x-\overset{2}{a}$; $-a$ für $x-\overset{2}{a}$; u. s. w., so hat man den allgemeinsten Ausdruck für $(x-z)^n$; nämlich:

$$5.\quad (x+z)^n = n'.[m]^{-n}.\,S\;\overset{\beta}{\underset{(x,\,m+\alpha+1)}{C}}\;.\;\overset{\alpha}{\underset{(z,\,m+\alpha)}{C'}}\qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Es ist dann aber die Scale $(z, m+\alpha) = (z-\overset{0}{a}), (z-\overset{1}{a}), (z-\overset{2}{a}) \ldots\ldots (z-\overset{m+\alpha-1}{a})$

und $(x, m+\alpha+1) = (x+\overset{0}{a}), (x+\overset{1}{a}), (x+\overset{2}{a}) \ldots\ldots (x+\overset{m+\alpha}{a})$,

so dafs also die zweite Scale ein Element mehr enthält als die erste. Der Ausdruck enthält überhaupt die folgenden ersten Elemente der primitiven Scale:

$$\overset{0}{a},\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a},\ \ldots\ldots\ \overset{m}{a},\ \overset{m+1}{a},\ \ldots\ldots\ \overset{m+n}{a},$$

deren Menge $= m+n+1$, und da m willkürlich ist, also ebenfalls willkürlich ist. Diese Elemente können willkürliche Werthe haben und können selbst einzeln oder sämmtlich Null sein. In dem Falle aber, dafs einige dieser Elemente gleich sind, werden auch eben so viele Elemente in jeder der beiden Scalen $(z, m+\alpha)$ und $(x, m+\alpha+1)$ einander gleich und man hat sie dann aber gleichwohl so zu behandeln, als wären sie verschieden. Einfacher wird der Ausdruck z. B., wenn $\overset{m}{a} = \overset{m-1}{a} \ldots\ldots = \overset{m+1}{a} \ldots\ldots = 0$ gesetzt wird. Werden alle Elemente $= 0$ gesetzt, so erhält man die Newtonsche Formel, wenn auch nicht in der einfachsten Gestalt; diese findet man dann für $m=0$. Wird $m=0$ gesetzt, so erhalten wir, weil $\overset{\alpha}{\underset{(z,\alpha)}{C'}} = [z|a]^{\alpha}$ ist, die specielle Formel, aus der wir die Summationsformeln des Herrn Steiner herleiten werden. Da die allgemeine Formel (5.) zu einer Reihe interessanter Folgerungen Anlafs giebt, wir aber hier der Kürze wegen darauf nicht eingehen wollen, so wenden wir uns zu der Herleitung der erwähnten Summationsformeln, indem wir in der That $m=0$ setzen und dadurch die folgende Formel erhalten:

$$6.\quad (x+z)^n = S\;\overset{\beta}{\underset{(x,\,\alpha+1)}{C}}\;.\;[z|a]^{\alpha}\qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

6.

Wir müssen aber von der Allgemeinheit der Formel (6.) noch einiges fahren lassen, wenn wir die Formeln des Herrn Steiner finden

wollen, und $x=0$ setzen. Setzen wir zugleich $\overset{0}{a}=0$, so haben wir:

$$z^n = \underset{(\alpha)}{S}\overset{\beta}{C}.[z|\overset{\alpha}{a}] \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n),$$

und es ist dann $(\alpha)=(\overset{1}{a},\overset{2}{a},\overset{3}{a},\ldots.\overset{\alpha}{a})$ die Scale. Nehmen wir ferner $z=x^2$, $\overset{1}{a}=1^2$, $\overset{2}{a}=2^2$, $\overset{3}{a}=3^2$, ... α^2, so ist:

$$[z|\overset{\alpha}{a}]=x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)\ldots.(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)=x.[x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}],$$

und also:

$$7.\quad x^{2n-1} = \underset{(\alpha)}{S}\overset{\beta}{C}.[x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}] \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Wenn wir aber, statt durch x auf der linken Seite zu dividiren, mit $x=(x+\alpha)-\alpha$ auf der rechten Seite multipliciren, so erhalten wir:

$$8.\quad x^{2n} = \underset{(\alpha)}{S}\overset{\beta}{C}\{[x+\overset{2\alpha}{\alpha]}-\alpha.[x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}]\} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

oder $x^{2n} = \underset{(\alpha)}{S}\overset{\beta}{C}\{[x+\alpha-\overset{2\alpha}{1}]+\alpha[x+\alpha-\overset{2\alpha-1}{1}]\}$,

und aus diesen Formeln finden sich die des Herrn Steiner, unmittelbar. Da nämlich allgemein:

$$\triangle[x,\triangle \overset{n}{x]} = n.[x,\triangle \overset{n-1}{x]}.\triangle x, \text{ ähnlich mit } \partial x^n = n.x^{n-1}.\partial x,$$

$$\triangle^r[x,\triangle \overset{n}{x]} = [\overset{r}{n}].[x,\triangle \overset{n-r}{x]}.\triangle x^r, \text{ ähnlich mit } \partial^r x^n = [\overset{r}{n}].x^{n-r}.\partial x^r,$$

$$\Sigma[x,\triangle \overset{n}{x]}\triangle x = \frac{[x,\triangle \overset{n+1}{x]}}{n+1}, \text{ ähnlich mit } \int x^n\partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\Sigma^r[x,\triangle \overset{n}{x]}\triangle x^r = [\overset{-r}{n}].[x,\triangle \overset{n+r}{x]}, \text{ ähnlich mit } \int^r x^n\partial x^r = [n].x^{n+r},$$

welche Formeln ich beiläufig zur Rechtfertigung meiner Bezeichnung der Facultäten aufstelle; da ferner allgemein:

$$\overset{x}{S}\varphi x = \Sigma\varphi x + \varphi x + \text{const.},$$

und also:

$$\overset{x}{S}[x,\triangle \overset{n}{x]} = \frac{[x+\triangle x,\triangle \overset{n+1}{x]}}{(n+1)\triangle x},$$

wie auch

$$\overset{x}{S^r}[x,\triangle \overset{n}{x]} = [x+r\triangle x,\triangle \overset{n+r}{x]}.\frac{[\overset{-r}{n}]}{\triangle x^r}$$

ist, so giebt die Anwendung dieser Formel auf (7.), wobei $\triangle x=1$ ist, auf der Stelle

$$9.\quad \overset{x}{S^r}x^{2n-1} = \underset{(\alpha)}{S}\overset{\beta}{C}[2\alpha-\overset{-r}{1}].[x+r+\alpha-\overset{2\alpha+r-1}{1}] \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Wird hierin $n+1$ für n gesetzt, so hat man die Formel III., wovon die

Formel I. ein specieller Fall ist. Unsere Formel (8.) giebt eben so:

$$\overset{x}{S}{}^r x^{2n} = S\overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}}\left\{\frac{x+r+\alpha}{2\alpha+r}-\tfrac{1}{2}\right\}.[2\alpha]^{-r+1}.[x+r+\alpha-1]^{2\alpha+1-1},$$

und da $\frac{x+r+\alpha}{2\alpha+r}-\frac{1}{2}=\frac{x+\frac{1}{2}r}{2\alpha+r}$ ist, so hat man

10. $\overset{x}{S}{}^r x^{2n} = \{S\overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}}[2\alpha]^{-r}.[x+r+\alpha-1]^{2\alpha+r-1}\}.(x+\frac{1}{2}r)$ cond. $(\alpha+\beta=n)$.

Wird auch hierin $n+1$ für n gesetzt, so hat man die zu beweisende Formel IV., wovon die Formel II. ein specieller Fall ist.

Die Umkehrung der Formel (2.) giebt aber die neue Formel:

$$11.\quad x^{-n} = S(-1)^\alpha.\overset{\alpha}{\underset{(\beta+1)}{C'}}.\frac{1}{[x|a]^{\beta}} \quad \text{cond. } (\beta = n\alpha),$$

welche ich nur der Vollständigkeit wegen hierher stelle. Man könnte auch in ihr $x+z$ für z, dann $-\overset{0}{a}$ für $x-\overset{0}{a}$; $-\overset{1}{a}$ für $x-\overset{1}{a}$; etc. wie vorhin setzen und erhielte dann für $(x+z)^{-n}$ eine ins Unendliche fortgehende Reihe.

7.

Der Beweis der Summationsformeln des Herrn Steiner forderte eine nähere Bestimmung der Elemente $\overset{0}{a}$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, etc.; statt derselben setzen wir nun aber in der Formel (1.) $\overset{0}{a}=0$, $\overset{1}{a}=d$, $\overset{2}{a}=2d$, ... allgemein $\overset{\alpha}{a}=\alpha.d$, und erhalten:

$$[x,d]^n = S(-1)^\alpha \overset{\alpha}{\underset{(n)}{C'}}.d^\alpha.x^{n-\alpha},$$

und es ist die Scale $(n)=0,1,2,3,\ldots.(n-1)$. Wir setzen $\overset{\alpha}{C'}={}^{+n}\overset{\alpha}{f}$.

In der Formel (2.) setzen wir $\overset{0}{a}=-d$, $\overset{1}{a}=-2d$, $\overset{2}{a}=-3d$, etc. allgemein $\overset{\alpha}{a}=-(\alpha+1)d$, und erhalten dadurch:

$$[x,d]^{-n} = S(-1)^\alpha \overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.d^\alpha.x^{-n-\alpha},$$

die hier vorkommende Scale (n) ist $1, 2, 3, \ldots. n$, und indem wir $\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}={}^{-n}\overset{\alpha}{f}$ setzen, finden wir daſs die Formel

$$12.\quad {}^{n-1}\overset{r}{f} = {}^{n}\overset{r}{f}+n.{}^{n}\overset{r-1}{f}$$

immer richtig ist, es mag n positiv oder negativ sein. Daher ist auch immer:

$$13.\quad [x,d]^n = S(-1)^\alpha\, {}^{n}\overset{\alpha}{f}.d^\alpha.x^{n-\alpha},$$

es mag n positiv oder negativ sein. Die umgekehrte Formel ist eben so allgemein:

$$14.\quad x^n = S\,{}^{\alpha-n}\overset{\alpha}{f}.\,[x, \overset{n-\alpha}{d}\,].\,d^\alpha,$$

und die beiden Formeln brechen nur dann ab, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Man kann dann dieselben auch so ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} [x, \overset{n}{d}] &= S\,(-1)^\alpha\,{}^{n}\overset{\alpha}{f}.\,d^\alpha.\,x^\beta \\ x^n &= S\,{}^{-\beta}\overset{\alpha}{f}\,[x, \overset{\beta}{d}].\,d^\alpha \end{aligned}\right\}\ \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

In Anwendung der letzten Formel erhält man z. B. auf der Stelle:

$$1^n + 2^n + 3^n \ldots + x^n = \overset{x}{S} x^n = S\,{}^{-\beta}\overset{\alpha}{f}\,\frac{[x+\overset{\beta+1}{1}]}{\beta+1} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

$$\text{und}\quad \overset{x}{S}{}^r x^n = S\,{}^{-\beta}\overset{\alpha}{f}\,[\overset{-r}{\beta}].\,[x+\overset{\beta+r}{r}] \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Die Functionen ${}^{n}\overset{1}{f}$, ${}^{n}\overset{2}{f}$, ${}^{n}\overset{3}{f}$ etc. können auf viele verschiedene Arten durch n ausgedrückt werden, so daſs man ihre Werthe auch dann, wenn n keine ganze Zahl ist, zu berechnen vermag*).

8.

Wenn man (allgemeiner) zur Scale nimmt $(n) = a,\ a-d,\ a-2d,$ $\ldots\ (a-nd+d)$ und $\underset{(n)}{\overset{r}{C}}{}'$ mit $\overset{r}{[}a, \overset{n}{d}]$ bezeichnet; dann zur Scale nimmt: $(-n) = -(a+d),\ -(a+2d),\ -(a+3d), \ldots -(a+nd)$ und die Combinationsklasse $\underset{(-n)}{\overset{r}{C}}$ mit $\overset{r}{[}a, \overset{-n}{d}]$ bezeichnet, so findet man die folgenden drei Fundamentalformeln:

$$15.\quad \overset{r}{[}a+d, \overset{n}{d}] = \overset{r}{[}a, \overset{n-1}{d}] + (a+d).\overset{r-1}{[}a, \overset{n-1}{d}],$$

$$16.\quad \overset{r}{[}a, \overset{n}{d}] = \overset{r}{[}a, \overset{n-1}{d}] + (a-nd+d).\overset{r-1}{[}a, \overset{n-1}{d}]$$

$$17.\quad \overset{r}{[}a+d, \overset{n}{d}] = \overset{r}{[}a, \overset{n}{d}] + n.\overset{r-1}{[}a, \overset{n-1}{d}].d,$$

welche ebenfalls immer richtig sind, es mag n eine positive oder auch negative ganze Zahl sein, und man findet auch:

---

*) Die Werthe von ${}^{\pm n}f$, unter der Annahme daſs n eine ganze Zahl sei, findet man am weitesten hin berechnet in einer Inaugural-Dissertation des Herrn Professor Scherk, worin aber das durch die Formel (12.) gegebene Gesetz nicht nach seiner ganzen Allgemeinheit ausgedrückt ist. In den beiden Tabellen, welche sich eigentlich zu einer vereinigen müſsten, hat man also ${}^{+(k+1)}\overset{h}{f}$ für $\underset{k}{\overset{h}{C}}{}'$ und ${}^{-k}\overset{h}{f}$ für ${}'\underset{k}{\overset{h}{C}}$ zur Überschrift zu nehmen.

$$18.\quad (-1)^r . d^r . {}^{\pm n}\overset{r}{f} = \overset{r}{[}a, d\overset{\pm n}{]} \quad \text{für} \quad a = 0,$$

woraus man ersieht, dafs die gegenwärtigen Gröfsen wirklich allgemeiner sind, als die Gröfsen: ${}^{n}\overset{r}{f}$.

Die Formel (17.) hat am meisten Ähnlichkeit mit der die Facultäten betreffenden Formel:

$$\overset{}{[}a + d, d\overset{n}{]} = [a, d\overset{n-1}{]} + n . [a, d\overset{n-1}{]} . d,$$

welche ebenfalls sowohl für positive als für negative Werthe von n gilt.

Aus der Formel (17.) leitet man leicht die folgenden her:

$$19.\quad \triangle \overset{m}{[}x, \triangle x\overset{n}{]} = n . \overset{m-1}{[}x, \triangle x\overset{n-1}{]} . \triangle x,$$

$$20.\quad \triangle^r \overset{m}{[}x, \triangle x\overset{n}{]} = [n] . \overset{m-r}{[}x, \triangle x\overset{n-r}{]} . \triangle x^r,$$

$$21.\quad \Sigma \overset{m}{[}x, \triangle x\overset{n}{]} \triangle x = \overset{m+1}{[}x, \triangle \underset{\overline{n+1}}{x\overset{n+1}{]}} + \text{const.}$$

Also

$$\overset{x}{S} \overset{m}{[}x, \triangle x\overset{n}{]} \triangle x = \overset{m+1}{[}x, \triangle \underset{\overline{n+1}}{x\overset{n+1}{]}} + (n+1) \overset{m}{[}x, \triangle \underset{\overline{n+1}}{x\overset{n}{]}} \triangle x + \text{const.},$$

oder auch

$$\overset{x}{S} \overset{m}{[}x, \triangle x\overset{n}{]} \triangle x = \overset{m+1}{[}x + \triangle x, \triangle \underset{\overline{n+1}}{x\overset{n+1}{]}} + \text{const.},$$

und also:

$$22.\quad \overset{m}{[}x - rd, d\overset{n}{]} \ldots + \overset{m}{[}x - 2d, d\overset{n}{]} + \overset{m}{[}x - d, d\overset{n}{]} + \overset{m}{[}x, d\overset{n}{]} = \frac{\overset{m+1}{[}x + d, d\overset{n+1}{]} - \overset{m+1}{[}x - rd, d\overset{n+1}{]}}{(n+1)\, d},$$

diese Formel versagt für $n = -1$; übrigens gilt sie für jede positive und auch negative ganze Zahl n. Wenn $n = -1$ ist, so hat man eigentlich eine Reihe gleich hoher Potenzen gleichunterschiedener Zahlen zu addiren. Die für diesen Fall anzuwendende Formel leitet man leicht aus der Formel (14.) her.

9.

Wenn man die Formeln (3. und 4.) vornimmt, so vereinigen sie sich zu einer einzigen, nämlich zur folgenden:

$$23.\quad \overset{m}{[}x + z, d\overset{n}{]} = S [n - \underset{\overline{\beta'}}{a\overset{\beta}{]}} . \overset{\alpha}{[}x, d\overset{n}{]} . z^\beta \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = m).$$

Setzt man hierin $x = 0$, so findet man noch:

$$24.\quad \overset{m}{[}z, d\overset{n}{]} = S (-1)^\alpha [n - \underset{\overline{\beta'}}{a\overset{\beta}{]}} . {}^{n}\overset{\alpha}{f} . d^\alpha . z^\beta \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = m).$$

Nach dieser Formel kann man die Combinationsklassen gleichunterschiedener Zahlen bequem berechnen, und man kann die Rechnung immer

so einrichten, daſs keine subtractive Glieder vorkommen. Will man z. B. die Klasse $\overset{6}{[}15\overset{9}{]}$, für welche $d = 1$ ist, berechnen, so wird man die Formel also stellen:

$$\overset{m}{[}a + n - 1\overset{n}{]} = S(-1)^\beta [-(n - m + 1)\overset{\beta}{]}_{\beta'} . \overset{n-\beta}{{}^m f} . a^\beta,$$

und hat dann, weil $m = 5$, $n = 9$, $a = 7$ ist, die folgenden Zahlen:

1	. 67284	. 1	..... =	67284
5	. 22449	. 7	..... =	785715
15	. 4536	. 49	..... =	3333960
35	. 546	. 343	..... =	6554730
70	. 36	. 2401	..... =	6050520
126	. 1	. 16807	..... =	2117682
			Summe =	18909891 = $\overset{5}{[}15\overset{9}{]}$.

Aus der Formel (23.) schlieſst man auch noch als höheres Differential:

$$25. \quad \partial^r \overset{m}{[}x, d\overset{n}{]} = [n - m + r\overset{r}{]} . \overset{m-r}{[}x, d\overset{n}{]} . \partial x^r.$$

Also z. B. für $r = 1$:

$$\partial \overset{m}{[}x, d\overset{n}{]} = (n - m + 1) . \overset{m-1}{[}x, d\overset{n}{]} . \partial x.$$

10.

Eine Specialisirung der Formel (5.) führt zu der neuen Formel:

$$26. \quad (x + z)^n = n' . [m\overset{-n}{]} . S(-1)^\beta \overset{\beta}{[}x, d\overset{-(m+\alpha+1)}{]} . \overset{\alpha}{[}z - d, d\overset{m+\alpha}{]} \text{ cond. } (\alpha + \beta = n),$$

welche ebenfalls für jeden positiven oder negativen Werth von m gilt. Ein specieller Fall hiervon ist:

$$27. \quad a^n = n' [m\overset{-n}{]} . S^{-m-\beta} \overset{\alpha}{f} \overset{\beta}{[}a, d\overset{m+\beta}{]} . d^\alpha \quad \text{cond. } (\alpha + \beta = n).$$

Auf allgemeineren combinatorischen Beziehungen, welche in dieser Abhandlung nicht vorkommen, beruhet die folgende Formel:

$$28. \quad \overset{r}{[}x, d\overset{m+n}{]} = S \overset{\alpha}{[}x, d\overset{m}{]} . \overset{\beta}{[}x - md\overset{n}{]} \quad \text{cond. } (\alpha + \beta = r),$$

in welcher m und n willkürlich positiv oder auch negativ sein dürfen, aber r eine positive ganze Zahl ist. Man wird aus dieser Formel durch Differentiiren leicht mehre andere herleiten. Da endlich allgemein:

$$\varphi(x + z) = S \frac{\Delta^\alpha \varphi x}{\Delta x^\alpha} . [v, \Delta x\overset{\alpha}{]}_{\alpha'}$$

ist, so findet man auch noch:

$$29. \quad \overset{r}{[}x + z, d\overset{n}{]} = S [n\overset{\alpha}{]}_{\alpha'} . \overset{r-\alpha}{[}x, d\overset{n-\alpha}{]} . [z, d\overset{\alpha}{]},$$

welche Formel ebenfalls für jeden positiven oder negativen Werth von n gilt, und immer abbricht.

Man hat z. B.

$$\overset{r}{[}x,-\overset{n}{1]} = S\,\underset{\overline{\alpha},}{\overset{\alpha}{[n]}}\;\overset{r-\alpha}{{}^{n-\alpha}f}.\,\overset{\alpha}{[x,-1]},$$

und da $\overset{5}{[}\overset{9}{15]} = \overset{5}{[}7,-\overset{9}{1]}$ ist, so haben wir bei der Berechnung von $\overset{5}{[}\overset{9}{15]}$ nach dieser Formel folgende Zahlen:

1 .	67284 .	1	. . . . . . =	67284
9 .	6769 .	7	. . . . . . =	426447
36 .	735 .	56	. . . . . . =	1481760
84 .	85 .	504	. . . . . . =	3598560
126 .	10 .	5040	. . . . . . =	6350400
126 .	1 .	55440	. . . . . . =	6985440

Snmme $= 18909891 = \overset{5}{[}\overset{9}{15]}$

und dieses Resultat stimmt mit dem vorigen völlig überein.

Die Einfachheit und Allgemeinheit dicser Formeln macht sie einiger Aufmerksamkeit werth, und ich habe sie darum hier aufgestellt, obgleich sie mit den Formeln des Herrn Steiner fast nichts als ihren combinatorisshen Ursprung gemein haben.

Was endlich die höheren Differentiale ganzer Combinationsklassen betrifft, so hat man auch noch allgemeiner die beiden Formeln:

$$\partial^r \underset{(x,m)}{\overset{n}{C'}} = \overset{r}{[m-n+r]}.\underset{(x,m)}{\overset{n-r}{C'}}.\,\partial x^r,$$

$$\partial^r \underset{(x,m)}{\overset{n}{C}} = \overset{r}{[m+n-r,-1]}.\underset{(x,m)}{\overset{n-r}{C}}.\,\partial x^r,$$

und es können daraus die höheren Integrale geschlossen werden, nur daſs auch dabei Fälle sich finden, in welchen die allgemeinen Formeln versagen.

Cleve, im Februar 1829.

38.
Einige Nachrichten von Büchern.

1. „Recension des Lehrbegriffs der höhern Körperlehre von Herrn Prof. Lubbe. XII und 255 S. Berlin bei Riemann, 1828. gr. 8." Verfaſst und eingesendet von Herrn Moritz Kartscher zu Berlin.

Dieses Buch verdient schon darum Aufmerksamkeit, weil es einen wichtigen, schwierigen und noch wenig untersuchten Theil der höheren Mathematik behandelt. Die folgende kurze Übersicht des Inhalts dürfte daher nicht unwillkommen sein.

No. 1. bis 9. handelt von einigen allgemeinen Sätzen der analytischen Körperlehre, von den Linien doppelter Krümmung, von der Berührung der Flächen, von der Krümmungs-Kugel. Man findet hier was durch die Arbeiten vornehmlich von Monge und Lagrange bekannt ist, in gedrängter Kürze zusammengestellt.

In No. 10. bis 14. werden die Gleichungen behandelt, welche sich aus der Betrachtung der eingehüllten und einhüllenden Flächen ergeben. Die überall (vornehmlich in No. 14.) hinzugefügten Beispiele und Hinweisungen auf die Geometrie, wie auch die Bezeichnung, deren sich der Verf. für die Gleichungen bedient, kommen dem Vortrage sehr zu Hülfe. Die sorgfältige Unterscheidung der drei Formen des allgemeinen Integrals, in Beziehung auf die eingehüllten und einhüllenden Flächen und auf die erzeugende Curve, giebt den nachfolgenden Untersuchungen noch mehr Deutlichkeit.

In No. 15. und 16. werden die totalen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, welchen nur eine primitive Gleichung zu Grunde liegt, und in No. 17. u. 18. die partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung integrirt. Die Hinweisungen auf seine früher erschienene Schrift über den höheren Calcul hätte der Verf. vielleicht vermeiden können. Sie sind hin und wieder etwas störend, wie z. B. in No. 17. im Anfange.

In No. 19. werden die Bedingungs-Gleichungen gegeben, unter welchen eine partielle Differential-Gleichung der ersten Ordnung mit einer unbestimmten Function, integrirbar ist; und dann erst in No. 20. werden die totalen Differential-Gleichungen, welchen zwei primitive Gleichungen zum Grunde liegen, integrirt.

Mit No. 21. geht der Verf. zu den partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung über und untersucht hier zuvörderst ihre Entstehung durch Elimination der unbestimmten Functionen. Was in No. 22. und No. 23. I. über die Entstehung der partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung durch Elimination von willkürlichen und von beständigen Gröſsen beigebracht wird, verbreitet viel Licht über die Natur der partiellen Differential-Gleichungen überhaupt.

Die in No. 23. II. angestellten Untersuchungen über die Bestimmung der unbestimmten und willkürlichen Functionen sind auf den Fall beschränkt, daſs die Functionen einerlei Grundgröſsen haben. Es wären auch die von Laplace und anderen Mathematikern über diesen Gegenstand, für den Fall daſs die Functionen verschiedene Grundgröſsen haben, gegebenen Resultate zu wünschen gewesen.

In No. 24. betrachtet der Verf., als Anwendung des bisher von ihm Vorgetragenen, mehrere besondere Flächen.

No. 25. bis 29. handelt von der Integration einer partiellen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung und des ersten Grades, welche das erste Integral $P-f(Q)=0$ hat, wo P und Q Functionen von x, y, z, p, q sind. In No. 25. werden die zu dieser Integration führenden, vom Verf. mit (k) bezeichneten, partiellen Differential-Gleichungen, welche der vorgelegten überhaupt zukommen, vermittelst der Elimination abgeleitet. Nach einigen in No. 26. und 27. enthaltenen näheren Bestimmungen der Gleichungen (k) setzt der Verf. in No 28. seine Integrations-Methode vermittelst der genannten Gleichungen umständlich auseinander und giebt darauf in No. 29. die Anwendung dieser Methode auf mehrere Gleichungen.

Die gewöhnliche Methode, die partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung und des ersten Grades zu integriren, beruht bekanntlich darauf, daſs man aus drei gegebenen totalen Differential-Gleichungen zwei primitive Gleichungen abzuleiten

sucht, welches im Allgemeinen erfordert, dafs man zwischen den drei totalen Differential-Gleichungen zwei der fünf veränderlichen x, y, z, p, q fortschafft, um dadurch eine totale Differential-Gleichung von drei Veränderlichen zu erhalten, welche entweder die verlangte primitive giebt, oder einen Widerspruch zeigt, je nachdem die vorgelegte ein erstes Integral von der oben angegebenen Gestalt hat, oder nicht. Der Verf. dagegen integrirt zuvörderst eine der Gleichungen (k) wie eine totale Differential-Gleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, blofs in Bezug auf zwei Veränderliche und führt in das Integral wieder andere Functionen ein, welche man, zum Unterschiede von den willkürlichen uud unbestimmten Functionen, allgemeine Functionen nennen könnte, da man bei ihnen nur die Veränderlichen, von welchen sie abhängen, kennt. Sodann differentiirt er das gefundene Integral in Bezug auf alle darin vorkommenden Veränderlichen und löset auf diese Weise neue Bedingungs-Gleichungen ab, mit welchen er wie vorhin mit den Gleichungen (k) verfährt. Das zuletzt gefundene Integral von einer partiellen Differential-Gleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades, mit einer unbestimmten Function, ist das gesuchte. In dem Falle nun, dafs die vorgelegte kein erstes Integral von der oben gegebenen Gestalt hat, zeigen sich die gefundenen Bedingungs-Gleichungen unzureichend oder einander widersprechend. Der Verf. führt folglich die vorgegebene Integration zurück auf die von totalen Differential Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades mit zwei Veränderlichen, und von partiellen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades. Weiterhin in No. 42. zeigt der Verf. die Anwendbarkeit seiner Methode auch auf partielle Differential-Gleichungen der dritten Ordnung und des ersten Grades. Auch versucht der Verf. in No. 39. die Auffindung der ersten vollständigen Integrale nach seiner Methode mit allgemeinen Functionen; er bedient sich hierbei einer Schlufsweise, welche man auch in anderen Schriften findet. So vergleiche man z. B. No. 39. P. 221. Z. 21. mit Laplace *Méc. cél. T.* 1. *P.* 142. *l.* 6. Übrigens hat der Verf. wohlgethan, die Anwendung seiner Methode in No. 29. an den vier ersten Beispielen und in No. 39 am ersten Beispiele umständlich zu zeigen.

Nachdem die Methode der No. 28. auf die partielle Differential-Gleichung, in welcher auch p, q vom ersten Grade sind, in No. 30. bis 32. angewendet worden, werden in No. 33. bis 36. die partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung und des ersten Grades, bei welchen die Gleichungen (k) sich unzureichend zeigen, betrachtet. Die Analyse, deren sich der Verf. hierbei in No. 34. und 35. I. bedient, macht zwar die Transformation der Veränderlichen entbehrlich (wie man bei der in No. 34. B. 1. behandelten Differential-Gleichung, welche Monge und Legendre vermittelst der Transformation integrirt haben, sieht): sie giebt auch eine gröfsere Allgemeinheit als diese Transformation, ist aber wenigstens für Anfänger, für welche das Buch ebenfalls bestimmt ist, wohl zu schwierig. Es wäre zu wünschen gewesen, dafs der Verf. diese Untersuchungen, welche für die Gleichungen mit drei Veränderlichen von so grofser Wichtigkeit sind, nicht nur umständlicher ausgeführt, sondern auch überall an seine in No. 28. gegebene Methode inniger angeschlossen hätte, so etwa wie es bei dem in No. 36. betrachteten Falle geschehen ist. Dadurch hätte das ganze Buch an Einheit des Vortrages nur gewinnen können. So hätte der Verf. die in No. 32. angestellten Untersuchungen aus seinem Verfahren No. 34. u. 35. I. ableiten können, da die Integrations-Methode der No. 28. die Grundgröfsen für die in No. 32. betrachteten Gleichungen angiebt. Um nur an einem Beispiele die behauptete Möglichkeit zu zeigen, hat man für die Differential-Gleichung $r-t-\frac{2p}{x}=0$, aus No. 29. B. 6. $y+x=\alpha$, $y-x=\beta$. Sieht man nun in der Gleichung (a) der No. 35. I., a und b als Functionen von α und β an, so erhält man, in Verbindung mit der vorgelegten und mit Hülfe von No. 34., leicht die drei in No. 37. p. 211. aufgestellten primitiven Gleichungen, aus welchen das in No. 32. B. 3. gegebene allgemeine Integral folgt.

Nachdem der Verf. in No. 37. eine Übersicht der verschiedenen im Vorhergehenden erhaltenen Formen der Integrale gegeben hat, spricht er in No. 38. bis 40. von den ersten vollständigen Integralen der Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung

und untersucht sodann in No. 41. bis 44. die partiellen Differential-Gleichungen der dritten Ordnung und des ersten Grades. Es wäre zu wünschen, dafs der Verf. bei diesen Untersuchungen ausführlicher gewesen wäre und mehr Resultate von der Art, wie die in No. 44. II. gegeben hätte.

Die No. 45., welche von den totalen Differential-Gleichungen handelt, zeigt deutlich, wie wenig man bis jetzt die Gleichungen dieser Art zu behandeln im Stande ist.

Die Bezeichnungen, welche der Verf. für die Differential-Coëfficienten gewählt hat, sind dem Vortrage, vornehmlich in der zweiten Hälfte des Buchs, förderlich. Das Gegentheil kann man aber wohl von den Abkürzungen einzelner Wörter behaupten.

2. *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par dessous. Par M. Poncelet. A Metz* 1827.

Diese Abandlung enthält eine interessante Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte auf die Schaufelung unterschlächtiger Räder. Bisher liefs man das Wasser, nachdem es den Stofs auf die Schaufeln vollbracht, mit ungenutzter Geschwindigkeit wegfliefsen: Herr Poncelet sucht die auf solche Weise verloren gehende lebendige Kraft für den Betrieb des Rades zu gewinnen, indem er das Wasser, welches aus der Schützöffnung, beinahe in der Richtung der Tangente des Rades, stürzt, in gekrümmte Schaufeln treten läfst, deren erstes Element den Umfang des Rades tangirt. Hierdurch wird zunächst aller Stofs vermieden, und das Wasser erhebt sich längs dieser Curve bis zu einer Höhe, welche dessen relativer Geschwindigkeit angemessen ist. Nachdem es diese erreicht hat, fällt es in der Schaufel wieder zurück und erlangt dieselbe relative Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung, wieder, und die Einrichtung des Gerinnes ist so, dafs die Schaufel sich augenblicklich leert. Ist nun V die Geschwindigkeit des Wassers vor seinem Eintritt in die Schaufel, v die gleichförmige Geschwindigkeit des Rades, so steigt das Wasser mit der relativen Geschwindigkeit $V-v$ bis zu einer Höhe $\frac{(V-v)^2}{2g}$ und wird beim Hinunterfallen in der Curve die relative Geschwindigkeit $V-v$, aber in entgegengesetzter Richtung wieder erlangen. Also ist die absolute Geschwindigkeit $V-2v$, und diese mufs, wie man weifs, Null werden, wenn von der lebendigen Kraft nichts verloren gehen, oder wenn dieselbe von der Arbeit am Rade durchaus erschöpft werden soll. Diese Bedingung wird durch $V=2v$ erfüllt, oder der Effect $=1$, wenn die Geschwindigkeit des Rades halb so grofs ist, als die Geschwindigkeit des Wassers vor seinem Eintritt in die Schaufel. Unbedingt findet das allgemeine Princip der lebendigen Kräfte hier seine Anwendung, wie überall, wo nicht allein vom Stofse elastischer Massen, oder von gleichförmiger Bewegung eines Systems von Massen überhaupt die Rede ist, sondern auch, wie hier, durch allmälig veränderte Bewegung eine gewisse Anfangs-Geschwindigkeit periodisch wiederkehrt. Denn die Anfangs-Geschwindigkeit des Wassers war Null; es hat beim Austritt aus der Schützöffnung die seiner Fallhöhe H angemessene Geschwindigkeit V erlangt, welche durch die Bedingungen des Systems, ohne Stofs, und allmälig wieder zu Null wird; also ist die Wirkung dieselbe, als wenn das Rad durch den constanten Druck einer Wassersäule H in Bewegung gesetzt würde. Herr von Langsdorff verwirft in seinem „neuen System der Maschinenkunde" I. B. 2. Abth. P. 658. dieses Princip und dessen Anwendung auf die Ponceletschen Räder und will es nur für den Stofs elastischer fester Körper gelten lassen. Diese Einwürfe berechtigen indessen zu keiner besondern Widerlegung, da eine solche den gröfsten Theil der erwähnten Maschinenkunde zu umfassen haben würde, und also vorbehalten bleiben mufs. Das eben ist die grofse Bedeutung des allgemeinen Prinzips der lebendigen Kräfte bei der Bewegung der Maschinen, dafs man ohne mühsamen Calcul, durch unmittelbare Anschauung, den Effect einer Maschine zu beurtheilen im Stande ist; denn zu keinem andern als dem obigen Resultate würde man gelangen, wenn man die während des Heraufsteigens und Herabfallens des Wassers in der Schaufel wirkenden, aus Schwungkraft und Schwere zusammengesetzten variabeln Normalkräfte, nachdem sie in die Richtung der Bewegung des Rades zerlegt worden, integriren und daraus zugleich die Indifferenz der Schaufelform abstrahiren wollte.

Carnot war wohl einer der ersten, der in seinem „*Essai sur les Machines*" hierauf aufmerksam machte. Navier, de Coriolis, Petit, Burdin, und endlich Poncelet, haben, in den practischen Sinn dieses Prinzips eingehend, dessen ungemeine Fruchtbarkeit anerkannt und bethätigt, und dadurch eine gänzliche Reform der Maschinen-Lehre vorbereitet *).

Ist die Theorie des Ponceletschen Rades festgestellt, so mufs im Mémoire selbst nachgelesen werden, wie durch mannigfaltige Umstände der Effect desselben auf 0,67 oder 0,6 herabsinkt, was immer noch mehr als das Doppelte des bisher geleisteten Effects beträgt. Diese Umstände sind mit des Verfassers gewohnter Präcision entwickelt und gesondert. Erfahrungen und Versuche mit Modellen und im Grofsen bestätigen und modificiren die Theorie und die bisher gebräuchlichen Coëfficienten; aber immer findet man die Gründe der Abweichungen entwickelt und nachgewiesen. Vieles, was nicht zum Ressort dieses Journals gehört, aber für den Techniker überaus wichtig ist, ist in diesem Mémoire enthalten, das sich auf diese Weise zu einer der bedeutendsten Erscheinungen in diesem Gebiete gestaltet, und zeigt, wie Herr Poncelet auch auf practischem Boden so ganz seinen Stoff zu beherrschen versteht.

Potsdam im Januar 1830. M. H. Jacobi.

3. Das Lehrbuch der Geometrie vom Herrn Prof. Förstemann zu Danzig, wovon die beiden ersten Bände erschienen sind, zeichnet sich durch Eigenthümlichkeit und Reichhaltigkeit aus. Es scheint zwar kein eigentlich systematischer Lehrbegriff für Lernende sein zu sollen, indem es, besonders im Anfange, die Sätze ohne Beweise, nur wie erzählungsweise giebt, auch ein grofser Theil des Buches unter die Rubrik „Vermischtes, Anhänge, Zusätze" u. s. w. gebracht ist; desto nützlicher aber dürfte es Lehrern und Denjenigen sein, welche in der Geometrie schon einigen Grund gelegt haben; denn es beherrscht sichtbar seinen Gegenstand, behandelt ihn mit vieler Eigenthümlichkeit und eigener Kraft, geht über das Gewohnte hinaus, woran es bei so vielen Wiederholungen der Elemente wohl Noth thut, und giebt auch von neuern geometrischen Untersuchungen Nachrichten und Kenntnifs. Die Schrift verdient daher alle Aufmerksamkeit; denn auch sie vermag dazu beizutragen, in Deutschland, dem allgemeinen Verkehre mit der Mathematik zu einer etwas mehr aus dem gewohnten Kreise herauszutretenden, freieren Bewegung zu verhelfen.

4. Ein recht verdienstliches Unternehmen ist unstreitig die deutsche Übersetzung, welche der Herr Professor Salomon zu Wien, Verfasser eines ausführlichen Lehrbuches der ebenen und sphärischen Trigonometrie und verbesserter mathematischer Tafeln, von Eulers Integral-Rechnung liefert, wovon bereits 3 Bände in Octav-Format erschienen sind. Das Studium der Mathematik wird zuverlässig bedeutend gewinnen, wenn man den Lernenden die classischen Quellen durch wohlfeile wörtliche Übersetzungen zugänglicher macht. Denn kein Commentar, keine Nachbildung, keine Bearbeitung eines Originales kann so wirksam sein, als das Original selbst. In verändertem Gewande erscheint selbst das Wesentlichste zuweilen entstellt, Vieles entweicht unter der Bearbeitung und nicht immer bleibt der Kern zurück. Wie wichtig es sei, die Originale in ihrer Reinheit zu besitzen, und wie wirksam sie für das Studium sind, beweisen Euclides und Archimedes. Euler und Lagrange sind in ihrer Art nicht weniger classisch als jene.

5. Ein wichtiges neues Werk ist: „*M. G. de Pontécoulant théorie analitique du système du monde. Paris, chez Bachelier*, 1829." 2 Bände in 8. Einl. 18 S. Text 508 und 504 S. Wir können den Zweck, die Art des Werkes und sein Verhältnifs zu der berühmten *Mécanique céleste* nicht besser ausdrücken, als mit des Verfassers eigenen Worten am Schlusse der Einleitung.

„*Le développement analytique des conséquences du principe de la pesanteur universelle constitue la théorie du système du monde; elle est présentée avec détail dans*

*) Wie dieses Prinzip auf ungleichförmig arbeitende Maschinen anzuwenden sei, hat Referent in einem Project zu einer Wassersäulen-Maschine gezeigt, welches sich in den Archiven der Königlichen Ober-Bau-Deputation zu Berlin befindet.

la Mécanique céleste de Laplace, *qu'on doit regarder comme le Traité d'Astronomie physique le plus sublime et le plus complet que nous possedions. Cependant les grands progrès qu'a faits depuis vingt ans l'Analyse, ont permis d'aplanir les principales difficultés qu'on rencontre dans cet ouvrage, et qui en rendent souvent la lecture pénible. La théorie du système du monde peut être présentée maintenant avec une clarté et un ensemble qui lui avaient manqué jusq'ici, et qui permettent d'en saisir d'un regard toutes les parties. Les méthodes qu'elle emploie ont subi ces heureuses améliorations que le temps et l'expérience apportent toujours dans les oeuvres des géomètres; elles sont devenues plus simples en se généralisant. Nous avons essayé de réunir en un même corps d'ouvrage les réultats de tant d'utiles travaux; nous avons donné aux théories assez de développemens pour en bannir toute obscurité, et les exemples numériques que nous y avons ajoutés suffiront pour en rendre les applications faciles. Lorsqu'une science, après avoir épuisé les efforts des plus puissans génies, semble être enfin parvenue à ce degré d'élévation que les bornes de l'intelligence humaine ne lui permettent pas de franchir, il ne reste plus qu'un moyen d'en hâter les progrés, c'est d'en rendre les abords moins pénibles, de substituer des méthodes faciles aux methodes compliquées qu'on avait d'abord employées pour en résoudre les problèmes, et de se rappeler enfin que, dans les ouvrages des hommes comme dans ceux de la nature, la simplicité est un des attributs de la perfection."*

Das Werk ist unstreitig ein würdiges Unternehmen, und während wir statt der Meinung, die den Worten „*Lorsqu'une science etc. . . . . pour en résoudre les problèmes*" zum Grunde zu liegen scheint, daſs man erst dann, wenn die menschliche Einsicht nicht weiter vordringen zu können scheint, nothgedrungen an Vereinfachung des Vorhandenen denken müsse, vielmehr diejenige hegen, daſs die Vereinfachung gar nicht früh genug geschehen könne, und daſs sie fast nicht minder nützlich sei als weiteres Fortschreiten, weil sie dasselbe so überaus mächtig zu fördern vermag, unterschreiben wir demgemäſs mit voller Überzeugung die auf die obigen folgenden Worte: „*et de se rappeler enfin que, dans les ouvrages des hommes comme dans ceux de la nature, la simplicité est un des attributs de la perfection.*" Möchten dieselben doch von Allen, welche die Wissenschaften, und eine der edelsten unter ihnen, die Mathematik, cultiviren, stets beherzigt werden! Einfach klar und natürlich ist in ihr, wie das Elementare, so das Abstracteste und Verborgenste; einfach, klar und natürlich waren die Gedanken der gröſsten Geometer, Euclides, Euler und Lagrange, einfach wie die groſsen Gesetze der Natur, wie das Gesetz der allgemeinen Schwere, nach welchem das Weltall sich bewegt, und angemessen einfach war ihre Darstellungsweise. Nichts kann wohl die Fortschritte der Mathematik mehr hemmen, als trübe Dunkelheit. Gegentheils kann nichts kräftiger die weitere Entwicklung der Erkenntnisse fördern, als Klarheit und natürliche Einfachheit. Möchte die Mathematik bald überall in das Licht der natürlichen Einfachheit gebracht werden, welches allein vermag die Wahrheit in ihrer Schönheit zu zeigen und ihre ferneren Wege zu beleuchten.

6. Von den Arbeiten des Herrn Poisson wollen wir folgender drei neuern, ihres berühmten Verfassers würdigen Memoiren erwähnen:

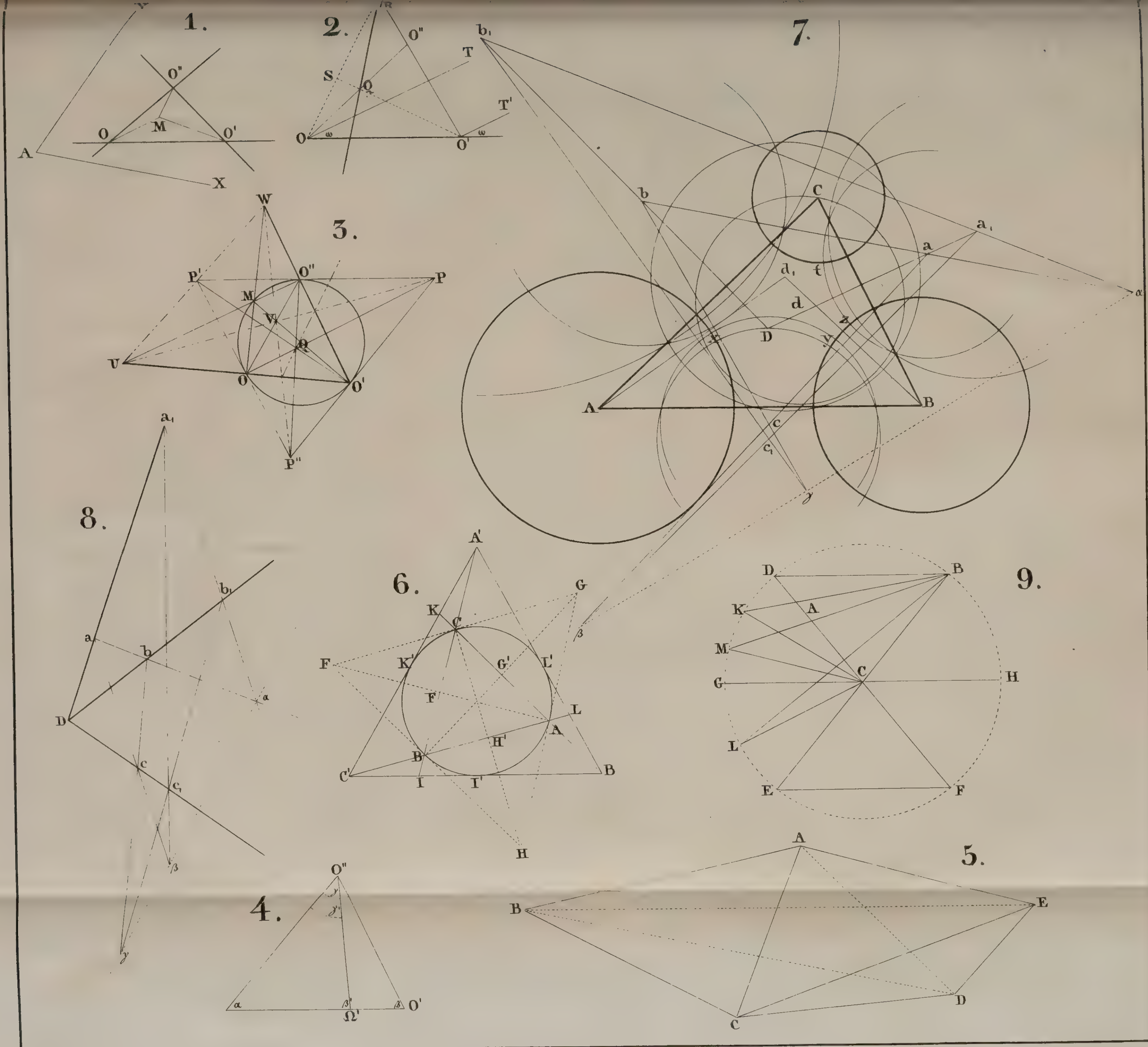
Mémoire sur l'equilibre des fluides.

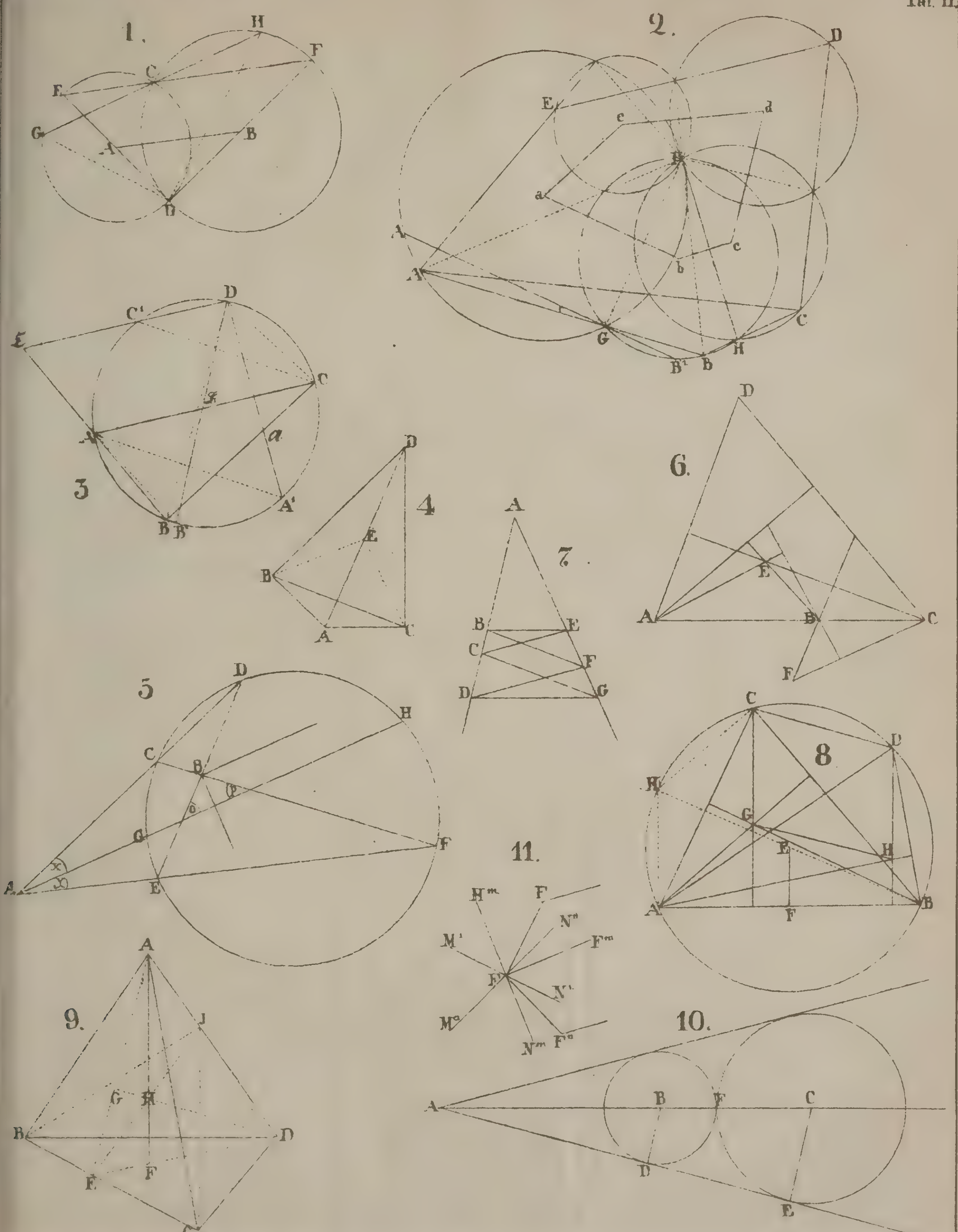
Mémoire sur l'equilibre et le mouvement des corps élastiques.

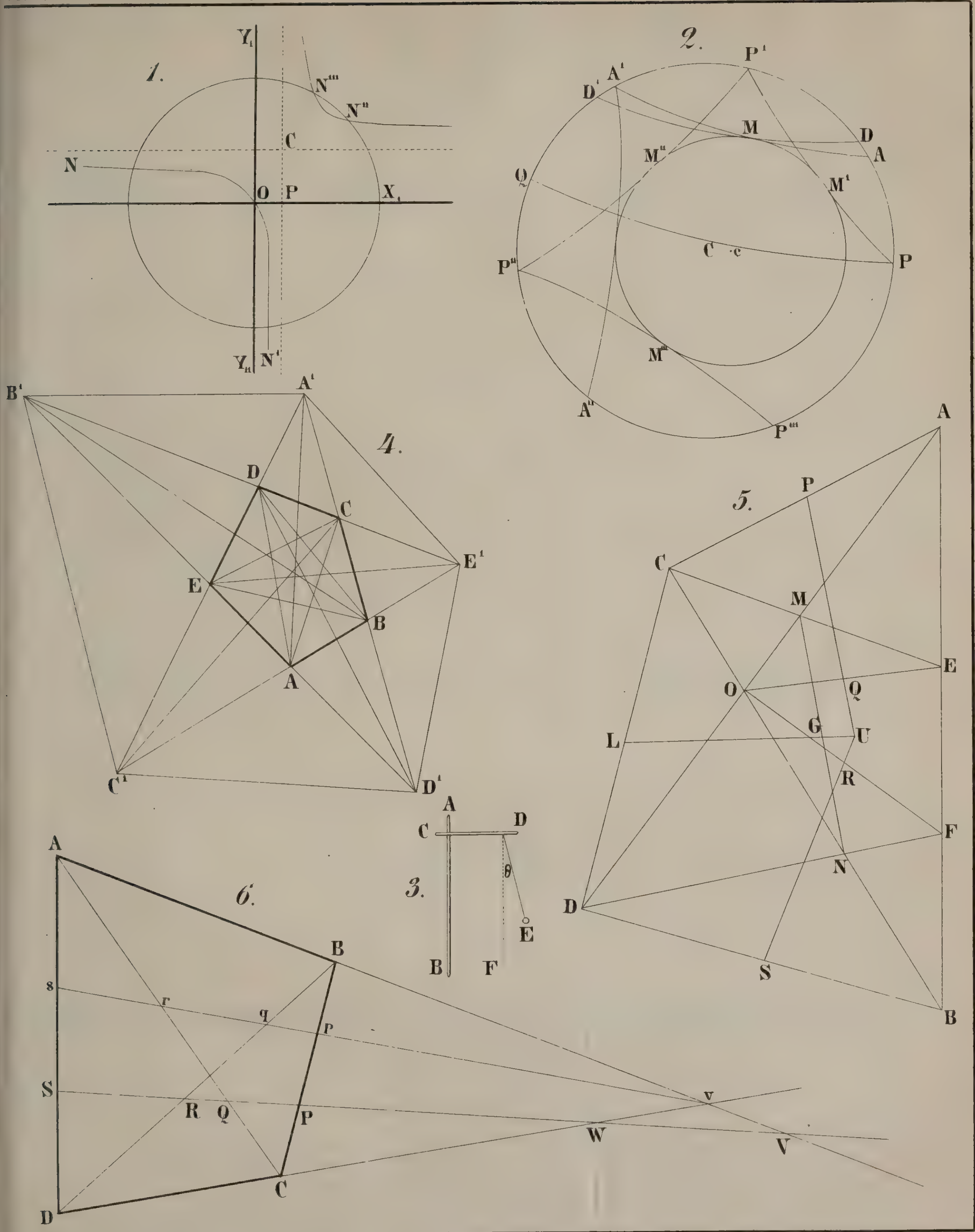
Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons.

Letzterer Gegenstand liefert den Stoff zu interessanten Aufgaben für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

7. Die *Annales des mathématiques* von Gergonne, die *Correspondance mathématique et physique* von Quetelet, die Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik, von Baumgärtner und v. Ettinghausen, haben fernern erfreulichen Fortgang. Von Cauchy *Exercices des mathématiques* sind wiederum mehrere neue Hefte, bis jetzt in allem 42 erschienen.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.


1.
2.
3
4
5
6.
7.
8
9.
10.
11.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Sechster Band,

In 4 Heften.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin, 1830.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des sechsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

II. Angewandte Mathematik.

Aufgaben und Lehrsätze.

1.
Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen.

(Von Herrn Pr. *Gudermann* zu Cleve.)

Die cyklischen (trigonometrischen, goniometrischen) oder auch Kreis-Functionen gehören bekanntlich der analytischen Geometrie nicht ausschliefslich zu, sondern auch die reine Analysis entwickelt das Wesen derselben auf eine ihr eigenthümliche Weise; sie behält aber die Benennungen dieser Functionen sammt ihren Bezeichnungen bei, und macht von ihnen häufig einen nicht unwichtigen Gebrauch auch da, wo von Winkeln und überhaupt Raumverhältnissen nicht die Rede ist. Die höhere Arithmetik zumal bedient sich dieser Functionen, um vermittelst derselben Integrale auszudrücken, deren Werthe sonst aus ungeschlossenen Reihen berechnet werden müfsten, die aber oft divergiren oder doch so langsam convergiren, dafs zur Bestimmung numerischer Werthe kein unmittelbarer Gebrauch von ihnen gemacht werden kann; selbst im Falle gewünschter Convergenz würde die Benutzung der Reihen in angegebener Art den Rechner ermüden. Daher hat man Tafeln für die zusammengehörigen Werthe dieser Functionen oder doch ihrer Logarithmen angefertigt, durch deren Benutzung die Schwierigkeiten des Gebrauches der Reihen in Rechnungen mit bestimmten Zahlen umgangen werden.

Aber ein durch cyklische Functionen ausgedrücktes Integral (dasselbe gilt überhaupt von arithmetischen Ausdrücken, welche cyklische Functionen enthalten) kann in der Form, in der es aufgestellt worden ist, nicht immer in Anwendung kommen, weil die darin vorkommenden Gröfsen (häufig schon die Constanten allein) bewirken können, dafs die cyklischen Functionen imaginär werden, obgleich das Integral selbst einen reellen Werth hat. In einem solchen Falle pflegte das Integral umgeformt zu werden, damit es logarithmische Functionen statt der früheren cyklischen enthielt, worauf es dann in einer reellen, aber fast durchgehends unbequemeren Gestalt erschien, die aber geduldet werden mufste, weil sie die einzig zulässige war, obgleich das Integral für andere Werthe der

in ihm vorkommenden Gröfsen, welche den Gebrauch der cyklischen Functionen zulassen, in Gemäfsheit bekannter Beziehungen, welche unter solchen Functionen Statt finden, vielfach umgeformt werden konnte.

Das Streben, diese lästigen Beschränkungen zu heben und die Vielseitigkeit der Analysis hier zu retten, wie auch eine gröfsere Gleichmäfsigkeit des Verfahrens herbeizuführen, leitete zu der Idee von Functionen, welche statt der bisher üblichen logarithmischen, oder auch Exponenzial-Functionen; dann eintreten sollen, wenn die Kreisfunctionen ihre unter anderen Umständen nützlichen Dienste versagen, und welche im Gegensatze zu ihnen hyperbolische genannt worden sind.

Die Benennung rührt von der gleichseitigen Hyperbel her, welche unter den Hyperbeln überhaupt ungefähr das ist, was der Kreis unter den Ellipsen.

Strenger genommen, sind aber diese hyperbolischen Functionen, wenn man auf ihren mit denen des Kreises fast gleichen analytischen Ursprung sieht, kaum neue Functionen zu nennen; wenigstens machen ihre Arten mit den eben so vielen des Kreises ein einziges Geschlecht aus, welches das der Potenzial-Functionen genannt werden mag.

Durch den Gebrauch der hyperbolischen Functionen werden die vorhin genannten Übelstände gehoben, und es ist mit ihrer Einführung in die Analysis, worauf sie ein gleiches, wenn nicht noch gröfseres Recht als die cyklischen Functionen haben, die gröfste Mannigfaltigkeit von neuen Formen arithmetischer Ausdrücke, welche nach zu entwerfenden Regeln leicht umgebildet werden können, gegeben; Ausdrücke mit imaginären cyklischen Functionen, welchen ein reeller Werth zukommt, bedürfen bei ihrer Anwendung keiner Umrechnung mehr, um diesen Werth zu erkennen; endlich hat dadurch die Einheit des Verfahrens eine allgemeine Geltung erhalten. Das Rechnen mit den hyperbolischen Functionen bildet überhaupt einen vollkommenen Parallelismus zu den Rechnungsweisen mit den cyklischen, der durch die gewählte Terminologie und Bezeichnung *) überall kenntlich wird und dem Gedächtnisse bei der Bewahrung

*) Ähnlich den cyklischen Functionen: $\cos x$, $\sin x$, $\mathrm{tang}\, x$, $\cot x$, $\mathrm{arc}(\sin = z)$, $\mathrm{arc}(\cos = z)$, $\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = z)$, $\mathrm{arc}(\cot = z)$, sind die hyperbolischen Functionen bezeichnet durch $\mathfrak{Cos}\, x$, $\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Tang}\, x$, $\mathfrak{Cot}\, x$, $\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = x)$ etc. Wem diese deutschen Vorsylben, welche den Gegensatz aber noch mehr ausdrücken, mifsfallen, der kann dafür lateinische Vorsylben mit grofsen Anfangsbuchstaben nehmen.

der am häufigsten vorkommenden Beziehungen zu nicht geringer Erleichterung dient.

Da nach einiger Übung das Rechnen mit den hyperbolischen Functionen noch bequemer von Statten geht, als das mit den cyklischen, und man in jedem Augenblicke von jenen auf diese überspringen kann, so fühlt man sich geneigt, mit ihnen fast ausschliefslich zu rechnen, wenn man im Gebiete der allgemeinen Arithmetik ist, und zwar aus ähnlichem Grunde, aus welchem man umgekehrt in trigonometrischen, die Vorstellung eines Winkels mit sich führenden Betrachtungen nicht zu den hyperbolischen Functionen greifen, sondern die Rechnung mit den cyklischen anlegen und durchführen wird.

Offenbar besteht aber die erwähnte Einfachheit und Leichtigkeit der Rechnung mit hyperbolischen Functionen nur im analytischen Sinne, d. h. so lange die Werthe dieser Functionen entweder unbestimmt oder unbekannt sind, und durch sie ist wenig erreicht, wenn man nicht im Stande ist, die bestimmten Werthe der hyperbolischen Functionen für eine als ihren Arcus gegebene Zahl, und umgekehrt diesen aus jenen nach einer sich gleich bleibenden und insofern allgemeinen Methode ohne viele Mühe mit einem befriedigenden Grade der Genauigkeit in der Form von Decimalbrüchen anzugeben.

Aber diese allerdings sehr erhebliche Schwierigkeit, welche sich der Einführung der hyperbolischen Functionen und ihrem Gebrauche in der Analysis, wenn er reellen Nutzen haben soll, entgegenstellte, und wodurch diese sonst sehr einfache Idee bisher mag vereitelt worden sein, hat der Verfasser durch eine ungewöhnliche Anstrengung gehoben, indem er Tafeln von bedeutendem Umfange angefertigt hat, welche ziemlich eben so für die Rechnungen mit den hyperbolischen Functionen zu gebrauchen sind, wie die sogenannten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln zur Realisirung der Werthe der cyklischen Functionen täglich in Anwendung kommen. Nur die lebhafte Vorstellung des durch diese Tabellen zu stiftenden Nutzens konnte dem Verfasser den nöthigen Muth und die erforderliche Ausdauer geben und den Überdrufs vermindern, welchen der bei solchen Arbeiten nothwendige Mechanismus erzeugt. Was würde die Trigonometrie ohne trigonometrische Tafeln, was würde eine Theorie der hyperbolischen Functionen ohne Tabellen für ihre Werthe oder die Werthe ihrer Logarithmen helfen?

Sämmtliche hyperbolische Functionen, deren vielseitiger nützlicher Gebrauch von Kennern der Analysis auch ohne die im Werke enthaltene Theorie der Potenzial-Functionen anerkannt werden wird *), sind sowohl in ihren Beziehungen zu einander als auch zu den cyklischen Functionen geometrisch auf mehr als eine Weise versinnlicht worden. In gedrängter Darstellung sind daher einige Curven behandelt worden, unter welchen die von dem Verfasser sogenannte Longitudinale und die allbekannte Kettenlinie durch ihre früher zum Theil unbekannten Eigenschaften einige Aufmerksamkeit auf sich ziehen werden.

Die Theorie der Potenzial-Functionen, welche hier geboten wird, macht nicht auf eine solche Vollständigkeit Anspruch, dafs alle einschlägige Fragen darin beantwortet wären; Vieles, was der Scharfsinn der Analytiker in Hinsicht auf die cyklischen Functionen fand, hätte noch aufgenommen und auf die hyperbolischen Functionen unter nöthigen Abänderungen übertragen werden können. Auch in der Aufnahme des Eigenen hat häufig eine Beschränkung Statt gefunden, und es ist selbst ein ganzer Abschnitt weggelassen worden, welcher Reihen enthält, nach welchen bei gleichen Arcus die hyperbolischen Functionen aus den cyklischen, und umgekehrt diese aus jenen zu berechnen wären, weil der Nutzen zu gering schien, obgleich die Reihen selbst zum Theil wegen der Gesetze ihres Fortschrittes anziehend sein mögen. Statt dessen ist aber der Theorie ein Anhang beigegeben worden, welcher zwar den anfänglich beabsichtigten Umfang überschritten hat, aber dafür Dinge behandelt, die in einer mehr oder minder nahen Beziehung zu dem in der Theorie Behandelten stehen, und welcher auch, abgesehen davon, vielleicht nicht überall als unwillkommen erscheinen möchte.

*) Schon Lambert erkannte den Nutzen der hyperbolischen Functionen.
Anm. d. Verf.

Erster Abschnitt.

Von den Potenzial-Functionen überhaupt.

§. 1.

Die Potenz u^x kann in der Form einer zweitheiligen Gröfse $P+Q$ dergestalt angegegeben werden, dafs auch ihr reciproker Werth $\frac{1}{u^x}$ oder u^{-x} dieselben Theile P und Q hat, nur dafs der zweite Theil Q das entgegengesetzte Zeichen erhält. Setzt man in der That:

$$1.\quad u^x = P+Q,\quad u^{-x} = P-Q,$$

so findet man rückwärts für die Theile P und Q die beiden folgenden Ausdrücke:

$$2.\quad P = \frac{u^x+u^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{u^x-u^{-x}}{2}.$$

Da die Gröfsen P und Q mit den Potenzen u^x und u^{-x} auf eine sehr einfache Weise zusammenhängen, so mögen sie **Potenzial-Functionen** heifsen. Sie sind in der That Functionen des gemeinschaftlichen Grundfactors u und des Exponenten x der beiden Potenzen.

Die Multiplication der Gleichungen (1.) führt zu der Gleichung:

$$3.\quad P^2-Q^2 = 1,$$

woraus man sieht, dafs die beiden Potenzial-Functionen P und Q dergestalt von einander abhängen, dafs man aus dem Werthe der einen den der anderen berechnen kann, ohne den Grundfactor u und den Exponenten x zu kennen.

Die Function $P=\frac{u^x+u^{-x}}{2}$ heifse der Cofinus der Zahl x für die Grundzahl u und eben so die Function $Q=\frac{u^x-u^{-x}}{2}$ der Sinus der Zahl x für die Grundzahl u. Die Bezeichnung mag folgende sein:

$$4.\quad \mathrm{Cos}(x,u) = \frac{u^x+u^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}(x,u) = \frac{u^x-u^{-x}}{2}.$$

Die den gegenseitigen Zusammenhang zwischen dem Cofinus und Sinus ausdrückende Gleichung ist dann:

$$5.\quad \mathrm{Cos}(x,u)^2 - \mathrm{Sin}(x,u)^2 = 1.$$

§. 2.

Bekanntlich kann man die Potenz u^x nach Potenzen des Exponenten x entwickeln, und wenn $\log u$ den natürlichen Logarithmen von u bezeichnet, so hat man:

$$u^x = 1 + \frac{(x \log u)^1}{1} + \frac{(x \log u)^2}{1.2} + \frac{(x \log u)^3}{1.2.3} \cdots + \frac{(x \log u)^\alpha}{1.2.3 \ldots \alpha} + \cdots$$

welche Reihe zwar nie abbricht, aber doch immer convergirt, welche Werthe man auch für x und u in Rechnung bringen mag.

Zur Abkürzung mag weiter gesetzt werden: $0' = 1$; $1' = 1$; $2' = 1.2$; $3' = 1.2.3$; $\alpha' = 1.2 \ldots \alpha$; und $(2+3)' = 5' = 1.2.3.4.5$ Es wird dann die an diesen Beispielen gezeigte Art der Bezeichnung im Nachfolgenden festgehalten werden. Man kann dann ferner die ganze Reihe einfacher also darstellen:

$$u^x = S \frac{(x \log u)^\alpha}{\alpha'} \quad \text{und} \quad u^{-x} = S (-1)^\alpha . \frac{(x \log u)^\alpha}{\alpha'},$$

so dafs das dem allgemeinen Gliede vorgesetzte **Summenzeichen** S sich auf die veränderliche positive ganze Zahl α bezieht und die Forderung enthält, dafs man für α nach einander die Werthe $\alpha = 0, 1, 2, 3$, etc. zu setzen, und die durch solche Specialisirung des allgemeinen Gliedes erhaltenen besonderen Glieder zu addiren hat.

Nimmt man für u die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems, so ist $\log u = e = 1$, und die Reihen werden dann einfacher:

$$e^x = S \frac{x^\alpha}{\alpha'} \quad \text{und} \quad e^{-x} = S (-1)^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha'}.$$

Die sich auf die Grundzahl e beziehenden Potenzial-Functionen heifsen **natürliche**, und in ihrer Bezeichnung darf diese Grundzahl der Kürze wegen wegbleiben; so dafs also

$$\mathrm{Cos}(x, e) = \mathrm{Cos}\, x \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin}(x, e) = \mathrm{Sin}\, x.$$

Die Grundformeln sind dann folgende:

$$e^x = \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x; \quad e^{-x} = \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x; \quad \mathrm{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Die Reihen für den natürlichen Cosinus und Sinus sind weiter:

$$\mathrm{Cos}\, x = \left(1 + \frac{x^2}{2'} + \frac{x^4}{4'} + \frac{x^6}{6'} \cdots\right) = S \frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'},$$

$$\mathrm{Sin}\, x = \left(x + \frac{x^3}{3'} + \frac{x^5}{5'} + \frac{x^7}{7'} \cdots\right) = S \frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}.$$

In Anwendung dieser Reihen findet man am leichtesten für $x = 1$ die beiden Werthe:

$$\mathrm{Cos}\, 1 = 1,54308\ 06348\ 15243\ 77847\ 79053,$$

$$\mathrm{Sin}\, 1 = 1,17520\ 11936\ 43801\ 45688\ 23812.$$

Da nun $e = \mathrm{Cos}\, 1 + \mathrm{Sin}\, 1$ und $e^{-1} = \mathrm{Cos}\, 1 - \mathrm{Sin}\, 1$ ist, so findet man hieraus leicht

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02865,$$
$$\frac{1}{e} = 0,36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55241\ ^{*}).$$

§. 3.

Dividirt man den Sinus einer Zahl durch ihren Cosinus, wobei aber beide Functionen auf dieselbe Grundzahl bezogen werden, so heiſse der Quotient die Tangente jener Zahl: in Zeichen:

$$1.\quad \mathfrak{Tang}(x,u) = \frac{\mathfrak{Sin}(x,u)}{\mathfrak{Cos}(x,u)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x}.$$

Wird umgekehrt bei einerlei Grundzahl der Cosinus einer Zahl durch ihren Sinus dividirt, so heiſse der Quotient die Cotangente dieser Zahl; oder in Zeichen:

$$2.\quad \mathfrak{Cot}(x,u) = \frac{\mathfrak{Cos}(x,u)}{\mathfrak{Sin}(x,u)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cot}\,x = \frac{\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}.$$

Die Tangenten und Cotangenten sind also abgeleitete Potenzial-Functionen, und zwar ist:

$$\mathfrak{Tang}(x,u) = \frac{u^x - u^{-x}}{u^x + u^{-x}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cot}(x,u) = \frac{u^x + u^{-x}}{u^x - u^{-x}},$$

so wie:

$$\mathfrak{Tang}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cot}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Aus diesen Bestimmungen des Wesens der vier Potenzial-Functionen und aus der Gleichung $\mathfrak{Cos}\,x^2 - \mathfrak{Sin}\,x^2 = 1$ folgen noch leicht nachstehende Formeln:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{Sin}\,-x = -\mathfrak{Sin}\,x & & \mathfrak{Tang}\,x \,.\, \mathfrak{Cot}\,x = 1 \\
\mathfrak{Cos}\,-x = +\mathfrak{Cos}\,x & \text{und} & 1 - \mathfrak{Tang}\,x^2 = \dfrac{1}{\mathfrak{Cos}\,x^2} \\
\mathfrak{Tang}\,-x = -\mathfrak{Tang}\,x & & \\
\mathfrak{Cot}\,-x = -\mathfrak{Cot}\,x & & \mathfrak{Cot}\,x^2 - 1 = \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}\,x^2}
\end{array}$$

wodurch der gegenseitige Zusammenhang unter den vier Arten der Potenzial-Functionen zur Genüge ausgedrückt wird. Für $x = 0$ hat man endlich noch die besonderen Werthe:

$$\mathfrak{Cos}\,0 = 1;\quad \mathfrak{Sin}\,0 = 0;\quad \mathfrak{Tang}\,0 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cot}\,0 = \tfrac{1}{0}.$$

---

*) Der hier und im Nachfolgenden vorkommende Gebrauch des dem allgemeinen Gliede einer Reihe vorgesetzten und sich auf gewisse veränderliche, im allgemeinen Gliede vorkommende positive ganze Zahlen α, β, γ, δ, etc., welche auch zuweilen gewissen Bedingungsgleichungen genügen müssen, beziehenden Summenzeichens S wird leicht begriffen; Weiteres darüber findet man in Rothe's Theorie combinatorischer Integrale. Das von ihm vorgeschlagene Zeichen Σ ist aber hier in S abgeändert worden, weil jenes Zeichen nach dem allgemeinsten Gebrauche einen Rückgang von der Differenz einer Function zu der Function selbst oder eine Integration der Differenz vorschreibt, und namentlich, nach der Bezeichnung Euler's: $Sy = \Sigma y + y + \text{const.}$ ist

§. 4.

Die auf eine Grundzahl u bezogenen Potenzial-Functionen lassen sich leicht in natürliche vewandeln; denn da $u^x = e^{x \log u}$ ist, so hat man:

$$\frac{u^x + u^{-x}}{2} = \frac{e^{x \log u} + e^{-x \log u}}{2},$$

$$\frac{u^x - u^{-x}}{2} = \frac{e^{x \log u} - e^{-x \log u}}{2},$$

oder einfacher:

1. $\quad \mathrm{Cos}(x,u) = \mathrm{Cos}(x \log u)$ und $\mathrm{Sin}(x,u) = \mathrm{Sin}(x \log u)$.

Hieraus findet man ferner für die Tangenten und Cotangenten die Formeln:

2. $\quad \mathrm{Tang}(x,u) = \mathrm{Tang}(x.\log u)$ und $\mathrm{Cot}(x,u) = \mathrm{Cot}(x.\log u)$.

Da also die Zurückführung aller Potenzial-Functionen einer Zahl auf natürliche so einfach ist und nur eine Multiplication der Zahl verlangt, so brauchen die ferneren Verhandlungen sich fast nur über die natürlichen Potenzial-Functionen zu verbreiten.

§. 5.

Stellt man sich die Beziehungen, welche zwischen den Potenzial-Functionen und ihrem Argumente Statt finden, umgekehrt vor, so heifst dieses Argument der Arcus der gegebenen Potenzial-Function, welche nun als Argument dient. In Zeichen wird solche Umkehrung ausgedrückt, wie folgt:

$$1. \quad \begin{cases} \text{Ist } \mathrm{Cos}\, x = z, \text{ so ist } x = \mathrm{Arc}(\mathrm{Cos} = z). \\ \text{Ist } \mathrm{Sin}\, x = z, \text{ so ist } x = \mathrm{Arc}(\mathrm{Sin} = z). \\ \text{Ist } \mathrm{Tang}\, x = z, \text{ so ist } x = \mathrm{Arc}(\mathrm{Tang} = z). \\ \text{Ist } \mathrm{Cot}\, x = z, \text{ so ist } x = \mathrm{Arc}(\mathrm{Cot} = z). \end{cases}$$

Man kann in Anwendung dieser Bezeichnung geschlossene arithmetische Ausdrücke angeben, welche zur Berechnung der Arcus aus den Functionen Cosinus, Sinus, Tangente und Cotangente dienen. Es folgt nemlich aus den Formeln

$$e^x = \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x \text{ und } e^{-x} = \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x,$$

indem man die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$x = \log(\mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x) \text{ und } -x = \log(\mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x).$$

Setzt man daher $\mathrm{Cos}\, x = z$, so ist $\mathrm{Sin}\, x = \sqrt{(z^2 - 1)}$, und also

2. $\quad \mathrm{Arc}(\mathrm{Cos} = z) = \log(z + \sqrt{(z^2 - 1)}) = -\log(z - \sqrt{(z^2 - 1)})$.

Setzt man aber $\mathrm{Sin}\, x = z$, so ist $\mathrm{Cos}\, x = \sqrt{(z^2 + 1)}$, und also

3. $\quad \mathrm{Arc}(\mathrm{Sin} = z) = \log(\sqrt{(z^2 + 1)} + z) = -\log(\sqrt{(z^2 + 1)} - z)$.

Weil man weiter $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,x + \mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x + \mathfrak{Sin}\,x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\mathfrak{Tang}\,x}{1-\mathfrak{Tang}\,x}\right)$ hat, so setze man $\mathfrak{Tang}\,x = z$, und man erhält:

$$7.\quad \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = z) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Die letzte Formel kann man auch in der nur wenig veränderten Form:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = 1-v) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2-v}{v}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2}{v}-1\right)$$

darstellen, in der sie zu einer künftigen Entwickelung vorbereitet ist.

Zweiter Abschnitt.

Eintheilung der Potenzial-Functionen in zwei Geschlechte mit gleich vielen Arten.

§. 6.

Die Potenzial-Functionen können sowohl auf mögliche als auf unmögliche Arcus bezogen werden. Die Einheit der möglichen ist ± 1, die Einheit der unmöglichen $\pm\sqrt{-1}$.

Zunächst giebt die Zurückführung auf natürliche Potenzial-Functionen:

$$\mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}, u) = \mathfrak{Cos}((x\log u).\sqrt{-1}),$$
$$\mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1}, u) = \mathfrak{Sin}((x\log u).\sqrt{-1}).$$

Um aber die natürlichen Cosinus und Sinus genauer zu erforschen, dienen die im §. 2. angegebenen Reihen; man findet:

$$\mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}) = S\frac{(x\sqrt{-1})^{2\alpha}}{2\alpha'} = S(-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'},$$
$$\mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1}) = S\frac{(x\sqrt{-1})^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'} = \left(S(-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}\right).\sqrt{-1},$$

und da

$e^{x\sqrt{-1}} = \mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}) + \mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1})$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = \mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}) - \mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1})$

ist, so hat man die beiden Formeln:

$$e^{x\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1},$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = P - Q\sqrt{-1},$$

so dafs die beiden Reihen $P = S(-1)^{\alpha}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$ und $Q = S(-1)^{\alpha}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}$ nicht mehr imaginär sind, oder $\sqrt{-1}$ nicht mehr enthalten.

Die jetzige Reihe P heifse wieder der Cosinus und die Reihe Q der Sinus von x, nur werden sie mit lateinischen Vorsilben, welche kleine Anfangsbuchstaben führen, zur auffallenderen Unterscheidung bezeichnet; also:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2'} + \frac{x^4}{4'} - \frac{x^6}{6'} + \frac{x^8}{8'} \ldots\right) = S(-1)^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'},$$

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3'} + \frac{x^5}{5'} - \frac{x^7}{7'} + \frac{x^9}{9'} \ldots\right) = S(-1) \frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}.$$

Man hat also $\mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}) = \cos x$ und $\mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1}) = (\sin x).\sqrt{-1}$. Aber auch umgekehrt hat man $\cos(x\sqrt{-1}) = \mathfrak{Cos}\,x$ und $\sin(x\sqrt{-1}) = (\mathfrak{Sin}\,x).\sqrt{-1}$. Will man für die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ geschlossene Ausdrücke haben, so leitet man aus den Gleichungen $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x.\sqrt{-1}$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x\sqrt{-1}$ leicht die beiden folgenden Ausdrücke her:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Um nun die Functionen $\mathfrak{Cos}\,x$ und $\mathfrak{Sin}\,x$ unter der Annahme, daſs x möglich sei, von den Functionen $\cos x$ und $\sin x$ zu unterscheiden, mögen jene hyperbolische, diese hingegen cyklische Potenzial Functionen heiſsen. Die Gründe dieser Benennungen werden später vorkommen. Auch die Tangenten und Cotangenten werden also unterschieden. Setzt man nemlich

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

als Bezeichnung der cyklischen Tangenten und Cotangenten fest, so findet man:

$$\mathfrak{Tang}(x\sqrt{-1}) = (\operatorname{tang} x).\sqrt{-1}, \qquad \operatorname{tang}(x\sqrt{-1}) = (\mathfrak{Tang}\,x).\sqrt{-1},$$

und eben so

$$\mathfrak{Cot}\,(x\sqrt{-1}) = \frac{\cot x}{\sqrt{-1}}, \qquad \cot\,(x\sqrt{-1}) = \frac{\mathfrak{Cot}\,x}{\sqrt{-1}},$$

so daſs also der Übergang von den hyperbolischen Functionen zu den cyklischen gleichförmig ist mit dem Rückgange von diesen zu jenen.

§. 7.

Die Multiplication der Gleichungen $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x\sqrt{-1}$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x\sqrt{-1}$ giebt die neue Formel:

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1.$$

dieselbe erhält man auch, wenn man in der ähnlichen früheren $\mathfrak{Cos}\,x^2 - \mathfrak{Sin}\,x^2 = 1$ für x nur $x\sqrt{-1}$ an die Stelle setzt, weil
$(\mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}))^2 = (\cos x)^2$ und $(\mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1}))^2 = ((\sin x).(\sqrt{-1}))^2 = -(\sin x)^2$ ist. Mit der so eben hergeleiteten Gleichung gehören noch die folgenden zusammen:

$$\operatorname{tang} x.\cot x = 1,$$

$$1 + \operatorname{tang} x^2 = \frac{1}{\cos x^2},$$

$$1 + \cot x^2 = \frac{1}{\sin x^2},$$

wodurch man in den Stand gesetzt wird, aus dem Werthe einer der vier Functionen $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$ und $\cot x$ jedesmal die drei anderen zu berechnen.

Ferner hat man, wenn gesetzt wird:
$u^{x\sqrt{-1}} = \cos(x, u) + \sin(x, u)\sqrt{-1}$ und $u^{-x\sqrt{-1}} = \cos(x, u) - \sin(x, u)\sqrt{-1}$, die Formeln: $\cos(x, u) = \cos(x \log u)$ und $\sin(x, u) = \sin(x \log u)$: wie auch endlich $\mathfrak{Cos}(x\sqrt{-1}, u) = \cos(x, u)$; $\mathfrak{Sin}(x\sqrt{-1}, u) = \sin(x, u) \,.\, \sqrt{-1}$, mit den umgekehrten Formeln:

$$\cos(x\sqrt{-1}, u) = \mathfrak{Cos}(x, u) \quad \text{und} \quad \sin(x\sqrt{-1}, u) = \mathfrak{Sin}(x, u) \,.\, \sqrt{-1}.$$

§. 8.

Zur Berechnung von $\cos x$ und $\sin x$ dienen die in §. 6. angegebenen Reihen, welche ebenfalls immer convergiren. Die Anwendung derselben ist am einfachsten für $x = 1$; man findet dann:

$$\cos 1 = 0,54030\ 23058\ 68039\ 71740\ 09367,$$
$$\sin 1 = 0,84147\ 09848\ 07896\ 50665\ 25024,$$

welche Werthe in die Gleichungen $e^{\sqrt{-1}} = \cos 1 + \sin 1 \,.\, \sqrt{-1}$ und $e^{-\sqrt{-1}} = \cos 1 - \sin 1 \,.\, \sqrt{-1}$ substituirt werden können.

Für $x = 0$ findet man, wie früher:

$$\cos 0 = 1; \quad \sin 0 = 0; \quad \operatorname{tang} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \cot 0 = \tfrac{1}{0}.$$

Stellt man sich die Beziehung zwischen den cyklischen Functionen und ihren Arcus umgekehrt vor, so hat man folgende Darstellungsweisen:

Ist $\cos x = z$, so ist $x = \operatorname{arc}(\cos = z)$.
Ist $\sin x = z$, so ist $x = \operatorname{arc}(\sin = z)$.
Ist $\operatorname{tang} x = z$, so ist $x = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = z)$.
Ist $\cot x = z$, so ist $x = \operatorname{arc}(\cot = z)$.

Die Arcus gegebener cyklischer Potenzial-Functionen lassen sich eben so wie die der hyperbolischen in geschlossenen Ausdrücken angeben. So hat man z. B.

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + z\sqrt{-1}}{1 - z\sqrt{-1}}.$$

§. 9.

Die für $\mathfrak{Cos}\, x$ und $\mathfrak{Sin}\, x$ angegebenen Reihen geben unmittelbar zu erkennen, daſs die Werthe dieser beiden hyperbolischen Functionen immerfort wachsen, wenn der Arcus x zunimmt, und daſs sie also jeder auch noch so groſsen Zahl gleich werden können. Aber nur der (hyperbolische) Sinus $\mathfrak{Sin}\, x$ kann jede Kleinheit erreichen, denn für $x = 0$ ist er selbst Null, der Cosinus hingegen ist immer > 1, und nur für $x = 0$ ist

er selbst $=1$. Auch bleibt der hyperbolische Cosinus einer Zahl immer größer als ihr Sinus; denn da $\mathfrak{Cos}\,x^2 - \mathfrak{Sin}\,x^2 = 1$ ist, so ist $\mathfrak{Cos}\,x^2 > \mathfrak{Sin}\,x^2$, und also $\mathfrak{Cos}\,x > \mathfrak{Sin}\,x$.

Da weiter $\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x}$, so ist $\mathfrak{Tang}\,x$ immer <1; übrigens wird die hyperbolische Tangente eines Arcus immer größer, wenn der Arcus wächst, welches durch die Formel $1 - \mathfrak{Tang}\,x^2 = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x^2}$ klar wird; sie nähert sich also von Null an dem Werthe Eins, als einer unerreichbaren Grenze. Eben daher nehmen bei wachsendem Arcus die hyperbolischen Cotangenten von $\frac{1}{0}$ an immer ab, und nähern sich der Grenze Eins ebenfalls ins Unendliche.

Bei weitem schwieriger ist es, das Verhalten der cyklischen Functionen beim wachsenden Arcus im Allgemeinen anzugeben, da aus den Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ nicht so leicht ihr Fallen und Steigen im Werthe erkannt wird, und aus der Gleichung $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$ nicht zu ersehen ist, ob $\cos x >$ oder $< \sin x$ sei.

Schließlich mögen noch einige Ausdrücke für die Potenzial-Functionen angegeben werden, welche bisweilen mit Nutzen zu gebrauchen sind. Setzt man nämlich $e^x = v$, so ist $e^{-x} = \frac{1}{v}$ und $x = \log v$. Werden diese Werthe substituirt, so hat man

$$\mathfrak{Cos}\log v = \frac{v^2+1}{2v}, \quad \mathfrak{Sin}\log v = \frac{v^2-1}{2v}, \quad \mathfrak{Tang}\log v = \frac{v^2-1}{v^2+1}.$$

Die Addition der beiden ersten Gleichungen giebt $\mathfrak{Cos}\log v + \mathfrak{Sin}\log v = v$, was auch anderweitig leicht erhellet.

Setzt man in der letzten Gleichung $v = \sqrt{(2w-1)}$, also $v^2 = 2w-1$, so erhält man

$$\mathfrak{Tang}\log\sqrt{(2w-1)} = 1 - \frac{1}{w}.$$

Leicht findet man auch die drei folgenden Formeln:

$$\mathfrak{Cos}\log\sqrt{\frac{1+w}{1-w}} = \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)}}; \quad \mathfrak{Sin}\log\sqrt{\frac{1+w}{1-w}} = \frac{w}{\sqrt{(1-w^2)}} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Tang}\log\sqrt{\frac{1+w}{1-w}} = w.$$

Setzt man in den vorigen Formeln z. B. $v = 2$, so findet man:

$$\mathfrak{Cos}\log 2 = \tfrac{5}{4}; \quad \mathfrak{Sin}\log 2 = \tfrac{3}{4} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\log 2 = \tfrac{3}{5},$$

als einfachste rationale Werthe der hyperbolischen Functionen; der Arcus ist aber:

$$\log 2 = 0{,}6931\ 4718\ 0559\ 9453\ 0941\ 7232\ 1214\ 5817\ 6568\ 0755\ldots.$$

Dritter Abschnitt.

Die einfachsten Beziehungen unter den Potenzial-Functionen verschiedener Arcus.

§. 10.

Für das gewöhnliche Rechnen mit den hyperbolischen und cyklischen Functionen ist es nothwendig, den Zusammenhang dieser Functionen bei einer Beziehung auf verschiedene Arcus zu kennen und in Formeln auszudrücken. Wird die Menge dieser Formeln nicht ohne Noth vergrößert, so können sie vom Gedächtnisse bewahrt werden.

Da $e^a = \mathfrak{Cos}\, a + \mathfrak{Sin}\, a$ und $e^b = \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, b$ ist, so erhält man durch Multiplication:

$$e^{a+b} = \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Sin}\, b + \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Sin}\, b.$$

Eben so giebt die Multiplication der Gleichungen $e^{-a} = \mathfrak{Cos}\, a - \mathfrak{Sin}\, a$ und $e^{-b} = \mathfrak{Cos}\, b - \mathfrak{Sin}\, b$:

$$e^{-a-b} = \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Sin}\, b - \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Cos}\, b - \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Sin}\, b.$$

Da nun aber $\mathfrak{Cos}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$ und $\mathfrak{Sin}(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2}$ ist, so findet man durch Substitution der vorhin entwickelten Producte die beiden Formeln:

$$1. \quad \mathfrak{Cos}(a+b) = \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Sin}\, b,$$

$$2. \quad \mathfrak{Sin}(a+b) = \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Sin}\, b.$$

Setzt man in diese Formeln $-b$ für b, so erhält man noch, da $\mathfrak{Cos} -b = \mathfrak{Cos}\, b$ und $\mathfrak{Sin} -b = -\mathfrak{Sin}\, b$ ist, die beiden Formeln:

$$3. \quad \mathfrak{Cos}(a-b) = \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Cos}\, b - \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Sin}\, b,$$

$$4. \quad \mathfrak{Sin}(a-b) = \mathfrak{Sin}\, a . \mathfrak{Cos}\, b - \mathfrak{Cos}\, a . \mathfrak{Sin}\, b.$$

Will man statt der hyperbolischen Functionen cyklische haben, so setze man nur in den erhaltenen vier Formeln $a\sqrt{-1}$ für a und zugleich $b\sqrt{-1}$ für b; die neuen Formeln sind dann:

$$5. \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$6. \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$7. \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$8. \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Vermöge dieser acht Formeln kann man aus den bekannten Sinus und Cosinus zweier Arcus den Sinus und Cosinus ihrer Summe und ihres Unterschiedes berechnen.

§. 11.

Man kann den so eben hergeleiteten Formeln auch folgende Gestalt

$$\mathfrak{Cos}(a \pm b) = \mathfrak{Cos}\,a\,.\,\mathfrak{Cos}\,b\,(1 \pm \mathfrak{Tang}\,a\,.\,\mathfrak{Tang}\,b),$$
$$\mathfrak{Sin}(a \pm b) = \mathfrak{Cos}\,a\,.\,\mathfrak{Cos}\,b\,(\mathfrak{Tang}\,a \pm \mathfrak{Tang}\,b),$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a\,.\,\cos b\,(1 \pm \operatorname{tang} a\,.\,\operatorname{tang} b),$$
$$\sin(a \pm b) = \cos a\,.\,\cos b\,(\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b),$$

und durch Dividiren erhält man dann ferner die vier neuen Formeln:

$$\mathfrak{Tang}(a+b) = \frac{\mathfrak{Tang}\,a + \mathfrak{Tang}\,b}{1 + \mathfrak{Tang}\,a\,.\,\mathfrak{Tang}\,b}, \qquad \operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a\,.\,\operatorname{tang} b},$$
$$\mathfrak{Tang}(a-b) = \frac{\mathfrak{Tang}\,a - \mathfrak{Tang}\,b}{1 - \mathfrak{Tang}\,a\,.\,\mathfrak{Tang}\,b}, \qquad \operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a\,.\,\operatorname{tang} b}.$$

Aus den bekannten Tangenten zweier Arcus lassen sich nach diesen Formeln die Tangente ihrer Summe und die ihres Unterschiedes berechnen. Für die Cotangenten könnte man leicht ähnliche Formeln herleiten. Man hat übrigens noch die vier folgenden Formeln:

$$\mathfrak{Tang}\,a + \mathfrak{Tang}\,b = \frac{\mathfrak{Sin}(a+b)}{\mathfrak{Cos}\,a\,.\,\mathfrak{Cos}\,b}, \qquad \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b},$$
$$\mathfrak{Tang}\,a - \mathfrak{Tang}\,b = \frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Cos}\,a\,.\,\mathfrak{Cos}\,b}, \qquad \operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}.$$

Die Summe und der Unterschied zweier Tangenten können hiernach immer in einen eingliedrigen Ausdruck umgesetzt werden.

§. 12.

Setzt man in früheren Formeln (des §. 10. $\frac{a}{2}$ sowohl für a als auch für b, so erhält man

1. $\mathfrak{Sin}\,a = 2\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{2}\,\mathfrak{Cos}\frac{a}{2}$ und $\sin a = 2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2}$,

2. $\mathfrak{Cos}\,a = \mathfrak{Cos}\frac{a^2}{2} + \mathfrak{Sin}\frac{a^2}{2}$ und $\cos a = \cos\frac{a^2}{2} - \sin\frac{a^2}{2}$,

3. $\mathfrak{Tang}\,a = \dfrac{2\,\mathfrak{Tang}\frac{a}{2}}{1 + \mathfrak{Tang}\frac{a}{2}}$ und $\operatorname{tang} a = \dfrac{2 \operatorname{tang}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{a^2}{2}}$

Die Formeln (2.) haben Ähnlichkeit mit den Formeln:

$$1 = \mathfrak{Cos}\frac{a^2}{2} - \mathfrak{Sin}\frac{a^2}{2} \quad \text{und} \quad 1 = \cos\frac{a^2}{2} + \sin\frac{a^2}{2},$$

und durch ihre Verbindung mit diesen erhält man die neuen Formeln:

4. $\mathfrak{Cos}\,a + 1 = 2\,\mathfrak{Cos}\frac{a^2}{2}$ und $1 + \cos a = 2 \cos\frac{a^2}{2}$,

5. $\mathfrak{Cos}\,a - 1 = 2\,\mathfrak{Sin}\frac{a^2}{2}$ und $1 - \cos a = 2 \sin\frac{a^2}{2}$.

Durch Division erhält man hieraus weiter:

$$6.\quad \mathfrak{Tang}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,a-1}{\mathfrak{Cos}\,a+1}}\qquad\text{und}\qquad \operatorname{tang}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

Macht man die Zähler oder auch die Nenner der letzten Ausdrücke rational, so entstehen die umgeformten Ausdrücke:

$$7.\quad \mathfrak{Tang}\frac{a}{2}=\frac{\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Cos}\,a+1}=\frac{\mathfrak{Cos}\,a-1}{\mathfrak{Sin}\,a}\qquad\text{und}\qquad \operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{1-\cos a}{\sin a}$$

Diese Ausdrücke lassen sich auch auf folgende Weise darstellen:

$$8.\quad \mathfrak{Tang}\frac{a}{2}=\mathfrak{Cot}\,a-\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,a}\qquad\qquad \operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{1}{\sin a}-\cot a$$

$$9.\quad \mathfrak{Cot}\frac{a}{2}=\mathfrak{Cot}\,a+\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,a}\qquad\qquad \cot\frac{a}{2}=\frac{1}{\sin a}+\cot a.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man hieraus ferner:

$$10.\quad \mathfrak{Cot}\frac{a}{2}-\mathfrak{Tang}\frac{a}{2}=\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,a};\qquad\qquad \cot\frac{a}{2}+\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\frac{2}{\sin a},$$

$$11.\quad \mathfrak{Cot}\frac{a}{2}+\mathfrak{Tang}\frac{a}{2}=2\,\mathfrak{Cot}\,a\qquad\qquad \cot\frac{a}{2}-\operatorname{tang}\frac{a}{2}=2\cot a$$

Endlich giebt die Umkehrung der Formeln (6.) die neuen:

$$12.\quad \mathfrak{Cos}\,a=\frac{1+\mathfrak{Tang}\frac{a^2}{2}}{1-\mathfrak{Tang}\frac{a^2}{2}}\qquad\text{und}\qquad \cos a=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{a^2}{2}}{1+\operatorname{tang}\frac{a^2}{2}}.$$

§. 13.

Producte von Sinus und Cosinus lassen sich in Summen und Unterschiede solcher Functionen, und umgekehrt diese in jene umsetzen. Dazu dienen die Formeln:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{Cos}\,a.\mathfrak{Cos}\,b=\tfrac{1}{2}\mathfrak{Cos}(a+b)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Cos}(a-b) & & \cos a.\cos b=\tfrac{1}{2}\cos(a-b)+\tfrac{1}{2}\cos(a+b),\\
\mathfrak{Sin}\,a.\mathfrak{Sin}\,b=\tfrac{1}{2}\mathfrak{Cos}(a+b)-\tfrac{1}{2}\mathfrak{Cos}(a-b) & \text{und} & \sin a.\sin b=\tfrac{1}{2}\cos(a-b)-\tfrac{1}{2}\cos(a+b),\\
\mathfrak{Sin}\,a.\mathfrak{Cos}\,b=\tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}(a+b)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}(a-b) & & \sin a.\cos b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)+\tfrac{1}{2}\sin(a-b),\\
\mathfrak{Cos}\,a.\mathfrak{Sin}\,b=\tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}(a+b)-\tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}(a-b) & & \cos a.\sin b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)-\tfrac{1}{2}\sin(a-b),
\end{array}$$

welche durch die einfachsten Verbindungen der Formeln des §. 10. gewonnen werden. Setzt man hierin weiter $\frac{a+b}{2}$ für a und $\frac{a-b}{2}$ für b, so erhält man noch:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Cos}\,b=2\,\mathfrak{Cos}\frac{a+b}{2}.\mathfrak{Cos}\frac{a-b}{2} & & \cos b+\cos a=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2},\\
\mathfrak{Cos}\,a-\mathfrak{Cos}\,b=2\,\mathfrak{Sin}\frac{a+b}{2}.\mathfrak{Sin}\frac{a-b}{2} & \text{und} & \cos b-\cos a=2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2},\\
\mathfrak{Sin}\,a+\mathfrak{Sin}\,b=2\,\mathfrak{Sin}\frac{a+b}{2}.\mathfrak{Cos}\frac{a-b}{2} & & \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2},\\
\mathfrak{Sin}\,a-\mathfrak{Sin}\,b=2\,\mathfrak{Cos}\frac{a+b}{2}.\mathfrak{Sin}\frac{a-b}{2} & & \sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}.
\end{array}$$

Aus diesen Formeln können wieder neue abgeleitet werden; unter andern:

$$\mathfrak{Cos}\, a^2 - \mathfrak{Cos}\, b^2 = \mathfrak{Sin}\, a^2 - \mathfrak{Sin}\, b^2 = \mathfrak{Sin}(a+b).\mathfrak{Sin}(a-b),$$
$$\cos b^2 - \cos a^2 = \sin a^2 - \sin b^2 = \sin(a+b).\sin(a-b).$$

§. 14.

Der Gleichung $\sin k^2 + \cos k^2 = 1$ gemäfs, nimmt der Werth des cyklischen Cosinus ab, wenn der cyklische Sinus zunimmt, und umgekehrt. Da ferner, ungeachtet der ins Unendliche fortgesetzten Vergröfserung des Arcus k, die Functionen $\sin k$ und $\cos k$ im Werthe nie mehr betragen als ± 1, so entsteht die Vermuthung, dafs zu verschiedenen Arcus nicht immer verschiedene Sinus und Cosinus gehören, und auch, dafs es einen oder mehr Arcus geben werde, deren Sinus so grofs sind, als ihre Cosinus. Stellt k den kleinsten dieser Arcus vor, falls es deren mehr giebt, und setzt man $\sin k = \cos k$, so findet man

$$\sin k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ und also auch } \cos k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Das Vierfache dieser Zahl k, welche später berechnet wird, ist mit π bezeichnet worden, und man hat also:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

so wie

$$\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-\tfrac{1}{2}} \quad\text{und}\quad \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

also auch

$$\tang\frac{\pi}{4} = 1 \quad\text{und}\quad \mathfrak{Tang}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}.$$

Setzt man in der Formel $\cos a = \cos\frac{a^2}{2} - \sin\frac{a^2}{2}$, $2k$ oder $\frac{\pi}{2}$ an die Stelle von a, so erhält man $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; und die Formel $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$ giebt $\sin\frac{\pi}{2} = +1$.

Setzt man in den so eben gebrauchten Formeln $a = \pi$, so findet man $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$.

Wird weiter in den Formeln $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ und $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ für a gesetzt π, und für b gesetzt $\frac{\pi}{2}$, so findet man $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ und $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. Auf ähnliche Art findet man $\cos 2\pi = 1$ und $\sin 2\pi = 0$.

Setzt man endlich in den Formeln $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ und $\sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$, 2π an die Stelle von b, so findet man

$$\left.\begin{aligned}\cos(a\pm 2\pi) &= \cos a,\\ \sin(a\pm 2\pi) &= \sin a,\end{aligned}\right\} \text{ also auch } \tang(a\pm 2\pi) = \tang a.$$

Man darf also den Arcus einer cyklischen Function immer um 2π, und also überhaupt um ein Vielfaches der Zahl 2π vermehren oder vermindern, ohne dafs dadurch der Werth der cyklischen Function im mindesten verändert wird; sie sind also **periodische** Functionen, weil immer dieselben Reihen ihrer Werthe wiederkehren.

§. 15.

Wollte man Tabellen für die cyklischen Functionen entwerfen, aus welchen für jeden Arcus der Werth einer ihm zugehörigen cyklischen Function entnommen werden könnte, so reicht es, wie man bald einsicht, hin, die Werthe des cyklischen Sinus und der cyklischen Tangente für die wachsenden Arcus zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu berechnen, weil sie zur Realisirung der Werthe auch der übrigen cyklischen Functionen dienen, und auch dann noch dazu dienen, wenn der Arcus weit über die genannten Grenzen hinausgeht. Die Formeln $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ und $\operatorname{tang} a = \cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, welche leicht bewiesen werden, zeigen nemlich, dafs die berechneten Sinus zugleich Cosinus, und die berechneten Tangenten zugleich Cotangenten sind, wenn nur die Arcus dieser von den Arcus jener allemal zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzt werden.

Ist aber ein Arcus gröfser als $\frac{\pi}{2}$ und $< \pi$, so dienen zur Realisirung der Werthe eines solchen Arcus die Formeln:

$$\sin k = \sin(\pi - k); \quad \cos k = -\cos(\pi - k); \quad \operatorname{tang} k = -\operatorname{tang}(\pi - k) \text{ und } \cot k = -\cot(\pi - k),$$

oder auch die folgenden:

$$\sin k = \cos\left(k - \frac{\pi}{2}\right); \quad \cos k = -\sin\left(k - \frac{\pi}{2}\right); \quad \operatorname{tang} k = -\cot\left(k - \frac{\pi}{2}\right) \text{ und } \cot k = -\operatorname{tang}\left(k - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ist ein Arcus $k > \pi$, aber $< \frac{3}{2}\pi$, so rechnet man nach den Formeln

$$\sin k = -\sin(k - \pi); \quad \cos k = -\cos(k - \pi); \quad \operatorname{tang} k = \operatorname{tang}(k - \pi) \text{ und } \cot k = \cot(k - \pi).$$

Ist ein Arcus $k > \frac{3}{2}\pi$ und $< 2\pi$, so dienen die Formeln:

$$\sin k = -\sin(2\pi - k); \quad \cos k = \cos(2\pi - k); \quad \operatorname{tang} k = -\operatorname{tang}(2\pi - k) \text{ und } \cot k = -\cot(2\pi - k).$$

Ist endlich der Arcus $k > 2\pi$, so wird man so oft 2π davon subtrahiren, als es angeht, weil eine solche Verkleinerung auf den Werth der

cyklischen Function keinen Einfluſs hat; und da ihr Arcus dann $< 2\pi$ ist, so kann ihr Werth nach den vorigen Regeln aus der erwähnten Tabelle entnommen werden.

Die willkürliche Eintheilung der Zahl 2π in 360 sogenannte Grade, wie auch die neuere Eintheilung derselben Zahl in 400 (kleinere) Grade nebst den Unter-Abtheilungen, sind bekannt; auch die Einrichtung und der Gebrauch der sogenannten trigonometrischen Tafeln.

Von den mehreren Formeln, welche gewöhnlich in den Lehrbüchern der Trigonometrie aufgestellt werden, finden hier nur noch wenige Platz, weil sie später in Gebrauch kommen.

Da $1+\sin a = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ ist, so hat man:

$$1.\quad \begin{cases} 1+\sin a = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right)^2, \\ 1-\sin a = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right)^2. \end{cases}$$

Da ferner $\cos\frac{a^2}{2}+\sin\frac{a^2}{2}=1$ und $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\sin a$ ist, so erhält man durch Addition und Subtraction:

$$2.\quad \begin{cases} \cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2} = \sqrt{(1+\sin a)}, \\ \cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2} = \sqrt{(1-\sin a)}, \end{cases}$$

also auch:

$$3.\quad \frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}} = \frac{1-\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tang}\frac{a}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1-\sin a}{1+\sin a}\right)} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

§. 16.

Werden die Potenzialfunctionen auf einen Arcus von der Form $a+b\sqrt{-1}$ bezogen, so gestatten sie eine Entwickelung, wodurch sie unter die ähnliche Form $A+B\sqrt{-1}$ gebracht werden, nemlich für die hyperbolischen Functionen:

$$\mathfrak{Cos}\,(a+b\sqrt{-1}) = \mathfrak{Cos}\,a.\cos b + \mathfrak{Sin}\,a.\sin b.\sqrt{-1},$$
$$\mathfrak{Cos}\,(a-b\sqrt{-1}) = \mathfrak{Cos}\,a.\cos b - \mathfrak{Sin}\,a.\sin b.\sqrt{-1},$$
$$\mathfrak{Sin}\,(a+b\sqrt{-1}) = \mathfrak{Sin}\,a.\cos b + \mathfrak{Cos}\,a.\sin b.\sqrt{-1},$$
$$\mathfrak{Sin}\,(a-b\sqrt{-1}) = \mathfrak{Sin}\,a.\cos b - \mathfrak{Cos}\,a.\sin b.\sqrt{-1}.$$

Für die cyklischen Functionen erhält man die ähnlichen Formeln:

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \cos a . \mathrm{Cos}\, b - \sin a . \mathrm{Sin}\, b . \sqrt{-1},$$
$$\cos(a-b\sqrt{-1}) = \cos a . \mathrm{Cos}\, b + \sin a . \mathrm{Sin}\, b . \sqrt{-1},$$
$$\sin(a+b\sqrt{-1}) = \sin a . \mathrm{Cos}\, b + \cos a . \mathrm{Sin}\, b . \sqrt{-1},$$
$$\sin(a-b\sqrt{-1}) = \sin a . \mathrm{Cos}\, b - \cos a . \mathrm{Sin}\, b . \sqrt{-1}.$$

Ohne auf die möglichen Verbindungen unter diesen Formeln einzugehen, beschränken wir uns auf specielle Annahmen, welche die Gröfse von b in den vier ersten Formeln betreffen.

Setzt man $b = \frac{\pi}{2}$, so hat man die beiden Formeln:

$$\mathrm{Cos}\left(a \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right) = \pm\, \mathrm{Sin}\, a . \sqrt{-1},$$
$$\mathrm{Sin}\left(a \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right) = \pm\, \mathrm{Cos}\, a . \sqrt{-1}.$$

Wird $b = \pi = \frac{2\pi}{2}$ gesetzt, so sind die Formeln:

$$\mathrm{Cos}(a \pm \pi\sqrt{-1}) = -\mathrm{Cos}\, a,$$
$$\mathrm{Sin}(a \pm \pi\sqrt{-1}) = -\mathrm{Sin}\, a.$$

Für $b = 3 . \frac{\pi}{2}$ erhalten wir die zwei Formeln:

$$\mathrm{Cos}(a \pm \tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1}) = \mp\, \mathrm{Sin}\, a . \sqrt{-1}.$$
$$\mathrm{Sin}(a \pm \tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1}) = \mp\, \mathrm{Cos}\, a . \sqrt{-1}.$$

Setzt man endlich b gleich einem Vielfachen der Zahl 2π, oder $b = 2n\pi$, so hat man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$\mathrm{Cos}(a \pm 2n\pi\sqrt{-1}) = \mathrm{Cos}\, a,$$
$$\mathrm{Sin}(a \pm 2n\pi\sqrt{-1}) = \mathrm{Sin}\, a.$$

Die hyperbolischen Functionen zeigen also auch ein periodisches Wiederkehren ihrer Werthe bei unmöglichen Arcus, und umgekehrt fehlt den cyklischen Functionen diese Eigenschaft bei einer Beziehung auf unmögliche Arcus.

Was die Tangenten betrifft, so erhält man für sie die Formeln:

$$\mathrm{Tang}\left(a \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right) = \mathrm{Cot}\, a,$$
$$\mathrm{Tang}(a \pm \pi\sqrt{-1}) = \mathrm{Tang}\, a,$$
$$\mathrm{Tang}(a \pm \tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1}) = \mathrm{Cot}\, a,$$
$$\mathrm{Tang}(a \pm 2n\pi\sqrt{-1}) = \mathrm{Tang}\, a.$$

Zu einer jeden hyperbolischen Function gehören also unzählige Arcus, die sich um ein Vielfaches des Ausdrucks $2\pi\sqrt{-1}$ von einander unterscheiden; bei den Tangenten und Cotangenten ist dieser Unterschied überhaupt ein Vielfaches von $\pi\sqrt{-1}$.

Vierter Abschnitt.

Differenziale der Potenzial-Functionen und ihrer Arcus. Grundformeln für die Integrale.

§. 17.

Wenn man die Reihe $\mathfrak{Sin}\,x = S\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}$ differenzürt, so erhält man $\partial\,\mathfrak{Sin}\,x = \partial x . S\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$, oder einfacher:

$$1.\quad \partial\,\mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Cos}\,x . \partial x.$$

Auf ähnliche Art findet man aus der Reihe für $\mathfrak{Cos}\,x$ das Differenzial

$$2.\quad \partial\,\mathfrak{Cos}\,x = \mathfrak{Sin}\,x . \partial x.$$

Dasselbe Resultat erhält man aber auch, indem man die Gleichung $\mathfrak{Cos}\,x^2 = 1 + \mathfrak{Sin}\,x^2$ differenzürt.

Da weiter $\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x}$ ist, so hat man

$$\partial\,\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\mathfrak{Cos}\,x\,\partial\,\mathfrak{Sin}\,x - \mathfrak{Sin}\,x\,\partial\,\mathfrak{Cos}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x^2},$$

und werden die früheren Resultate substituirt, so gelangt man zu

$$3.\quad \partial\,\mathfrak{Tang}\,x = \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\,x^2} = \partial x\,(1 - \mathfrak{Tang}\,x^2).$$

Eben so findet man

$$4.\quad \partial\,\mathfrak{Cot}\,x = \frac{-\partial x}{\mathfrak{Sin}\,x^2} = -\partial x\,(\mathfrak{Cot}\,x^2 - 1).$$

Setzt man in sämmtlichen Formeln $x\sqrt{-1}$ für x, so erhält man für die cyklischen Functionen die Formeln:

$$5.\quad \partial \sin x = \cos x . \partial x,$$

$$6.\quad \partial \cos x = -\sin x . \partial x,$$

$$7.\quad \partial\,\mathrm{tang}\,x = \frac{\partial x}{\cos x^2} = \partial x\,(1 + \mathrm{tang}\,x^2),$$

$$8.\quad \partial \cot x = \frac{-\partial x}{\sin x^2} = -\partial x\,(1 + \cot x^2).$$

Die Differenziale der natürlichen Logarithmen der Potenzialfunctionen sind eben so einfach, und zwar:

$$9.\quad \partial \log \mathfrak{Cos}\,x = \mathfrak{Tang}\,x . \partial x \qquad \partial \log \cos x = -\mathrm{tang}\,x . \partial x,$$

$$10.\quad \partial \log \mathfrak{Sin}\,x = \mathfrak{Cot}\,x . \partial x \quad \text{und} \quad \partial \log \sin x = \cot x . \partial x,$$

$$11.\quad \partial \log \mathfrak{Tang}\,x = \frac{2\,\partial x}{\mathfrak{Sin}\,2x} \qquad \partial \log \mathrm{tang}\,x = \frac{2\,\partial x}{\sin 2x},$$

setzt man in der Formel für $\partial \log \mathrm{tang}\,x$, $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ anstatt x, so erhält man:

$$12.\quad \partial \log \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\partial x}{\cos x}.$$

§. 18.

Setzt man $\mathfrak{Sin}\, x = v$, so ist $\partial v = \mathfrak{Cos}\, x . \partial x = \partial x \sqrt{(1+v^2)}$; also hat man
$$\partial\, \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = v) = \frac{\partial v}{\sqrt{(v^2+1)}}.$$
Setzt man $\mathfrak{Cos}\, x = v$, so ist $\mathfrak{Sin}\, x = \sqrt{(v^2-1)}$ und $\partial v = \partial x . \mathfrak{Sin}\, x = \partial x \sqrt{(v^2-1)}$; also $\partial\, \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = v) = \frac{\partial v}{\sqrt{(v^2-1)}}$.

Auf ähnliche Art findet man noch die beiden Formeln:
$$\partial\, \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = v) = \frac{\partial v}{1-v^2} \quad \text{und} \quad \partial\, \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cot} = v) = \frac{-\partial v}{v^2-1}.$$
Für die cyklischen Functionen giebt es eben so viele Formeln, nemlich:
$$\partial \operatorname{arc}(\sin = v) = \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}},$$
$$\partial \operatorname{arc}(\cos = v) = \frac{-\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}},$$
$$\partial \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = v) = \frac{\partial v}{1+v^2},$$
$$\partial \operatorname{arc}(\cot = v) = \frac{-\partial v}{1+v^2}.$$
Wenn man, umgekehrt, integrirt, so hat man:

1) $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(v^2+1)}} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = v) + \text{const.}$ 2) $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}} = \operatorname{arc}(\sin = v) + \text{const.}$

3) $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(v^2-1)}} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = v) + \text{const.}$ 4) $\int \frac{-\partial v}{\sqrt{(1-v^2)}} = \operatorname{arc}(\cos = v) + \text{const.}$

5) $\int \frac{\partial v}{1-v^2} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = v) + \text{const.}$ 6) $\int \frac{\partial v}{1+v^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = v) + \text{const.}$

7) $\int \frac{-\partial v}{v^2-1} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cot} = v) + \text{const.}$ 8) $\int \frac{-\partial v}{1+v^2} = \operatorname{arc}(\cot = v) + \text{const.}$

und diese acht Formeln dienen als Grundformeln für die Integrale. Kann man ein vorgelegtes Integral unter eine von diesen Formeln bringen, so gelingt die Integration mit Leichtigkeit. Bisher sind nur die Formeln (2, 4, 6, 8) also benutzt worden; wo man die Formeln (1, 3, 5, 7) anzuwenden im Falle gewesen wäre, verzichtete man bisher auf ihre Benutzung, wegen Mangels gehöriger Ausbildung der Lehre von den hyperbolischen Functionen, und behalf sich mit den sogenannten logarithmischen Functionen, wenn gleich die Form solcher logarithmischer Integrale fast nie so bequem war, als man wünschen konnte. Wie ungleichmäfsig hier das Verfahren der Integralrechnung sei, und welche Weitläufigkeiten aus dieser Ungleichmäfsigkeit entstehen, darauf braucht wohl nicht aufmerksam gemacht zu werden.

Fünfter Abschnitt.

Reihen zur Berechnung der Arcus aus gegebenen Potenzial-Functionen.

§. 19.

Um zuerst die steigende Anordnung zu wählen, nehmen wir das Integral $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(1+v^2)}} = \int \partial v (1+v^2)^{-\frac{1}{2}}$ und entwickeln die Potenz $(1+v^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von v^2. Setzen wir, in Anwendung der Bezeichnung für die Facultäten von **Vandermonde**:

$\overset{1}{[n]} = n$;

$\overset{2}{[n]} = n(n-1)$;

$\overset{3}{[n]} = n(n-1)(n-2)$; allgemein: $\overset{m}{[n]} = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$;

u. s. w.,

so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$(a+b)^n = a^n + \overset{1}{[n]}_{1} a^{n-1} b + \overset{2}{[n]}_{2} a^{n-2} b^2 + \overset{3}{[n]}_{3} a^{n-3} b^3 + \overset{4}{[n]}_{4} a^{n-4} b^4 + \text{ etc.},$$

oder einfacher:

$$(a+b)^n = S \overset{\alpha}{[n]}_{\alpha} a^{n-\alpha} b^\alpha,$$

und also auch:

$$(1+v^2)^{-\frac{1}{2}} = S \overset{\alpha}{[-\tfrac{1}{2}]}_{\alpha} v^{2\alpha}.$$

Wird auf beiden Seiten mit ∂v multiplicirt und dann integrirt, so hat man

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = v) = S \overset{\alpha}{[-\tfrac{1}{2}]}_{\alpha} \cdot \frac{v^{2\alpha+1}}{2\alpha+1},$$

denn, wenn das Integral für $v = 0$ verschwinden soll, so ist die hinzuzufügende Constante Null. Setzt man $v\sqrt{-1}$ für v, so hat man:

$$\operatorname{arc}(\sin = v) = S(-1)^\alpha \overset{\alpha}{[-\tfrac{1}{2}]}_{\alpha} \cdot \frac{v^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

Da weiter $\frac{\partial v}{1-v^2} = S v^{2\alpha} . \partial v$, so hat man durch Integration

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = v) = S \frac{v^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}, \text{ also auch } \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = v) = S(-1)^\alpha \frac{v^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

Da $\log \sqrt{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = v)$, so ist die dritte Reihe auch als eine Entwickelung von $\log \sqrt{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)}$ anzusehen; sie convergirt übrigens immer, da v, als Werth einer hyperbolischen Tangente, immer < 1 ist.

Die ersten Glieder dieser vier Reihen sind:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = v) = \frac{v}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{v^9}{9} - \text{etc.}$$

$$\text{arc}(\sin = v) = \frac{v}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3} + \frac{1.3}{2.3}\cdot\frac{v^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{v^9}{9} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = v) = v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} + \frac{v^7}{7} + \frac{v^9}{9} + \text{etc}$$

$$\text{arc}(\text{tang} = v) = v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + \frac{v^9}{9} - \text{etc.}$$

Man hat die zweite und auch die vierte Reihe auf mehr als eine Weise benutzt, um die sogenannte Ludolphische Zahl π danach zu berechnen, indem der Cosinus ihrer Hälfte gleich Null, also der Sinus dieser Hälfte, welcher $= 1$ ist, bekannt ist. Es ist gefunden worden:

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ldots$$

Man hat diese Zahl mit mehr als 150 Decimalstellen berechnet angegeben.

§. 20.

Eine Reihe, welche nach steigenden Potenzen des (hyperbolischen) Cosinus fortschritte, würde unnütz sein, wenn man sie auch herleiten könnte, da der Cosinus immer > 1 ist. Aber der Ausdruck $\int\frac{\partial v}{\sqrt{(v^2-1)}} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = v) + \text{const.}$ kann nach einiger Umformung brauchbar werden zu einer steigenden Entwickelung.

Setzt man nemlich $v = 1 + w$, also $\partial v = \partial w$ und $v^2 - 1 = 2w + w^2 = w(2+w)$, so hat man:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = 1 + w) = \int\frac{\partial w}{\sqrt{2w}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{w}{2}\right)}},$$

und da $\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{w}{2}\right)}} = S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha}\left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha}$ ist, so ist:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = 1 + w) = S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{2\alpha+1}{2}}\cdot\int w^{\frac{2\alpha-1}{2}}\,\partial w.$$

Die Integration giebt:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos} = 1 + w) = \left(S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'}\frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha}}{2\alpha+1}\right)\cdot\sqrt{2w},$$

weil die Constante wieder Null ist, da das Integral für $1 + w = 1$ oder $w = 0$ verschwinden muſs. Man kann die Reihe auch so schreiben:

$$x = \left(S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'}\frac{\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,x - 1}{2}\right)^{\alpha}}{2\alpha+1}\right)\cdot\sqrt{(2(\mathfrak{Cos}\,x - 1))},$$

und da $\mathfrak{Cos}\,x-1=2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x^2}{2}$, so hat man, nach einer geringen Reduction:

$$\frac{x}{2}=S[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}\frac{\left(\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1},$$

welche Reihe mit der ersten im §. 19. wieder zusammenfällt. Im Anhange wird aber noch eine von den vorigen verschiedene, steigende Entwickelung hergeleitet werden.

§. 21.

Reihen mit fallender Anordnung der Glieder, welche brauchbar sind, gestatten die hyperbolischen Cosinus und Sinus, nicht aber die cyklischen. Da nemlich:

$$(v^2+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{v}+S[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}v^{-(2\alpha+1)}\qquad \text{für } \alpha>0 \text{ ist,}$$

$$\text{und}\quad (v^2-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{v}+S(-1)^{\alpha}[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}v^{-(2\alpha+1)}$$

so hat man durch Integration, nach vorhergegangener Multiplication mit ∂v.

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin}=v)=\text{const.}+\log v-S[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}.\frac{v^{-2\alpha}}{2\alpha}\qquad\text{für }\alpha>0,$$

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos}=v)=\text{const.}+\log v-S(-1)^{\alpha}[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}.\frac{v^{-2\alpha}}{2\alpha}\quad\text{für }\alpha>0.$$

Entwickelt man aber die Formeln:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin}=v)=\log(v+\sqrt{(v^2+1)}),$$
$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos}=v)=\log(v+\sqrt{(v^2-1)}),$$

so findet man zum Anfangsgliede beider Reihen $\log(2v)=\log 2+\log v$, so dafs also in beiden Reihen const. $=\log 2$ ist. Man hat also

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin}=v)=\log(2v)-S[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}.\frac{\left(\frac{1}{v}\right)^{2\alpha}}{2\alpha}\qquad\text{für }\alpha>0,$$

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos}=v)=\log(2v)-S(-1)^{\alpha}[-\tfrac{1}{2}]_{\alpha'}^{\alpha}.\frac{\left(\frac{1}{v}\right)^{2\alpha}}{2\alpha}\quad\text{für }\alpha>0,$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen sind:

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos}=v)=\log(2v)-\frac{1}{2}.\frac{1}{2v^2}-\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{4v^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{6v^6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{8v^8}-\text{etc.}$$

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin}=v)=\log(2v)+\frac{1}{2}.\frac{1}{2v^2}-\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{4v^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{6v^6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{8v^8}+\text{etc.}$$

Sie sind sehr brauchbar, wenn v eine beträchtliche Gröfse hat. Man kann aus diesen beiden Reihen eine dritte herleiten. Setzt man nemlich

$$\mathfrak{Sin}(x+d) = \mathfrak{Cos}\,x,$$

so findet man

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x}\right)^6 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x}\right)^{10} + \text{etc.}$$

zum Ausdrucke der Zahl, welche man dem Arcus eines hyperbolischen Cosinus noch zulegen mufs, damit der Sinus des also vergröfserten Arcus dem gegebenen Cosinus gleich komme.

Der Ausdruck

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}\right)^6 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}\right)^{10} + \text{etc.}$$

gilt für die Zahl, um welche man den Arcus eines gegebenen Sinus vermindern mufs, wenn der Cosinus des verkleinerten Arcus dem gegebenen Sinus gleich sein soll.

Beide Reihen convergiren in der Regel rasch, und man sieht daraus, dafs d immer desto kleiner ist, je gröfser x genommen wird.

Sechster Abschnitt.

Differenzen der Arcus der Potenzial-Functionen.

§. 22.

Bei der Entwickelung der Differenzen der Arcus der Potenzial-Functionen kommt Vieles auf die Herleitung der höheren Differenziale des Arcus der vorliegenden Function an. Es sei $\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = x) = k$, so ist $x = \mathfrak{Tang}\,k$, und wenn x sich verändert und etwa das Increment Δx nimmt so geht k über in $k + \Delta k$. Nach dem Taylorschen Satze hat man dann:

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{2'} + \frac{\partial^3 k}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{3'} + \text{etc.}$$

oder

$$k + \Delta k = S\,\frac{\partial^\alpha k}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\Delta x^\alpha}{\alpha'}.$$

Da nun aber $k = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ oder $2k = \log(1+x) - \log(1-x)$ ist, so hat man:

$$\frac{2\partial k}{\partial x} = (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}.$$

Differenziirt man also noch $(r-1)$mal nach einander, so erhält man:

$$\frac{\partial^r k}{\partial x^r} = \frac{(r-1)'}{2}\left[(1-x)^{-r} + (-1)^{r-1}(1+x)^{-r}\right].$$

Nun ist aber $x = \mathfrak{Tang}\,k$, also $(1-x)^{-r} = (\mathfrak{Cos}\,k - \mathfrak{Sin}\,k)^{-r}.\,\mathfrak{Cos}\,k^r = e^{+kr}.\,\mathfrak{Cos}\,k^r$ und $(-1)^{r-1}.(1+x)^{-r} = (-1)^{r-1}.(\mathfrak{Cos}\,k + \mathfrak{Sin}\,k)^{-r}.\,\mathfrak{Cos}\,k^r = (-1)^{r-1}.e^{-kr}.\,\mathfrak{Cos}\,k^r$;

also hat man:
$$\frac{\partial^r k}{\partial x^r} = \frac{(r-1)'}{2} \mathfrak{Cos}\, k^r (e^{kr} - (-1)^r e^{-kr}).$$
Der Ausdruck läfst sich noch weiter zusammenziehen, wenn man zwei Fälle unterscheidet, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

1. Für ein gerades r hat man $\frac{\partial^r k}{\partial x^r} = (r-1)' \mathfrak{Cos}\, k^r . \mathfrak{Sin}(rk)$.

2. Für ein ungerades r hat man $\frac{\partial^r k}{\partial x^r} = (r-1)' \mathfrak{Cos}\, k^r . \mathfrak{Cos}(rk)$.

In Anwendung dieser Resultate giebt die vorhin genannte Taylorsche Reihe
$$\Delta k = \mathfrak{Cos}\, k . (\mathfrak{Cos}\, k . \Delta \mathfrak{Tang}\, k)^1 + \frac{\mathfrak{Sin} 2k}{2} (\mathfrak{Cos}\, k . \Delta \mathfrak{Tang}\, k)^2 + \frac{\mathfrak{Cos} 3k}{3} (\mathfrak{Cos}\, k . \Delta \mathfrak{Tang}\, k)^3 + \text{etc}$$
um zu der ähnlichen Reihe für die cyklischen Functionen zu gelangen setze man nur $k\sqrt{-1}$ für k, und die Reihe ist:
$$\Delta k = \cos k . (\cos k . \Delta \tang k)^1 - \frac{\sin 2k}{2} (\cos k . \Delta \tang k)^2 - \frac{\cos 3k}{3} (\cos k . \Delta \tang k)^3 + + \text{etc}$$

§. 23.

Um die übrigen vorgelegten Aufgaben zu lösen, mufs man die höheren Differenzialverhältnisse von $(v^2 \pm 1)^{-\frac{1}{2}}$ berechnen. Setzen wir
$$w = (v^2 + k)^{-\frac{1}{2}},$$
so ist $w + \Delta w = ((v + \Delta v)^2 + k)^{-\frac{1}{2}}$, und wird dieser Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von Δv entwickelt, von der Form:
$\overset{0}{a} + \overset{1}{a} . \Delta v + \overset{2}{a} . \Delta v^2 + \overset{3}{a} . \Delta v^3 \ldots . + \overset{\alpha}{a} . \Delta v^\alpha \ldots .$ so ist:
$$\overset{r}{a} = \frac{1}{r'} . \frac{\partial^r w}{\partial v^r}.$$
Die wirkliche Entwicklung giebt aber:
$$w + \Delta w = S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha} (v^2 + k)^{-\frac{1}{2}-\alpha} . (2v + \Delta v)^\alpha . \Delta v^\alpha,$$
und wird auch noch die Potenz $(2v + \Delta v)^\alpha$ weiter entwickelt, so hat man:
$$\frac{1}{r'} . \frac{\partial^r w}{\partial v^r} = S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} [\alpha]^{\beta}_{\beta'} . \frac{(2v)^{\alpha-\beta}}{(v^2 + k)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \qquad (\text{conditione: } \alpha + \beta = r)$$
Dieser Ausdruck gestattet aber noch manche vereinfachende Abänderungen seiner Form. Zunächst ist klar, dafs jedes Glied desselben für $\alpha < \beta$ gleich Null ist, und man also sogleich $\alpha + \beta$ für α setzen darf, wodurch die Bedingungsgleichung $\alpha + \beta = r$ in $\alpha + 2\beta = r$ übergeht, so dafs nachher $\alpha + \beta = r - \beta$ ist. Man hat hiernach:
$$\frac{1}{r'} . \frac{\partial^r w}{\partial v^r} = S[-\tfrac{1}{2}]^{r-\beta}_{(r-\beta)'} . [r - \beta]^{\beta}_{\beta'} . \frac{(2v)^{r-2\beta}}{(v^2 + k)^{r-\beta+\frac{1}{2}}}.$$

Da weiter $\frac{r'}{(r-\beta)'\cdot\beta'} = [r]^{\beta}_{\beta'}$ und $[r]^{\beta}[r-\beta]^{\beta} = [r]^{2\beta}$ ist, so hat man:

$$\frac{\partial^r w}{\partial v^r} = S[r]^{2\beta}_{\beta'}[-\tfrac{1}{2}]^{r-\beta}\cdot\frac{(2v)^{r-2\beta}}{(v^2+k)^{r-\beta+\frac{1}{2}}}.$$

Da endlich $[-\tfrac{1}{2}]^{r} = [-\tfrac{1}{2}]^{r-\beta}[-\tfrac{1}{2}-r+\beta]^{\beta} = (-1)^{\beta}[-\tfrac{1}{2}]^{r-\beta}[r-\tfrac{1}{2}]^{\beta}$, und also rückwärts $[-\tfrac{1}{2}]^{r-\beta} = [-\tfrac{1}{2}]^{r} : (-1)^{\beta}[r-\tfrac{1}{2}]^{\beta}$ ist, so hat man:

$$\frac{\partial^r w}{\partial v^r} = 2^r[-\tfrac{1}{2}]^{r} S(-1)^{\beta}[r]^{2\beta}_{\beta'}\cdot\frac{1}{2^{2\beta}[r-\frac{1}{2}]^{\beta}}\cdot\frac{v^{r-2\beta}}{(v^2+k)^{r-\beta+\frac{1}{2}}}.$$

§. 24.

Setzt man nun $k=+1$ und $v=\mathfrak{Sin}\,k$, so ist $\frac{\partial^r w}{\partial v^r} = \frac{\partial^{r+1}k}{(\partial\,\mathfrak{Sin}\,k)^{r+1}}$; $v^2+1=\mathfrak{Cos}\,k^2$, und also $\frac{v^{r-2\beta}}{(v^2+1)^{r-\beta+\frac{1}{2}}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,k^{r-2\beta}}{\mathfrak{Cos}\,k^{2r-2\beta+1}} = \frac{\mathfrak{Tang}\,k^{r-2\beta}}{\mathfrak{Cos}\,k^{r+1}}$. Werden diese Werthe substituirt, so hat man:

$$\partial^{r+1}k = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^{r+1}\cdot 2^r[-\tfrac{1}{2}]^{r}\cdot S(-1)^{\beta}[r]^{2\beta}_{\beta'}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,k^{r-2\beta}}{2^{2\beta}\cdot[r-\frac{1}{2}]^{\beta}}.$$

Die ersten Specialfälle dieser allgemeinen Formel sind:

$$\begin{aligned}
\partial k &= +\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k},\\
\partial^2 k &= -1.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^2.\,\mathfrak{Tang}\,k,\\
\partial^3 k &= +1.3.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^3.\left\{\mathfrak{Tang}\,k^2-\frac{2.1}{1.3}.\frac{1}{2}\right\},\\
\partial^4 k &= -1.3.5.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^4.\left\{\mathfrak{Tang}\,k^3-\frac{3.2}{1.5}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k}{2}\right\},\\
\partial^5 k &= +1.3.5.7.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^5.\left\{\mathfrak{Tang}\,k^4-\frac{4.3}{1.7}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k^2}{2}+\frac{4.3.2.1}{1.2.7.5}.\frac{1}{2^2}\right\},\\
\partial^6 k &= -1.3.5.7.9.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^6.\left\{\mathfrak{Tang}\,k^5-\frac{5.4}{1.9}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k^3}{2}+\frac{5.4.3.2}{1.2.9.7}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k}{2^2}\right\}\\
\partial^7 k &= +1.3.5.7.9.11.\left(\frac{\partial\,\mathfrak{Sin}\,k}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^7.\left\{\mathfrak{Tang}\,k^6-\frac{6.5}{1.11}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k^4}{2}+\frac{6.5.4.3}{1.2.11.9}.\frac{\mathfrak{Tang}\,k^2}{2^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{6.5.4.\,3.2.1}{1.2.3.11.9.7}.\frac{1}{2^3}\right\}.
\end{aligned}$$

Diese Werthe müssen endlich in der Formel:

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial v}+\frac{\Delta v}{1}.\frac{\partial^2 k}{\partial v^2}.\frac{\Delta v^2}{\partial v^2}+\frac{\partial^3 k}{\partial v^3}.\frac{\Delta v^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

substituirt werden, um das Increment des Arcus in eine nach Potenzen des Incrementes seines Sinus fortgehende Reihe entwickelt zu haben.

Setzt man eben so $k = -1$ und $v = \mathrm{Cos}\, k$, also $v^2 + k = \mathrm{Sin}\, k^2$, so ist $\frac{v^{r-2\beta}}{(v^2+k)^{r-\beta+\frac{1}{2}}} = \frac{\mathrm{Cos}\, k^{r-2\beta}}{\mathrm{Sin}\, k^{2r-2\beta+1}} = \frac{\mathrm{Cot}\, k^{r-2\beta}}{\mathrm{Sin}\, k^{r+1}}$, und man erhält einen Ausdruck, welcher sich vom vorigen nur darin unterscheidet, dafs $\mathrm{Cot}\, k$ für $\mathrm{Tang}\, k$ und $\mathrm{Sin}\, k$ für $\mathrm{Cos}\, k$ gesetzt ist.

Für die cyklischen Functionen giebt es analoge Formeln, die man auf der Stelle erhält, wenn man in den vorigen Formeln nur $k\sqrt{-1}$, statt des Arcus k setzt, weil das Unmögliche aus den Ausdrücken von selbst wegfällt.

Siebenter Abschnitt.

Differenzen der Sinus und Cosinus.

§. 25.

Um eine Reihe von Sinus und Cosinus für gleich unterschiedene Arcus zu berechnen, giebt es mehr als ein Verfahren. Die Formeln:

$$\mathrm{Cos}\,(a+b) + \mathrm{Cos}\,(a-b) = 2\,\mathrm{Cos}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, b,$$
$$\mathrm{Sin}\,(a+b) + \mathrm{Sin}\,(a-b) = 2\,\mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, b$$

geben, wenn man $a+b$ für a setzt, die beiden folgenden:

$$\mathrm{Cos}\,(a+2b) = (2\,\mathrm{Cos}\, b) \,.\, \mathrm{Cos}\,(a+b) - \mathrm{Cos}\, a \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Sin}\,(a+2b) = (2\,\mathrm{Cos}\, b) \,.\, \mathrm{Sin}\,(a+b) - \mathrm{Sin}\, a.$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Cos}\,3k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Cos}\,2k - \mathrm{Cos}\,k & & \mathrm{Sin}\,3k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Sin}\,2k - \mathrm{Sin}\,k, \\
\mathrm{Cos}\,4k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Cos}\,3k - \mathrm{Cos}\,2k & \text{und} & \mathrm{Sin}\,4k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Sin}\,3k - \mathrm{Sin}\,2k, \\
\mathrm{Cos}\,5k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Cos}\,4k - \mathrm{Cos}\,3k & & \mathrm{Sin}\,5k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Sin}\,4k - \mathrm{Sin}\,3k, \\
\mathrm{Cos}\,6k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Cos}\,5k - \mathrm{Cos}\,4k & & \mathrm{Sin}\,6k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Sin}\,5k - \mathrm{Sin}\,4k, \\
\text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Nach diesen Formeln, welche auch für die cyklischen Functionen gelten, kann man nun wenn man will die Sinus und Cosinus von Arcus, welche immer um k von Null an wachsen, recurrirend auf eine wie man sieht ziemlich einfache Weise berechnen. Als vor dem Beginne dieser recurrirenden Berechnung bekannt, wird blofs $\mathrm{Cos}\, k$ und $\mathrm{Sin}\, k$ angesehen; denn man findet daraus $\mathrm{Cos}\,2k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Cos}\,k - \mathrm{Cos}\,0k$ und $\mathrm{Sin}\,2k = (2\,\mathrm{Cos}\,k) \,.\, \mathrm{Sin}\,k - \mathrm{Sin}\,0k$ oder $\mathrm{Cos}\,2k = 2\,\mathrm{Cos}\,k^2 - 1$ und $\mathrm{Sin}\,2k = 2\,\mathrm{Sin}\,k \,.\, \mathrm{Cos}\,k$, der Regel dieser recurrirenden Berechnung gemäfs.

§. 26.

Auch unter den höheren Differenzen der Sinus und Cosinus giebt es eine sehr einfache Beziehung. Da nemlich:

$$\mathfrak{Cos}(x+2\Delta x) = (2\,\mathfrak{Cos}\,\Delta x).\mathfrak{Cos}(x+\Delta x) - \mathfrak{Cos}\,x,$$

so hat man, wenn man von jedem Gliede die $m$te Differenz nimmt, und dabei Δx, also auch $\mathfrak{Cos}\,\Delta x$ als constant ansieht:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}(x+2\Delta x) = (2\,\mathfrak{Cos}\,x).\Delta^m \mathfrak{Cos}(x+\Delta x) - \Delta^m \mathfrak{Cos}\,x.$$

Nun ist aber, wenn unter φx irgend eine Function von x verstanden wird, den Regeln der Differenzenrechnung gemäfs:

$$\Delta^m \varphi(x+\Delta x) = \Delta^m \varphi x + \Delta^{m+1} \varphi x \text{ und}$$

$$\Delta^m \varphi(x+2\Delta x) = \Delta^m \varphi x + 2\Delta^{m+1} \varphi x + \Delta^{m+2} \varphi x,$$

so dafs nun auch

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}(x+\Delta x) = \Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x \quad \text{und}$$

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}(x+2\Delta x) = \Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + 2\Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+2} \mathfrak{Cos}\,x$$

ist. Diese Werthe substituirt man und es entsteht die Gleichung:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + 2\Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+2} \mathfrak{Cos}\,x$$

$$= (2\,\mathfrak{Cos}\,\Delta x)(\Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x) - \Delta^m \mathfrak{Cos}\,x \quad \text{oder}$$

$$\Delta^{m+2} \mathfrak{Cos}\,x = 2(\mathfrak{Cos}\,\Delta x - 1)(\Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x).$$

Da weiter $2(\mathfrak{Cos}\,\Delta x - 1) = 2.2.\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\Delta x^2 = (2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\Delta x)^2$ ist, so ist die Formel

$$\Delta^{m+2} \mathfrak{Cos}\,x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^2.\{\Delta^m \mathfrak{Cos}\,x + \Delta^{m+1} \mathfrak{Cos}\,x\}.$$

In ähnlicher Art erhält man aus der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}(x+2\Delta x) = (2\,\mathfrak{Cos}\,\Delta x).\mathfrak{Sin}(x+\Delta x) - \mathfrak{Sin}\,x$$

die Formel:

$$\Delta^{m+2} \mathfrak{Sin}\,x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^2.\{\Delta^m \mathfrak{Sin}\,x + \Delta^{m+1} \mathfrak{Sin}\,x\}.$$

Die analogen Formeln für die cyklischen Functionen erhält man, wenn man $x\sqrt{-1}$ statt x und $\Delta x.\sqrt{-1}$ statt Δx setzt, nemlich:

$$\Delta^{m+2} \cos x = -(2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^2.\{\Delta^m \cos x + \Delta^{m+1} \cos x\} \quad \text{und}$$

$$\Delta^{m+2} \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^2.\{\Delta^m \sin x + \Delta^{m+1} \sin x\}.$$

Nach diesen vier Formeln können die Differenzen der Sinus und Cosinus mit Leichtigkeit berechnet werden.

§. 27.

Um aber auf unabhängige Weise irgend eine höhere Differenz des Sinus oder Cosinus anzugeben, müssen die Regeln noch hergeleitet werden. Bekanntlich ist die höhere Differenz $\Delta^m e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)^m$, und da:

$$\mathfrak{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ist, so findet man:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)^m + e^{-x}(e^{-\Delta x}-1)^m}{2} \quad \text{und}$$

$$\Delta^m \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)^m - e^{-x}(e^{-\Delta x}-1)^m}{2}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich aber noch viel umformen. Denn da $e^{\Delta x} = \mathfrak{Cos}\,\Delta x + \mathfrak{Sin}\,\Delta x$, also $e^{\Delta x} - 1 = (\mathfrak{Cos}\,\Delta x - 1) + \mathfrak{Sin}\,\Delta x = 2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x^2 + 2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}\Delta x = 2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x\,.\,e^{\frac{1}{2}\Delta x}$, und also auch $(e^{\Delta x}-1)^m = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . e^{\frac{m}{2}\Delta x}$, so wie $(e^{-\Delta x}-1)^m = (-2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . e^{-\frac{m}{2}\Delta x}$ ist, so hat man:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \frac{\left(e^{x+\frac{m}{2}\Delta x} + (-1)^m . e^{-x-\frac{m}{2}\Delta x}\right)}{2} \quad \text{und}$$

$$\Delta^m \mathfrak{Sin}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \frac{\left(e^{x+\frac{m}{2}\Delta x} - (-1)^m . e^{-x-\frac{m}{2}\Delta x}\right)}{2}.$$

Nun wird man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist.

Wenn nemlich m eine gerade Zahl ist, so hat man:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \mathfrak{Cos}\left(x + \frac{m}{2}\Delta x\right) \quad \text{und}$$

$$\Delta^m \mathfrak{Sin}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \mathfrak{Sin}\left(x + \frac{m}{2}\Delta x\right).$$

Wenn m eine ungerade Zahl ist, so hat man:

$$\Delta^m \mathfrak{Cos}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \mathfrak{Sin}\left(x + \frac{m}{2}\Delta x\right) \quad \text{und}$$

$$\Delta^m \mathfrak{Sin}\, x = (2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \mathfrak{Cos}\left(x + \frac{m}{2}\Delta x\right).$$

Für die cyklischen Functionen werden die Formeln fast noch einfacher. Denn man erhält hier:

$$\Delta^m \cos x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m \frac{\left((\sqrt{-1})^m . e^{\left(x+\frac{m}{2}\Delta x\right)\sqrt{-1}} + (\sqrt{-1})^{-m} . e^{-\left(x+\frac{m}{2}\Delta x\right)\sqrt{-1}}\right)}{2},$$

$$\Delta^m \sin x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m \frac{\left((\sqrt{-1})^m . e^{\left(x+\frac{m}{2}\Delta x\right)\sqrt{-1}} - (\sqrt{-1})^{-m} . e^{-\left(x+\frac{m}{2}\Delta x\right)\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}},$$

weil $(\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\Delta x\sqrt{-1})^m = (\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . (\sqrt{-1})^m$ und $-\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^{-1}$, also auch $(-1)^m . (\sqrt{-1})^m = (\sqrt{-1})^{-m}$ ist.

Da aber weiter $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ und $e^{\frac{m\pi}{2}\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^m$ ist, so hat man auch weiter:

$$\Delta^m \cos x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m \left(\frac{e^{\left(x+\frac{m}{2}\Delta x+\frac{m}{2}\pi\right)\sqrt{-1}}+e^{-\left(x+\frac{m}{2}\Delta x+\frac{m}{2}\pi\right)\sqrt{-1}}}{2}\right),$$

$$\Delta^m \sin x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m \left(\frac{e^{\left(x+\frac{m}{2}\Delta x+\frac{m}{2}\pi\right)\sqrt{-1}}-e^{-\left(x+\frac{m}{2}\Delta x+\frac{m}{2}\pi\right)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right).$$

und wenn man hierin endlich die Form der Exponentialgröfsen fahren läfst, so sind die einfachen Formeln:

$$\Delta^m \cos x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \cos\left(x+m.\frac{\Delta x}{2}+m.\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Delta^m \sin x = (2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^m . \sin\left(x+m.\frac{\Delta x}{2}+m.\frac{\pi}{2}\right).$$

Die Differenzenverhältnisse sind also:

$$\frac{\Delta^m \cos x}{\Delta x^m} = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\right)^m . \cos\left(x+m.\frac{\Delta x}{2}+m.\frac{\pi}{2}\right) \text{ und}$$

$$\frac{\Delta^m \sin x}{\Delta x^m} = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\right)^m . \sin\left(x+m.\frac{\Delta x}{2}+m.\frac{\pi}{2}\right).$$

Geht man also zu den Grenzen über, indem man $\Delta x = 0$ setzt, so erhält man:

$$\frac{\partial^m \cos x}{\partial x^m} = \cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\partial^m \sin x}{\partial x^m} = \sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right),$$

als allgemeine Formeln für die höheren Differenzialverhältnisse der (cyklischen) Sinus und Cosinus.

Achter Abschnitt.

Beziehungen zwischen den Potenzen der Sinus, Cosinus und Tangenten eines Arcus und den Sinus, Cosinus und Tangenten des vervielfachten Arcus.

§. 28.

Es ist nicht selten nothwendig, Potenzen von Sinus und Cosinus in Ausdrücke umzusetzen, welche bald nach Sinus, bald nach Cosinus vervielfachter Arcus fortschreiten, und namentlich in der Integralrechnung ist eine solche Umsetzung oft vom gröfsten Nutzen, indem gerade davon die Integralität eines vorgelegten Differenzials abhängt. Der binomische Lehrsatz, unter der Beschränkung auf solche Exponenten, welche positive ganze Zahlen sind, reicht hin, die gesuchten Formeln herzuleiten. Es ist

$$(a+b)^n = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} a^{n-\alpha} b^{\alpha} = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} (ab)^{\alpha} . a^{n-2\alpha} \quad \text{und}$$

$$(a+b)^n = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} a^{n-\alpha} b^{\alpha} = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} (ab)^{\alpha} . b^{n-2\alpha}.$$

Beide Reihen brechen ab, weil nach der Annahme n eine positive ganze Zahl ist, und die Facultät $[n]^{\alpha} = 0$ ist, sobald $\alpha > n$ genommen wird.

Setzt man nun $a = \mathfrak{Cos}\, k + \mathfrak{Sin}\, k = e^k$ und $b = \mathfrak{Cos}\, k - \mathfrak{Sin}\, k = e^{-k}$, um diese Werthe im Ausdrucke

$$(a+b)^n = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} (ab)^{\alpha} . \frac{a^{n-2\alpha} + b^{n-2\alpha}}{2}$$

zu substituiren, so erhält man

$$ab = 1, \quad a + b = 2\,\mathfrak{Cos}\, k \quad \text{und} \quad \frac{a^{n-2\alpha} + b^{n-2\alpha}}{2} = \mathfrak{Cos}\,(n-2\alpha)k;$$

und also

$$1. \quad (2\,\mathfrak{Cos}\, k)^n = S[n]_{\alpha'}^{\alpha} \mathfrak{Cos}\,(n-2\alpha)k.$$

Diese Formel kann noch zusammengezogen werden, wenn man zwei Fälle unterscheidet, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Setzt man zuerst $2n$ für n, so hat man zunächst $(2\,\mathfrak{Cos}\, k)^{2n} = S[2n]_{\alpha'}^{\alpha} \mathfrak{Cos}\,(n-\alpha).2k$. Das Glied für $\alpha = n$ ist $[2n]_{n'}^{n}$, denn $\mathfrak{Cos}\, 0 = 1$. Zerlegt man daher den Ausdruck in drei Theile, indem man $n-\alpha$ statt α setzt wenn $\alpha > 0$; $n+\alpha$ statt α wenn $\alpha > 0$, und $\alpha = n$, so hat man:

$$(2\,\mathfrak{Cos}\, k)^{2n} = S[2n]_{(n-\alpha)'}^{n-\alpha} \mathfrak{Cos}\, 2\alpha k + [2n]_{n'}^{n} + S[2n]_{(n+\alpha)'}^{n+\alpha} \mathfrak{Cos} - 2\alpha k.$$

Nun ist aber $[2n]_{(n-\alpha)'}^{n-\alpha} = [2n]_{(n+\alpha)'}^{n+\alpha}$ und $\mathfrak{Cos} - 2\alpha k = \mathfrak{Cos}\, 2\alpha k$; folglich hat man:

$$2. \quad (2\,\mathfrak{Cos}\, k)^{2n} = [2n]_{n'}^{n} + 2\, S[2n]_{(n+\alpha)'}^{n+\alpha} \mathfrak{Cos}\, 2\alpha k, \text{ für } \alpha > 0.$$

Wenn hingegen der Exponent n ungerade ist, so giebt es kein mittleres Glied des Ausdruckes, weil die Menge der Glieder in der Formel (1.) dann eine gerade Zahl ist, und es gilt für diesen Fall die Formel:

$$3. \quad (2\,\mathfrak{Cos}\, k)^{2n+1} = 2 . S[2n+1]_{\beta'}^{\beta} \mathfrak{Cos}\,(2\alpha+1)k \quad (\text{cond. } \alpha + \beta = n).$$

Dieselben Formeln gelten auch für die cyklischen Functionen, nur mufs durchgehends die Vorsylbe $\mathfrak{Cos}$ in cos abgeändert werden.

Specialisirt man die allgemeinen Formeln, so hat man die Ausdrücke:

$\mathfrak{Cos}\,k^2 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Cos}\,2k + \frac{1}{2}$,
$\mathfrak{Cos}\,k^3 = \frac{1}{4}\,\mathfrak{Cos}\,3k + \frac{3}{4}\,\mathfrak{Cos}\,k$,
$\mathfrak{Cos}\,k^4 = \frac{1}{8}\,\mathfrak{Cos}\,4k + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Cos}\,2k + \frac{3}{8}$,
$\mathfrak{Cos}\,k^5 = \frac{1}{16}\,\mathfrak{Cos}\,5k + \frac{5}{16}\,\mathfrak{Cos}\,3k + \frac{5}{8}\,\mathfrak{Cos}\,k$,
$\mathfrak{Cos}\,k^6 = \frac{1}{32}\,\mathfrak{Cos}\,6k + \frac{3}{16}\,\mathfrak{Cos}\,4k + \frac{15}{12}\,\mathfrak{Cos}\,2k + \frac{5}{16}$,
$\mathfrak{Cos}\,k^7 = \frac{1}{64}\,\mathfrak{Cos}\,7k + \frac{7}{64}\,\mathfrak{Cos}\,5k + \frac{21}{64}\,\mathfrak{Cos}\,3k + \frac{35}{64}\,\mathfrak{Cos}\,k$,
$\mathfrak{Cos}\,k^8 = \frac{1}{128}\,\mathfrak{Cos}\,8k + \frac{1}{16}\,\mathfrak{Cos}\,6k + \frac{7}{32}\,\mathfrak{Cos}\,4k + \frac{7}{16}\,\mathfrak{Cos}\,2k + \frac{35}{128}$,
$\mathfrak{Cos}\,k^9 = \frac{1}{256}\,\mathfrak{Cos}\,9k + \frac{9}{256}\,\mathfrak{Cos}\,7k + \frac{9}{64}\,\mathfrak{Cos}\,5k + \frac{21}{64}\,\mathfrak{Cos}\,3k + \frac{63}{128}\,\mathfrak{Cos}\,k$,
$\mathfrak{Cos}\,k^{10} = \frac{1}{512}\,\mathfrak{Cos}\,10k + \frac{5}{256}\,\mathfrak{Cos}\,8k + \frac{45}{512}\,\mathfrak{Cos}\,6k + \frac{15}{64}\,\mathfrak{Cos}\,4k + \frac{105}{256}\,\mathfrak{Cos}\,2k + \frac{63}{256}$,

u. s. w.

§. 29.

Um ähnliche Ausdrücke auch für die Potenzen der $\mathfrak{Sinus}$ herzuleiten, dient ebenfalls der binomische Lehrsatz in der Form:

$$(a-b)^n = S(-1)^\alpha\,[n]^{\alpha}_{\alpha'}\,(a\,b)^\alpha\,a^{n-2\alpha},$$

und da $(a-b)^n = (-1)^n.(b-a)^n$ ist, so hat man auch:

$$(a-b)^n = S(-1)^{n+\alpha}\,[n]^{\alpha}_{\alpha'}\,(a\,b)^\alpha\,b^{n-2\alpha},$$

und also durch Addition:

$$(a-b)^n = S(-1)^\alpha\,[n]^{\alpha}_{\alpha'}\,(a\,b)^\alpha\,\frac{a^{n-2\alpha}+(-1)^n\,b^{n-2\alpha}}{2}.$$

Unterscheidet man also schon jetzt zwei Fälle, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, so hat man:

$$(a-b)^{2n} = S(-1)^\alpha\,[2n]^{\alpha}_{\alpha'}.\frac{a^{2n-2\alpha}+b^{2n-2\alpha}}{2}.(a\,b)^\alpha,$$

$$(a-b)^{2n+1} = S(-1)^\alpha\,[2n+1]^{\alpha}_{\alpha'}.\frac{a^{2n-2\alpha+1}+b^{2n-2\alpha+1}}{2}.(a\,b)^\alpha.$$

Werden nun wieder für a und b die Werthe, wie in §. 28. substituirt, so entstehen die Formeln:

$$(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{2n} = S(-1)^\alpha\,[2n]^{\alpha}_{\alpha'}\,\mathfrak{Cos}\,(n-\alpha)\,2k,$$

$$(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{2n+1} = S(-1)^\alpha\,[2n+1]^{\alpha}_{\alpha'}\,\mathfrak{Sin}\,(2n-2\alpha+1)\,k,$$

welche ebenfalls noch weiter zusammengezogen werden können; nemlich:

$$(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{2n} = (-1)^n\,[2n]^{n}_{n'} + S(-1)^{n+\alpha}\,[2n]^{n+\alpha}_{(n+\alpha)'}\,\mathfrak{Cos}\,2\alpha k \quad \text{für } \alpha > 0;$$

$$(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{2n+1} = 2.S(-1)^\beta\,[2n+1]^{\beta}\,\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+1)\,k \quad (\text{cond. } (\alpha+\beta=n)).$$

Diese Formeln können ebenfalls leicht in die für die cyklischen Functionen geltenden umgesetzt werden, und die ersten Specialisirungen derselben sind:

$\text{Sin}\,k^2 = \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,2k - \frac{1}{2}$,

$\text{Sin}\,k^3 = \frac{1}{4}\,\text{Sin}\,3k - \frac{3}{4}\,\text{Sin}\,k$,

$\text{Sin}\,k^4 = \frac{1}{8}\,\text{Cos}\,4k - \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,2k + \frac{3}{8}$,

$\text{Sin}\,k^5 = \frac{1}{16}\,\text{Sin}\,5k - \frac{5}{16}\,\text{Sin}\,3k + \frac{5}{8}\,\text{Sin}\,k$,

$\text{Sin}\,k^6 = \frac{1}{32}\,\text{Cos}\,6k - \frac{3}{16}\,\text{Cos}\,4k + \frac{15}{32}\,\text{Cos}\,2k - \frac{5}{16}$,

$\text{Sin}\,k^7 = \frac{1}{64}\,\text{Sin}\,7k - \frac{7}{64}\,\text{Sin}\,5k + \frac{21}{64}\,\text{Sin}\,3k - \frac{35}{64}\,\text{Sin}\,k$,

$\text{Sin}\,k^8 = \frac{1}{128}\,\text{Cos}\,8k - \frac{1}{16}\,\text{Cos}\,6k + \frac{7}{32}\,\text{Cos}\,4k - \frac{7}{16}\,\text{Cos}\,2k + \frac{35}{128}$,

$\text{Sin}\,k^9 = \frac{1}{256}\,\text{Sin}\,9k - \frac{9}{256}\,\text{Sin}\,7k + \frac{9}{64}\,\text{Sin}\,5k - \frac{21}{64}\,\text{Sin}\,3k + \frac{63}{128}\,\text{Sin}\,k$,

$\text{Sin}\,k^{10} = \frac{1}{512}\,\text{Cos}\,10k - \frac{5}{256}\,\text{Cos}\,8k + \frac{45}{512}\,\text{Cos}\,6k - \frac{15}{64}\,\text{Cos}\,4k + \frac{105}{256}\,\text{Cos}\,2k - \frac{63}{256}$,

u. s. w.

§. 30.

Aber auch umgekehrt läfst sich der Sinus und Cosinus eines vervielfachten Arcus durch Potenzen von Sinus und Cosinus des einfachen Arcus ausdrücken.

Da nemlich:

$$(e^k)^n = (\text{Cos}\,k + \text{Sin}\,k)^n = e^{nk} = \text{Cos}\,nk + \text{Sin}\,nk \quad \text{und}$$
$$(e^{-k})^n = (\text{Cos}\,k - \text{Sin}\,k)^n = e^{-nk} = \text{Cos}\,nk - \text{Sin}\,nk$$

ist, so hat man durch Addition und Subtraction:

$$\text{Cos}\,nk = \frac{(\text{Cos}\,k + \text{Sin}\,k)^n + (\text{Cos}\,k - \text{Sin}\,k)^n}{2},$$
$$\text{Sin}\,nk = \frac{(\text{Cos}\,k + \text{Sin}\,k)^n - (\text{Cos}\,k - \text{Sin}\,k)^n}{2}$$

Nach geschehener Entwickelung hat man die Ausdrücke:

$$1. \quad \text{Cos}\,nk = S\,[\overset{2\alpha}{n}]_{(2\alpha)'}\,\text{Cos}\,k^{n-2\alpha}\,.\,\text{Sin}\,k^{2\alpha},$$

$$2. \quad \text{Sin}\,nk = S\,[\overset{2\alpha+1}{n}]_{(2\alpha+1)'}\,\text{Cos}\,k^{n-2\alpha-1}\,.\,\text{Sin}\,k^{2\alpha+1}.$$

Man kann ihnen auch folgende Gestalt geben:

$\text{Cos}\,nk = (\text{Cos}\,k)^n . S\,[\overset{2\alpha}{n}]_{(2\alpha)'} . \text{Tang}\,k^{2\alpha}$ und $\text{Sin}\,nk = (\text{Sin}\,k)^n . S\,[\overset{2\alpha+1}{n}]_{(2\alpha+1)'} . \text{Tang}\,k^{2\alpha+1}$

woraus für die Tangente folgt:

$$\text{Tang}\,nk = (S\,[\overset{2\alpha}{n}]_{(2\alpha)'}\,\text{Tang}\,k^{2\alpha}) : (S\,[\overset{2\alpha+1}{n}]_{(2\alpha+1)'}\,\text{Tang}\,k^{2\alpha+1}).$$

Auch diese Formeln werden in die für die cyklischen Functionen geltenden leicht umgesetzt, indem man nur $k\sqrt{-1}$ für den Arcus k setzt, und brechen immer ab, da der Annahme gemäfs n eine positive ganze Zahl ist.

Die ersten Specialfälle der letzten Formel sind:

$$\mathfrak{Tang}\,2k = \frac{2\,\mathfrak{Tang}\,k}{1+\mathfrak{Tang}\,k^2},$$

$$\mathfrak{Tang}\,3k = \frac{3\,\mathfrak{Tang}\,k+\mathfrak{Tang}\,k^3}{1+3\,\mathfrak{Tang}\,k^2},$$

$$\mathfrak{Tang}\,4k = \frac{4\,\mathfrak{Tang}\,k+4\,\mathfrak{Tang}\,k^3}{1+6\,\mathfrak{Tang}\,k^2+\mathfrak{Tang}\,k^4},$$

$$\mathfrak{Tang}\,5k = \frac{5\,\mathfrak{Tang}\,k+10\,\mathfrak{Tang}\,k^3+\mathfrak{Tang}\,k^5}{1+10\,\mathfrak{Tang}\,k^2+5\,\mathfrak{Tang}\,k^4},$$

$$\mathfrak{Tang}\,6k = \frac{6\,\mathfrak{Tang}\,k+20\,\mathfrak{Tang}\,k^3+6\,\mathfrak{Tang}\,k^5}{1+15\,\mathfrak{Tang}\,k^2+15\,\mathfrak{Tang}\,k^4+\mathfrak{Tang}\,k^6},$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke lassen sich übrigens auch leicht recurrirend vermehren; denn es sei $\mathfrak{Tang}\,nk = \frac{p}{q}$ und $\mathfrak{Tang}\,(n+1)k = \frac{P}{Q}$, so ist bekanntlich $\mathfrak{Tang}\,(n+1)k = \frac{\mathfrak{Tang}\,nk+\mathfrak{Tang}\,k}{1+\mathfrak{Tang}\,nk\,.\,\mathfrak{Tang}\,k}$, und also $\frac{P}{Q} = \frac{p+q\,\mathfrak{Tang}\,k}{q+p\,\mathfrak{Tang}\,k}$ oder:

$$P = p+q\,\mathfrak{Tang}\,k \quad \text{und} \quad Q = q+p\,\mathfrak{Tang}\,k,$$

nach welchen Formeln die Rechnung, wie man sieht, sehr bequem ist.

§. 31.

Die Formeln (1. und 2.) des §. 30. haben die Unbequemlichkeit, dafs sie nach Potenzen des $\mathfrak{Sinus}$ und $\mathfrak{Cosinus}$ zugleich fortschreiten. Brauchbarere Formeln leitet man aus zwei arithmetischen Theoremen her, nemlich:

$$a^n+b^n = S(-1)^\alpha \frac{n}{n-\alpha}\,\overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{[n-\alpha]}}\,(a+b)^{n-2\alpha}.(ab)^\alpha,$$

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = S(-1)^\alpha\,\overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{[n-\alpha]}}\,(a+b)^{n-2\alpha}.(ab)^\alpha.$$

Beide Ausdrücke sind geschlossen und dürfen nur so weit fortgesetzt werden, dafs $n-2\alpha=0$ oder $=+1$, nicht aber negativ werde. Sie gelten übrigens, es mag n eine gerade oder ungerade ganze Zahl sein, und ihr Beweis fällt nicht schwer.

Setzt man $a=\mathfrak{Cos}\,k+\mathfrak{Sin}\,k$, $b=\mathfrak{Cos}\,k-\mathfrak{Sin}\,k$, so ist $a.b=1$, $a+b=2\,\mathfrak{Cos}\,k$, $a-b=2\,\mathfrak{Sin}\,k$, $a^n+b^n=2\,\mathfrak{Cos}\,nk$, $a^{n+1}-b^{n+1}=2\,\mathfrak{Sin}(n+1)k$; und werden diese Werthe substituirt, so hat man auf der Stelle:

$$1.\quad 2\,\mathfrak{Cos}\,nk = S(-1)^\alpha \frac{n}{n-\alpha}\,\overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{[n-\alpha]}}\,.(2\,\mathfrak{Cos}\,k)^{n-2\alpha}$$

$$2.\quad \frac{\mathfrak{Sin}(n+1)k}{\mathfrak{Sin}\,k} = S(-1)^\alpha\,\overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{[n-\alpha]}}\,.(2\,\mathfrak{Cos}\,k)^{n-2\alpha},$$

und auch diese Reihen werden nur so weit fortgesetzt, dafs $n-2\alpha$ nicht negativ wird.

Setzt man vor der Substitution $-b$ statt b, so mufs man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

1) Wenn n eine gerade Zahl ist.

Dann geben die Formeln

$$a^n + b^n = S\frac{n}{n-\alpha}[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}(a-b)^{n-2\alpha}.(ab)^{\alpha} \quad \text{und}$$

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a+b} = S[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}(a-b)^{n-2\alpha}.(ab)^{\alpha}$$

durch die Substitution $a = \mathfrak{Cos}\,k + \mathfrak{Sin}\,k$ und $b = \mathfrak{Cos}\,k - \mathfrak{Sin}\,k$ die zwei Gleichungen:

$$3. \quad 2\,\mathfrak{Cos}\,nk = S\frac{n}{n-\alpha}[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}.(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{n-2\alpha},$$

$$4. \quad \frac{\mathfrak{Cos}\,(n+1)k}{\mathfrak{Cos}\,k} = S[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}.(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{n-2\alpha}.$$

2) Wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Dann geben die Formeln

$$a^n - b^n = S\frac{n}{n-\alpha}[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}(a-b)^{n-2\alpha}.(ab)^{\alpha} \quad \text{und}$$

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a+b} = S[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}.(a-b)^{n-2\alpha}.(ab)^{\alpha},$$

durch dieselbe Substitution, wie vorhin, die neuen Formeln:

$$5. \quad 2\,\mathfrak{Sin}\,nk = S\frac{n}{n-\alpha}[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}.(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{n-2\alpha},$$

$$6. \quad \frac{\mathfrak{Sin}\,(n+1)k}{\mathfrak{Cos}\,k} = S[n-\alpha]^{\alpha}_{\alpha'}.(2\,\mathfrak{Sin}\,k)^{n-2\alpha}.$$

Wenn man die Gleichungen (1., 3., 5.) differentiirt, so erhält man drei andere, welche mit den Gleichungen (2., 4., 6.) fast dieselben sind, und auch darin übergehen, wenn man in ihnen die Zahl n nur um Eins erhöhet.

§. 32.

Die Berechnung der Vorzahlen in den Ausdrücken (1. und 2.) des §. 31. wird durch ein recurrirendes Verfahren erleichtert. Man setze zu dem Ende:

$$\mathfrak{Cos}\,nk = S(-1)^{\alpha}\varphi(n,\alpha).\mathfrak{Cos}\,k^{n-2\alpha},$$

so hat man, weil $\mathrm{Cos}\,(n+2)k = (2\,\mathrm{Cos}\,k).\mathrm{Cos}\,(n+1)k - \mathrm{Cos}\,nk$ ist:

$$S(-1)^{\alpha}\varphi(n+2,\alpha).\mathrm{Cos}\,k^{n+2-2\alpha}$$
$$= 2.S(-1)^{\alpha}\varphi(n+1,\alpha).\mathrm{Cos}\,k^{n+2-2\alpha} - S(-1)^{\alpha}\varphi(n,\alpha).\mathrm{Cos}\,k^{n-2\alpha},$$

und also:
$$\varphi(n+2,r) = 2\varphi(n+1,r) + \varphi(n,r-1).$$

Diese Recursionsformel läſst an Einfachheit nichts zu wünschen übrig; in Anwendung derselben findet man folgende Ausdrücke:

$$1.\begin{cases}
\mathrm{Cos}\,2k = 2\,\mathrm{Cos}\,k^2 - 1,\\
\mathrm{Cos}\,3k = 4\,\mathrm{Cos}\,k^3 - 3\,\mathrm{Cos}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,4k = 8\,\mathrm{Cos}\,k^4 - 8\,\mathrm{Cos}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Cos}\,5k = 16\,\mathrm{Cos}\,k^5 - 20\,\mathrm{Cos}\,k^3 + 5\,\mathrm{Cos}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,6k = 32\,\mathrm{Cos}\,k^6 - 48\,\mathrm{Cos}\,k^4 + 18\,\mathrm{Cos}\,k^2 - 1,\\
\mathrm{Cos}\,7k = 64\,\mathrm{Cos}\,k^7 - 112\,\mathrm{Cos}\,k^5 + 56\,\mathrm{Cos}\,k^3 - 7\,\mathrm{Cos}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,8k = 128\,\mathrm{Cos}\,k^8 - 256\,\mathrm{Cos}\,k^6 + 160\,\mathrm{Cos}\,k^4 - 32\,\mathrm{Cos}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Cos}\,9k = 256\,\mathrm{Cos}\,k^9 - 576\,\mathrm{Cos}\,k^7 + 432\,\mathrm{Cos}\,k^5 - 120\,\mathrm{Cos}\,k^3 + 9\,\mathrm{Cos}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,10k = 512\,\mathrm{Cos}\,k^{10} - 1280\,\mathrm{Cos}\,k^8 + 1120\,\mathrm{Cos}\,k^6 - 400\,\mathrm{Cos}\,k^4 + 50\,\mathrm{Cos}\,k^2 - 1,\\
\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Da nun die Formeln (3. und 5.) dieselben Vorzahlen haben, so ist auch:

$$2.\begin{cases}
\mathrm{Cos}\,2k = 2\,\mathrm{Sin}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Sin}\,3k = 4\,\mathrm{Sin}\,k^3 + 3\,\mathrm{Sin}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,4k = 8\,\mathrm{Sin}\,k^4 + 8\,\mathrm{Sin}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Sin}\,5k = 16\,\mathrm{Sin}\,k^5 + 20\,\mathrm{Sin}\,k^3 + 5\,\mathrm{Sin}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,6k = 32\,\mathrm{Sin}\,k^6 + 48\,\mathrm{Sin}\,k^4 + 18\,\mathrm{Sin}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Sin}\,7k = 64\,\mathrm{Sin}\,k^7 + 112\,\mathrm{Sin}\,k^5 + 56\,\mathrm{Sin}\,k^3 + 7\,\mathrm{Sin}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,8k = 128\,\mathrm{Sin}\,k^8 + 256\,\mathrm{Sin}\,k^6 + 160\,\mathrm{Sin}\,k^4 + 32\,\mathrm{Sin}\,k^2 + 1,\\
\mathrm{Sin}\,9k = 256\,\mathrm{Sin}\,k^9 + 576\,\mathrm{Sin}\,k^7 + 432\,\mathrm{Sin}\,k^5 + 120\,\mathrm{Sin}\,k^3 + 9\,\mathrm{Sin}\,k,\\
\mathrm{Cos}\,10k = 512\,\mathrm{Sin}\,k^{10} + 1280\,\mathrm{Sin}\,k^8 + 1120\,\mathrm{Sin}\,k^6 + 400\,\mathrm{Sin}\,k^4 + 50\,\mathrm{Sin}\,k^2 + 1,\\
\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Die Formeln (1.) gelten unmittelbar auch von den cyklischen Cosinus, und man hat nur die Vorsylbe Cos in cos abzuändern. Die Formeln (2.) aber, welche Sinus enthalten, bekommen abwechselnde Vorzeichen. So erhält man z. B. aus den beiden letzten Formeln, wenn $k\sqrt{-1}$ für k gesetzt wird:

$$\sin\,9k = +256\sin k^9 - 576\sin k^7 + 432\sin k^5 - 120\sin k^3 + 9\sin k,$$
$$\cos 10k = -512\sin k^{10} + 1280\sin k^8 - 1120\sin k^6 + 400\sin k^4 - 50\sin k^2 + 1.$$

§. 33.

Will man in ähnlicher Art eine Recursionsformel für die Berechnung der Vorzahlen in den übrigen Ausdrücken herleiten, so wird man setzen:

$$\mathfrak{Sin}\, nk = \mathfrak{Sin}\, k\,.\,S(-1)^{\alpha}\varphi(n,\alpha)\,\mathfrak{Cos}\, k^{n-2\alpha-1},$$

und da $\mathfrak{Sin}(n+2)k = (2\,\mathfrak{Cos}\, k)\,.\,\mathfrak{Sin}(n+1)k - \mathfrak{Sin}\, k$ ist, so hat man:

$$\mathfrak{Sin}\, k\,.\,S(-1)^{\alpha}\varphi(n+2,\alpha)\,\mathfrak{Cos}\, k^{n-2\alpha+1}$$

$$= 2\,\mathfrak{Sin}\, k\,.\,S(-1)^{\alpha}\varphi(n+1,\alpha)\,\mathfrak{Cos}\, k^{n-2\alpha+1} - \mathfrak{Sin}\, k\,.\,S(-1)^{\alpha}\varphi(n,\alpha)\,.\,\mathfrak{Cos}\, k^{n-2\alpha-1},$$

oder einfacher:

$$\varphi(n+2,r) = 2\,.\,\varphi(n+1,r) + \varphi(n,r-1).$$

Diese Formel stimmt mit der in §. 32. gefundenen völlig überein, und die Vorzahlen würden also wieder die vorigen werden, wenn die Rechnung nicht mit anderen Elementen begonnen würde. Die berechneten Ausdrücke sind:

$$1.\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{Sin}\,2k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(2\,\mathfrak{Cos}\,k),\\
\mathfrak{Sin}\,3k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(4\,\mathfrak{Cos}\,k^2 - 1),\\
\mathfrak{Sin}\,4k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(8\,\mathfrak{Cos}\,k^3 - 4\,\mathfrak{Cos}\,k),\\
\mathfrak{Sin}\,5k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(16\,\mathfrak{Cos}\,k^4 - 12\,\mathfrak{Cos}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,6k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(32\,\mathfrak{Cos}\,k^5 - 32\,\mathfrak{Cos}\,k^3 + 6\,\mathfrak{Cos}\,k),\\
\mathfrak{Sin}\,7k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(64\,\mathfrak{Cos}\,k^6 - 80\,\mathfrak{Cos}\,k^4 + 24\,\mathfrak{Cos}\,k^2 - 1),\\
\mathfrak{Sin}\,8k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(128\,\mathfrak{Cos}\,k^7 - 192\,\mathfrak{Cos}\,k^5 + 80\,\mathfrak{Cos}\,k^3 - 8\,\mathfrak{Cos}\,k),\\
\mathfrak{Sin}\,9k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(256\,\mathfrak{Cos}\,k^8 - 458\,\mathfrak{Cos}\,k^6 + 248\,\mathfrak{Cos}\,k^4 - 40\,\mathfrak{Cos}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,10k = \mathfrak{Sin}\,k\,.\,(512\,\mathfrak{Cos}\,k^9 - 1044\,\mathfrak{Cos}\,k^7 + 688\,\mathfrak{Cos}\,k^5 - 160\,\mathfrak{Cos}\,k^3 + 10\,\mathfrak{Cos}\,k,\\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

Da nun die Formeln (4. und 6.) des §. 31. dieselben Vorzahlen haben, so hat man noch:

$$2.\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{Sin}\,2k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(2\,\mathfrak{Sin}\,k),\\
\mathfrak{Cos}\,3k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(4\,\mathfrak{Sin}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,4k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(8\,\mathfrak{Sin}\,k^3 + 4\,\mathfrak{Sin}\,k),\\
\mathfrak{Cos}\,5k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(16\,\mathfrak{Sin}\,k^4 + 12\,\mathfrak{Sin}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,6k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(32\,\mathfrak{Sin}\,k^5 + 32\,\mathfrak{Sin}\,k^3 + 6\,\mathfrak{Sin}\,k),\\
\mathfrak{Cos}\,7k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(64\,\mathfrak{Sin}\,k^6 + 80\,\mathfrak{Sin}\,k^4 + 24\,\mathfrak{Sin}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,8k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(128\,\mathfrak{Sin}\,k^7 + 192\,\mathfrak{Sin}\,k^5 + 80\,\mathfrak{Sin}\,k^3 + 8\,\mathfrak{Sin}\,k),\\
\mathfrak{Cos}\,9k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(256\,\mathfrak{Sin}\,k^8 + 458\,\mathfrak{Sin}\,k^6 + 248\,\mathfrak{Sin}\,k^4 + 10\,\mathfrak{Sin}\,k^2 + 1),\\
\mathfrak{Sin}\,10k = \mathfrak{Cos}\,k\,.\,(512\,\mathfrak{Sin}\,k^9 + 1044\,\mathfrak{Sin}\,k^7 + 688\,\mathfrak{Sin}\,k^5 + 160\,\mathfrak{Sin}\,k^3 + 10\,\mathfrak{Sin}\,k),\\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

Auch diese Formeln können leicht auf die cyklischen Functionen übertra-

gen werden, wenn man $k\sqrt{-1}$ für k setzt, und bemerkt, daſs $\mathfrak{Sin}(k\sqrt{-1}) = (\sin k).\sqrt{-1}$ und $\mathfrak{Cos}(k\sqrt{-1}) = \cos k$ ist.

§. 34.

Um das Verhalten der hyperbolischen Sinus, Cosinus und Tangenten an einem einfachen Beispiele zu veranschaulichen, nehmen wir wieder zum Arcus k den natürlichen Logarithmen von Zwei, wie in §. 9. Um die hyperbolischen Functionen eines Vielfachen dieses Arcus kennen zu lernen, könnten die so eben abgeleiteten Formeln allerdings gebraucht werden. Man gelangt hier aber kürzer zum Ziele, wenn man in den Formeln des §. 9. $v = 2^n$, also $\log v = n \log 2$ setzt. Man erhält auf der Stelle:

$$\mathfrak{Cos}(n\log 2) = \frac{2^{2n}+1}{2^{n+1}} = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$\mathfrak{Sin}(n\log 2) = \frac{2^{2n}-1}{2^{n+1}} = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \text{; also } \mathfrak{Tang}(n\log 2) = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}+1}.$$

n	nk	$\mathfrak{Cos}\,nk$	$\mathfrak{Sin}\,nk$
1	0,6931 4718 0559....	$1\frac{1}{4}$	$0\frac{3}{4}$
2	1,3862 9436 1119....	$2\frac{1}{8}$	$1\frac{7}{8}$
3	2,0794 4154 1679....	$4\frac{1}{16}$	$3\frac{15}{16}$
4	2,7725 8872 2239....	$8\frac{1}{32}$	$7\frac{31}{32}$
5	3,4657 3590 2799....	$16\frac{1}{64}$	$15\frac{63}{64}$
6	4,1588 8308 3359....	$32\frac{1}{128}$	$31\frac{127}{128}$
7	4,8520 3026 3919....	$64\frac{1}{256}$	$63\frac{255}{256}$
8	5,5451 7744 4479...	$128\frac{1}{512}$	$127\frac{511}{512}$
9	6,2383 2462 5039....	$256\frac{1}{1024}$	$255\frac{1023}{1024}$
10	6,9314 7180 5599....	$512\frac{1}{2048}$	$511\frac{2047}{2048}$
11	7,6246 1898 6159....	$1024\frac{1}{4096}$	$1023\frac{4095}{4096}$
12	8,3177 6616 6719....	$2048\frac{1}{8192}$	$2047\frac{8191}{8192}$
13	9,0109 1334 7279....	$4096\frac{1}{16384}$	$4095\frac{16383}{16384}$
14	9,7040 6052 7839....	$8192\frac{1}{32768}$	$8191\frac{32767}{32768}$
15	10,3972 0770 8399....	$16384\frac{1}{65536}$	$16383\frac{65535}{65536}$
16	11,0903 5488 8959....	$32768\frac{1}{131072}$	$32767\frac{131071}{131072}$
17	11,7835 0206 9519....	$65536\frac{1}{262144}$	$65535\frac{262143}{262144}$
18	12,4766 4925 0079....	$131072\frac{1}{524288}$	$131071\frac{524287}{524288}$
19	13,1697 9643 0638....	$262144\frac{1}{1048576}$	$262143\frac{1048575}{1048576}$
20	13,8629 4361 1198....	$524288\frac{1}{2097152}$	$524287\frac{2097151}{2097152}$

(Die Fortsetzung im nächsten Hefte.)

2.

Nouvelles formules analogues aux séries de Taylor et de Maclaurin.

(Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, colonels du génie au service de Russie.)

Le théorème de Taylor, dans tous les cas où il n'est pas en défaut, et où il conduit à des séries convergentes, indique qu'une fonction continue $F(x)$, d'une seule variable x, est totalement déterminée, quand pour une valeur particulière $x=a$, cette fonction et tous ses coëfficiens différentiels sont des quantités connues; car on a:

1. $$F(x)=F(a+x-a)=F(a)+F'(a)\frac{x-a}{1}+F''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+F'''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Il suit de là que deux fonctions sont égales, ou se confondent, lorsqu'elles ont, ainsi que tous leurs coëfficiens différentiels, des valeurs respectivement égales, pour une même valeur particulière $x=a$ de la variable.

Le théorème de Maclaurin établit le même principe pour le seul cas particulier où $a=0$; mais il démontre en outre que dans ce cas, les conditions nécessaires à vérifier, pour établir l'identité des deux fonctions, se réduisent de moitié, quand ces fonctions sont paires ou impaires, c'est à dire quand elles ne changent pas de valeurs absolues avec le signe de la variable.

Il s'agit de prouver ici que cette réduction a toujours lieu pour des fonctions paires ou impaires, quelle que soit a ou la valeur particulière de la variable que l'on considère.

Si au moyen de la formule (1.) on cherche les développements successifs de $F(x)$, $F''(x)$, $F^{\text{IV}}(x)$ ...., suivant les puissances de $x-a$, et qu'on y fasse ensuite $x=-a$, on obtiendra la série des équations:

2. $$\begin{cases} F(-a)=F(a)-\frac{2a}{1}F'(a)+\frac{(2a)^2}{1.2}F''(a)-\frac{(2a)^3}{1.2.3}F'''(a)+\text{etc.} \\ F''(-a)=F''(a)-\frac{2a}{1}F'''(a)+\frac{(2a)^2}{1.2}F^{\text{IV}}(a)-\frac{(2a)^3}{1.2.3}F^{\text{V}}(a)+\text{etc.} \\ F^{\text{IV}}(-a)=F^{\text{IV}}(a)-\frac{2a}{1}F^{\text{V}}(a)+\text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si $F(x)$ est une fonction impaire, on aura:

$$F(-a) = -F(a),\quad F''(-a) = -F''(a),\quad F^{\text{IV}}(-a) = -F^{\text{IV}}(a), \text{ etc.};$$

et les équations (2.) deviendront:

$$3.\quad \begin{cases} 0 = 2F(a) - \frac{2a}{1}F'(a) + \frac{(2a)^2}{1.2}F''(a) - \text{etc.} \\ 0 = 2F''(a) - \frac{2a}{1}F'''(a) + \frac{(2a)^2}{1.2}F^{\text{IV}}(a) - \text{etc.} \\ 0 = 2F^{\text{IV}}(a) - \frac{2a}{1}F^{\text{V}}(a) + \text{etc.} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Ces équations permettront de déterminer $F(a)$, $F''(a)$, $F^{\text{IV}}(a)$, ... au moyen de $F'(a)$, $F'''(a)$, ... ou réciproquement; l'élimination de $F''(a)$, $F^{\text{IV}}(a)$, ... entre elles conduira évidemment à une équation de la forme:

$$F(a) = A\frac{a}{1}F'(a) + B\frac{a^3}{1.2.3}F'''(a) + C\frac{a^5}{1.2.3.4.5}F^{\text{V}}(a) + \text{etc.};$$

A, B, C, ... étant des coëfficiens numériques indépendans de a et de la forme de la fonction, en sorte que si l'on pose $F(a) = \sin a$, on aura:

$$\tang a = A\frac{a}{1} - B\frac{a^3}{1.2.3} + C\frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.},$$

d'où l'on déduit:

$$A = \left(\frac{\partial}{\partial z}\tang z\right)_{z=0},\quad B = -\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\tang z\right)_{z=0},\quad C = \left(\frac{\partial^5}{\partial z^5}\tang z\right)_{z=0}, \ldots;$$

cette notation indiquant, qu'après avoir effectué les intégrations par rapport à z, il faudra faire $z=0$ dans les résultats.

Les équations (3.) donnent donc:

$$4.\quad \begin{cases} F(a) = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n+1}\tang z}{\partial z^{2n+1}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1} F^{(2n+1)}(a), \\ F^{(2r)}(a) = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n+1}\tang z}{\partial z^{2n+1}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1} F^{(2n+2r+1)}(a). \end{cases}$$

Cette dernière formule donne le coëfficient différentiel d'un ordre pair $(2r)$, en fonction des coëfficients différentiels des ordres impairs supérieurs à $2r$; son identité de forme avec la première résulte évidemment de ce qu'en supprimant les r premières des équations (3.), les équations restantes sont composées en $F^{(2r)}(a)$, $F^{(2r+1)}(a)$, $F^{(2r+2)}(a)$, ... comme toutes les équations (3.) le sont en $F(a)$, $F'(a)$, $F''(a)$, ...

Réciproquement: l'élimination de $F'''(a)$, $F^{\text{V}}(a)$, ..., entre les équations (3.), conduira évidemment à une équation de la forme:

$$aF'(a)=F(a)+AF''(a)\frac{a^2}{1.2}+BF^{\text{IV}}(a)\frac{a^4}{1.2.3.4}+CF^{\text{VI}}(a)\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$

A, B, C, ... étant indépendant de a et de la forme F, en sorte que si l'on pose $F(a)=\sin a$, on aura:

$$\frac{a\cos a}{\sin a}=1-A\frac{a^2}{1.2}+B\frac{a^4}{1.2.3.4}-C\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.},$$

d'où l'on déduit:

$$A=-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\quad B=\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\quad C=-\left(\frac{\partial^6}{\partial z^6}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\ \ldots$$

Les équations (3.) donnent donc:

$$5.\quad\begin{cases} aF'(a)=F(a)+\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n}\frac{z}{\operatorname{tang} z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}F^{(2n)}(a),\\[2ex] aF^{(2r+1)}(a)=F^{(2r)}(a)+\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n}\frac{z}{\operatorname{tang} z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}F^{(2r+2n)}(a).\end{cases}$$

Cette dernière formule donne le coëfficient différentiel d'un ordre impair quelconque $(2r+1)$ en fonction des coëfficiens différentiels des ordres pairs égaux et supérieurs à $2r$; son identité de forme avec la première est une conséquence nécessaire de la symmétrie des équations (3.).

Si $F(x)$ est une fonction paire, on aura:

$$F(-a)=F(a),\quad F''(-a)=F''(a),\quad F^{\text{IV}}(-a)=F^{\text{IV}}(a)\ \ldots$$

et les équations (2.) deviennent:

$$6.\quad\begin{cases} 0=\dfrac{2a}{1}F'(a)-\dfrac{(2a)^2}{1.2}F''(a)+\dfrac{(2a)^3}{1.2.3}F'''(a)-\text{etc.}\\[1ex] 0=\dfrac{2a}{1}F'''(a)-\dfrac{(2a)^2}{1.2}F^{\text{IV}}(a)+\dfrac{(2a)^3}{1.2.3}F^{\text{V}}(a)-\text{etc.}\\[1ex] 0=\dfrac{2a}{1}F^{\text{V}}(a)-\text{etc.}\\ \ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Ces équations permettront de déterminer $F'(a)$, $F'''(a)$, $F^{\text{V}}(a)$, ... en fonction de $F''(a)$, $F^{\text{IV}}(a)$, etc., et réciproquement. L'élimination des dérivées des ordres impaires supérieurs au premier, doit conduire évidemment à une équation de la forme:

$$F'(a)=A\frac{a}{1}F''(a)+B\frac{a^3}{1.2.3}F^{\text{IV}}(a)+C\frac{a^5}{1.2.3.4.5}F^{\text{VI}}(a)+\text{etc.}$$

A, B, C, ... étant des coëfficiens numériques indépendans de a et de la forme de la fonction F, en sorte que si l'on pose $F(a)=\cos a$, on devra avoir:

$$-\operatorname{tang} a = -Aa + B\frac{a^3}{1.2.3} - C\frac{a^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.};$$

d'où l'on déduit:

$$A = +\left(\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{tang} z\right)_{z=0},\quad B = -\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\operatorname{tang} z\right)_{z=0},\quad C = +\left(\frac{\partial^5}{\partial z^5}\operatorname{tang} z\right)_{z=0},\ \ldots\ldots;$$

Les equations (6.) conduisent ainsi aux formules:

$$7.\quad\begin{cases} F'(a) = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} + \cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n+1}\operatorname{tang} z}{\partial z}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1}F^{(2n+2)}(a),\\[2ex] F^{(2r+1)}(a) = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} + \cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n+1}\operatorname{tang} z}{\partial z}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1}F^{(2r+2n+2)}(a).\end{cases}$$

L'élimination de $F'''(a)$, $F^{v}(a)$, ... entre les équations (6.) conduira au contraire à une équation de la forme:

$$aF''(a) = F'(a) + A\frac{a^2}{1.2}F'''(a) + B\frac{a^4}{1.2.3.4}F^{v}(a) + C\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}F^{vii}(a) + \text{etc.}$$

A, B, C, ... étant toujours des coëfficiens numériques, indépendans de a et de la nature de la fonction F, en sorte que si l'on pose $F(a) = \cos a$, on devra avoir:

$$-\frac{a}{\operatorname{tang} a} = -1 + A\frac{a^2}{1.2} - B\frac{a^4}{1.2.3.4} + C\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{etc.},$$

ce qui donne

$$A = -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\quad B = \left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\quad C = -\left(\frac{\partial^6}{\partial z^6}\frac{z}{\operatorname{tang} z}\right)_{z=0},\ \ldots.$$

Les équations (6.) donnent ainsi les formules:

$$8.\quad\begin{cases} aF''(a) = F'(a) + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n}\frac{z}{\operatorname{tang} z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n}}{1.2.3\ldots.2n}F^{(2n+1)}(a),\\[2ex] aF^{(2r+2)}(a) = F^{(2r+1)}(a) + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\cos n\pi\left(\dfrac{\partial^{2n}\frac{z}{\operatorname{tang} z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0}\dfrac{a^{2n}}{1.2.3\ldots.2n}F^{(2r+2n+1)}(a).\end{cases}$$

Les formules (4., 5., 7., 8.), qui peuvent être utiles dans plusieurs circonstances, transforment l'équation (1.) en de nouvelles séries, analogues aux séries de **Taylor** et de **Maclaurin**, et qui donnent $F(x)$, lorsque cette fonction est impaire ou paire, développée suivant les puissances de $(a-x)$, et au moyen des valeurs que prennent pour $x=a$ ses coefficiens différentiels des ordres impairs, ou des ordres pairs seulement.

Ces nouvelles formules sont:

$$9.\quad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n+1} \tang z}{\partial z^{2n+1}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1}$$
$$\times \left[F^{(2n+1)}(a) + F^{(2n+3)}(a)\frac{(a-x)^2}{2} + F^{(2n+5)}(a)\frac{(a-x)^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right]$$
$$-\left[F'(a)\frac{(a-x)}{1} + F'''(a)\frac{(a-x)^3}{1.2.3} + F^{\text{v}}(a)\frac{(a-x)^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right];$$

$$10.\quad F(x) = \left[F(a) + F''(a)\frac{(a-x)^2}{2} + F^{\text{iv}}(a)\frac{(a-x)^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right]$$
$$-\frac{1}{a}\left[F(a)\frac{(a-x)}{1} + F''(a)\frac{(a-x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right]$$
$$-\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n} \frac{z}{\tang z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n}}{1.2.3\ldots.2n}$$
$$\times \left[F^{(2n)}(a)\frac{(a-x)}{1} + F^{(2n+2)}(a)\frac{(a-x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right];$$

lorsque $F(x)$ est impair, et:

$$11.\quad F(x) = \left[F(a) + F''(a)\frac{(a-x)^2}{2} + F^{\text{iv}}(a)\frac{(a-x)^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right]$$
$$-\sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n+1} \tang z}{\partial z^{2n+1}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n+1}}{1.2.3\ldots.2n+1}$$
$$\times \left[F^{(2n+2)}(a)\frac{(a-x)}{1} + F^{(2n+4)}(a)\frac{(a-x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right];$$

$$12.\quad F(x) - F(a) = -\left[F'(a)\frac{(a-x)}{1} + F'''(a)\frac{(a-x)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right]$$
$$+\frac{1}{a}\left[F'(a)\frac{(a-x)^2}{1.2} + F'''(a)\frac{(a-x)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right]$$
$$+\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos n\pi \left(\frac{\partial^{2n} \frac{z}{\tang z}}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0} \frac{a^{2n}}{1.2.3\ldots.2n}$$
$$\times \left[F^{(2n+1)}(a)\frac{(a-x)^2}{1.2} + F^{(2n+3)}(a)\frac{(a-x)^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right];$$

lorsque $F(x)$ est une fonction paire.

Nous nous abstiendrons de discuter maintenant ces formules; nous nous contenterons de faire remarquer qu'elles démontrent: que deux fonctions impaires sont identiques ou se confondent, lorsque leurs dérivées des ordres pairs ou des ordres impairs sont respectivement égales pour une même valeur de la variable; que deux fonctions paires sont pareillement identiques, ou ne diffèrent que d'une constante, lorsque leurs dérivées des ordres pairs ou des ordres impairs sont respectivement égales pour une même valeur de la variable. Dans cet énoncé les fonctions elles mêmes sont prises pour des dérivées de l'ordre zéro.

3.

Sur le développement des fonctions suivant des séries de lignes trigonométriques d'arcs imaginaires.

(Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, colonels du génie au service de Russie.)

Les équations intégrales qui doivent exprimer les lois de l'équilibre intérieur d'un corps solide, homogène et élastique, ayant pour forme un prisme rectangulaire, et soumis à des pressions extérieures données, nous paraissent exiger la connaissance du développement d'une fonction de x, entre les limites o et $2a$, suivant une série de la forme:

$$1. \quad A_1 \sin r_1 x + A_2 \sin r_2 x + A_3 \sin r_3 x + \text{etc.}$$

r_1, r_2, r_3, ... étant les différentes racines imaginaires de l'équation:

$$2. \quad ar + \sin ar \cos ar = 0 \quad (\text{ou } 2ar + \sin 2ar = 0),$$

ou bien les racines de l'équation:

$$3. \quad ar - \sin ar \cos ar = 0 \quad (\text{ou } 2ar - \sin 2ar = 0).$$

Or la belle méthode dont M. **Fourier** nous parait avoir le premier fait sentir toute l'importance, dans son ouvrage sur la théorie analytique de la chaleur, conduit naturellement à chercher s'il ne serait pas possible de trouver, pour chaque terme du développement (1.), un facteur o fonction de x, tel qu'en multipliant par $o\,\partial x$ l'équation:

$$F(x) = A_1 \sin r_1 x + A_2 \sin r_2 x + \ldots . A_k \sin r_k x + \ldots .$$

et intégrant ses deux membres entre les limites o et $2a$, tous les termes du second membre disparaîtraient, excepté le terme $(A_k \sin r_k x)$ que l'on considère.

Des recherches, qu'il serait trop long de développer ici, nous ont conduit à la découverte de ce facteur. Nous avons trouvé:

$$o_k = \sin r_k (x - 2a).$$

On a en effet, par l'intégration par parties:

$$\int_o^{2a} \sin r_l x \sin r_k (x - 2a)\, \partial x$$

$$= \left(-\frac{1}{r_l} \cos r_l x \sin r_k (x - 2a) + \frac{r_k}{r_l^2} \sin r_l x \cos r_k (x - 2a)\right)_o^{2a}$$

$$+ \frac{r_k^2}{r_l^2} \int_o^{2a} \sin r_l x \sin r_k (x - 2a)\, \partial x,$$

d'où:

$$(r_l^2-r_k^2)\int_0^{2a}\sin r_l x \sin r_k(x-2a)\,\partial x = [r_k \sin 2ar_l - r_l \sin 2ar_k],$$

or on a évidemment:

$$r_l \sin 2ar_k = r_k \sin 2ar_l,$$

lorsque r_k et r_l sont deux racines de l'équation (2.), ou deux racines de l'équation (3.); on a donc généralement:

$$4.\quad (r_l^2-r_k^2)\int_0^{2a}\sin r_l x \sin r_k(x-2a)\,\partial x = 0,$$

et par suite:

$$\int_0^{2a}\sin r_l x \sin r_k(x-2a)\,\partial x = 0,$$

lorsque r_l et r_k soint différens. On a d'ailleurs:

$$5.\quad \int_0^{2a}\sin r_k x \sin r_k(x-2a)\,\partial x = a(\cos 2ar_k \pm 1);$$

le signe (+) correspond aux racines de l'équation:

$$\sin 2ar + 2ar = 0,$$

et le signe (—) à celles de l'équation:

$$\sin 2ar - 2ar = 0.$$

La découverte du facteur $[\varrho_k = \sin r_k(x-2a)]$ donne ainsi.

$$A_k = \frac{1}{a}\,\frac{\int_0^{2a} F(\mu)\sin r_k(\mu-2a)\,\partial\mu}{(\cos 2ar_k \pm 1)}$$

et conduit aux deux développemens suivans:

$$6.\quad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{a}\,\Sigma\,\dfrac{\sin rx}{\cos 2ar+1}\displaystyle\int_0^{2a} F(\mu)\sin r(\mu-2a)\,\partial\mu; \\ F(x) = \dfrac{1}{a}\,\Sigma\,\dfrac{\sin sx}{\cos 2as-1}\displaystyle\int_0^{2a} F(\mu)\sin s(\mu-2a)\,\partial\mu \end{cases}$$

Les sigmas étant étendus à toutes les racines des équations:

$$\sin 2ar + 2ar = 0,$$
$$\sin 2as - 2as = 0;$$

les imaginaires disparaîtront évidemment du résultat définitif.

Ces formules (6.) peuvent être prouvées directement par d'autres méthodes; elles conduisent à des séries convergentes et qui jouissent de propriétés curieuses. Mais le résultat le plus remarquable qu'elles nous aient paru offrir, consiste dans de nouvelles formules qui s'en déduisent et qui ont une forme très simple:

Si l'on change x en $(a-x)$ ou $(a+x)$, dans la première des formules (6.), et que l'on représente $F(a-x)$ ou $F(a+x)$ par $f(x)$, on a,

entre les limites $(-a)$ et $(+a)$.

$$f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \frac{\sin r(x-a)}{\cos 2ar + 1} \int_{-a}^{+a} f(v) \sin r(v+a) \, \partial v,$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \frac{\sin r(x+a)}{\cos 2ar + 1} \int_{-a}^{+a} f(v) \sin r(v-a) \, \partial v.$$

Si $f(x)$ est une fonction impaire, ou telle que $f(-v) = -f(v)$, on a simplement:

$$f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \frac{\sin r(x-a)}{\cos 2ar + 1} \int_{-a}^{+a} f(v) \sin rv \cos ra \, \partial v,$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \frac{\sin r(x+a)}{\cos 2ar + 1} \int_{-a}^{+a} f(v) \sin rv \cos ra \, \partial v;$$

enfin si l'on ajoute ces deux dernières équations, et que l'on observe que $\cos^2 ra = \frac{1}{2}(\cos 2ar + 1)$, on aura définitivement, entre les limites o et a

$$7. \quad f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \sin rx \int_0^a f(v) \sin rv \, \partial v,$$

r ayant successivement pour valeurs toutes les racines imaginaires de l'équation:

$$\sin ar \cos ar + ar = 0.$$

On démontrerait de la même manière que l'on a, entre les limites o et a:

$$8. \quad f(x) = \frac{1}{a} \Sigma \cos sx \int_0^a f(v) \cos sv \, \partial v;$$

s ayant successivement pour valeurs les racines de l'équation:

$$\sin as \cos as - as = 0.$$

Les formules (7. et 8.), qui ont rigoureusement la même forme que celles connues, qui donnent le développement des fonctions en sinus et cosinus d'arcs multiples, se prouvent directement par la méthode de décomposition des fractions rationnelles, ou bien par le calcul des résidus de M. Cauchy.

Les conclusions qu'il est permis de tirer de ce qui précède, c'est: 1°. que la question générale du développement d'une fonction, entre des limites données, suivant une série de la forme:

$$F(x) = A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3 + \text{etc.}$$

dans laquelle V_1, V_2, V_3, ..., représentent des fonctions de x de même nature, contenant un paramètre, qui a successivement pour valeurs les différentes racines, en nombre infini, d'une certaine équation transcen-

dante, peut être résolue, dans un plus grand nombre de cas qu'on n'avait paru le croire jusqu'ici, par la méthode que l'on suit dans la théorie de la chaleur, c'est-à-dire par l'emploi d'un certain facteur $o\,\partial x$, tel qu'en intégrant le développement, multiplié par ce facteur, entre les limites proposées, tous les termes de ce développement disparaissent excepté un; 2°. que cette méthode n'est pas seulement restreinte aux cas où l'équation transcendante n'a que des racines réelles, et où le facteur o est pécisément égal à celle des fonctions (V_k) dont on veut déterminer le coëfficient; 3°. qu'elle peut être étendue à des cas où l'équation transcendante n'a que des racines imaginaires, et qu'alors le facteur o peut être une fonction (V_k) différente de (V_k), mais contenant le même paramètre (r_k) que le terme que l'on se propose d'isoler.

4.

Theorie der Cykloïde als Tautochrona.

Versuch einer mechanischen Discussion nach der antiken geometrischen Methode.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmann* zu Greifswalde.)

§. 1. Erklärungen. Wenn man aus einem angenommenen Punct der Bahn eines irgend wie bewegten Körpers ein beliebiges Stück des Weges abschneidet, und voraussetzt, es werde in der Zeit, in welcher es bei der ungleichförmigen Bewegung wirklich beschrieben wird, gleichförmig durchlaufen, und man läfst nun das abgeschnittene Stück immer kleiner werden, so heifst die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, welcher sich die vorausgesetzte so sehr nähert, dafs der Unterschied kleiner werden kann als die Geschwindigkeit jeder gegebenen gleichförmigen Bewegung, ohne sie jedoch zu erreichen, die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung in dem angenommenen Puncte. Wird die vorausgesetzte gleichförmige Bewegung bei Verkleinerung des abgeschnittenen Stücks des Weges langsamer als jede gegebene gleichförmige Bewegung, so sagt man, in dem angenommenen Punct der Bahn der ungleichförmigen Bewegung finde die Geschwindigkeit 0 statt. Denkt man sich zu einer ungleichförmigen Bewegung eine andere, welche vor- und rückwärts gehet, je nachdem in der ersteren Bewegung die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt, und worin die von Anfang an zurückgelegten Wege in demselben Verhältnifs wachsen oder abnehmen wie die Geschwindigkeit in der ersteren Bewegung, so kann man sich leicht einen Begriff machen von der Geschwindigkeit, womit die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung zu- oder abnimmt. Die Geschwindigkeit, womit die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung zu- oder abnimmt, heifst die beschleunigende oder verzögernde Kraft.

Ein Körper oder eine Fläche oder eine Linie hat eine blofs progressive Bewegung, wenn alle Puncte des Körpers (der Fläche, der Linie) so fortgehen, dafs die geraden Verbindungslinien eines jeden Punctes mit dem Ort, den derselbe Punct späterhin einnimmt, für jede zwei Augen-

blicke der Bewegung sämmtlich einander parallel und gleich sind, die Puncte mögen sich nun inzwischen in dieser geraden Linie selbst oder in irgend einer zwischen denselben Endpuncten enthaltenen Curve bewegt haben. Wenn ein Punct sich in einer beliebigen geraden oder krummen Linie bewegt, und diese Linie hat zu gleicher Zeit eine andere bloſs progressive Bewegung im Raume, so heiſst die Bahn, welche der Punct nun wirklich im Raume beschreibt, die aus beiden Bewegungen zusammengesetzte Bewegung, und es ist aus Eucl. 1, 33. klar, daſs es einerlei ist, welche von beiden Bewegungen man als die progressive der ganzen Linie, und welche man als die Bahn des Punctes in der progressiv fortrükkenden Linie ansehen will. Sind einem Puncte drei Bewegungen vorgeschrieben, und man setzt zwei derselben auf die angezeigte Art zusammen, und die daraus entspringende wieder mit der dritten, so hat man die aus allen dreien zusammengesetzte Bewegung, und es ist aus der Theorie des Parallelepipedums klar, daſs man die drei Bewegungen in beliebiger Ordnung zusammensetzen kann. Und hieraus beweiset man wieder, auf ähnliche Art wie bei der Multiplication den Satz von der beliebigen Ordnung der Factoren, daſs man auch vier und mehr Bewegungen, in welcher Ordnung man will, zusammensetzen kann, ohne die zuletzt entspringende Bewegung zu ändern.

Verbindet man einen angenommenen Punct einer Curve von einfacher oder doppelter Krümmung mit einem andern Punct derselben Curve durch eine Sehne, und bewegt diese um den zuerst angenommenen Punct, so daſs sie nach und nach alle zwischenliegende Puncte schneidet, so heiſst diejenige gerade Linie, welcher sich die bewegte zuletzt so sehr nähert, daſs die Abweichung kleiner werden kann als jeder gegebene Winkel, ohne sie jedoch zu erreichen, die Tangente des angenommenen Puncts der Curve, und der Punct, den sie mit der Curve gemein hat, der Berührungspunct. Hieraus ist zugleich klar, daſs bei einer Curve von einfacher Krümmung zwischen die Tangente und die Curve keine gerade Linie aus dem Berührungspunct gezogen werden kann, und daſs jede gerade Linie, zwischen welche und die Curve keine andere gerade Linie aus dem gemeinsamen Punct gezogen werden kann, eine Tangente ist.

§. 2. Lehrsatz. Wenn mehrere geradlinige oder krummlinige Bewegungen in Eine zusammengesetzt werden, und man zieht nun an correspondirende Puncte der einzelnen Partialbewegungen Tangenten, und setzt gleichförmige Bewegungen, welche respective die Richtungen die-

ser Tangenten und die den entsprechenden Puncten angehörigen Geschwindigkeiten haben, in Eine zusammen, so erhält man die Richtung und Geschwindigkeit der aus allen krummlinigen Bewegungen zusammengesetzten Bewegung in dem correspondirenden Puncte.

Beweis. Es sei $ALHB$ (Taf. I. Fig. 1.) ein Stück der Bahn einer der Partialbewegungen, und diese sei

1) von einfacher Krümmung. Wir wollen beweisen, daſs wenn wir aus A eine Sehne AH ziehen, und den Punct H nahe genug bei A annehmen, das Verhältniſs AH : Bogen ALH dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen kann als jedes gegebene Verhältniſs einer kleineren Gröſse zu einer gröſseren, $m:n$. Man halbire eine beliebige gerade Linie DE in F, und errichte ein Perpendikel FG so, daſs $m:n-m = DF:FG$, und ziehe DG und GE. Dann ist verbunden (Eucl. 5, 18.) $m:n = DF:DF+FG =$ (Eucl. 5, 15.) $DE:DE+2FG$, also $DE:DG+GE > m:n$. Nun kann der Winkel, welchen die Tangente AC gegen eine aus A gezogene Sehne, wie auch der Winkel, welchen AC gegen ein benachbarte Tangente macht, kleiner werden als jeder gegebene Winkel; folglich kann um so mehr der Unterschied beider Winkel, d. i. der Winkel, welchen die Sehne gegen die Tangente ihres andern Endpuncts macht, kleiner werden als jeder gegebene Winkel. Man ziehe also eine Sehne AH so, daſs, wenn man noch die Tang. HI bis an AC zieht, $\angle IAH < GDE$, und zugleich $IHA < GED$ sei. Man errichte über AH, auf derselben Seite wo das ΔAIH liegt, ein ΔAHK, worin $\angle HAK = GDE = GED = AHK$. Dann ist (Eucl. 6, 4.) $DE:DG = AH:AK$

$$\frac{DE:GE = AH:HK}{DE:DG+GE = AH:AK+HK}$$ (Eucl. 5, 24.),

also $AH:AK+HK > m:n$, also (Eucl. 1, 21.) um so mehr $AH:AI+IH > m:n$, also (Archim. *de Sphaer. et Cyl.* Annahme 2.) AH: Bogen $ALH > m:n$. Das Verhältniſs $AH:ALH$ kommt also dem Verhältniſs der Gleichheit näher als das Verhältniſs $m:n$.

2) Die Curve AB sei von doppelter Krümmung (Fig. 2.), und wir wollen gleichfalls beweisen, daſs das Verhältniſs der Sehne AB zum Bogen AB, wenn man B nahe genug bei A annimmt, dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen kann als jedes gegebene Verhältniſs einer kleineren Gröſse zu einer gröſseren. Man ziehe die Tangente AC. Man drehe die Ebene CAB um die Linie AC, so daſs sie nach und nach alle von B

bis A liegenden Puncte der Curve durchschneidet, so wird es eine Ebene CAD geben, welcher die sich drehende Ebene zuletzt sich so sehr nähert, daſs die Abweichung kleiner wird als jeder gegebene Flächenwinkel, ohne sie jedoch zu erreichen. Auf diese Ebene CAD (welche man die **Krümmungs-Ebene** des Punctes A nennt) projicire man den Bogen AB durch gefällte Perpendikel; Bogen AD sei die Projection. Der geometrische Ort des auf die Krümmungs-Ebene gefällten Perpendikels BD ist eine cylinderförmliche Fläche ABD, welche sich in eine Ebene ausbreiten läſst, wobei Bogen AD in eine eben so groſse gerade Linie EF, Bogen AB aber in eine eben so groſse krumme Linie EIG übergeht, so daſs, wenn man die gerade Linie GF zieht, diese auf EF winkelrecht steht und $= BD$ ist. Zieht man noch die Sehne EG, so kann das Verhältniſs derselben zum Bogen GIE (zufolge dessen, was unter No. 1. bewiesen) dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs. Zieht man ferner die Sehne DA, so kann das Verhältniſs $BD:DA$, folglich um so mehr das Verhältniſs BD : Bogen DA, d. i. $GF:FE$, kleiner werden als jedes gegebene Verhältniſs. Daher kann der $\angle FEG$ kleiner werden als jeder gegebene Winkel; daher kann auch das Verhältniſs $GE:EF$ und folglich auch das Verhältniſs $GIE:EF$, d. i. Bogen BA : Bogen DA, dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs. Aber auch das Verhältniſs des Bogens DA zur Sehne DA kann, nach dem was unter No. 1. bewiesen, dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs, und dasselbe gilt vom Verhältniſs der Sehne DA zu Sehne BA, weil der $\angle BAD$ kleiner werden kann als jeder gegebene Winkel. Folglich kann auch das aus den drei letzteren zusammengesetzte Verhältniſs, d. i. Bogen BA : Sehne BA, dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs einer gröſseren Gröſse zu einer kleineren.

Nachdem dies bewiesen, denken wir uns alle in Rede stehenden krummlinigen Partialbewegungen, nebst der aus ihnen zusammengesetzten, und nehmen in ihnen für einen beliebigen Augenblick correspondirende Puncte an. Von diesen Puncten ziehen wir nach den, einem andern Augenblick angehörigen correspondirenden Puncten Sehnen, und setzen voraus, die Bewegungen geschähen **gleichförmig** auf diesen Sehnen, in derselben Zeit, in welcher sie auf den zwischenliegenden Bogen wirklich geschehen. Dann ist, zufolge des Begriffs der aus mehreren krummlini

gen Bewegungen zusammengesetzten Bewegung, auch die gleichförmige Bewegung auf der Sehne der zusammengesetzten Bewegung nach Richtung und Geschwindigkeit aus den gleichförmigen Bewegungen auf den Sehnen der Partialbewegungen zusammengesetzt. Rückt man nun in Gedanken den zweiten Augenblick immer näher an den ersten, so bleibt doch stets dasselbe eben ausgesprochene Gesetz. Da aber das Verhältniſs jeder Sehne zum entsprechenden Bogen dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen kann als jedes gegebene Verhältniſs, so kann auch das Verhältniſs jeder aus der gleichförmigen Sehnenbewegung geschlossenen Geschwindigkeit zu der aus der gleichförmigen Bogenbewegung geschlossenen Geschwindigkeit dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs. Die letztere Geschwindigkeit nähert sich aber nach §. 1. der wahren Geschwindigkeit in dem dem ersten angenommenen Augenblick entsprechenden Puncte so, daſs der Unterschied kleiner werden kann als jede gegebene Geschwindigkeit, so wie sich andrerseits die Richtung der Sehne der Richtung der Tangente so nähert, daſs die Abweichung kleiner werden kann als jeder gegebene Winkel. Aus allem diesem folgt, was bewiesen werden sollte.

§. 3. Lehrsatz. Wenn man aus irgend einem Punct der Bahn eines auf beliebige Weise im Raum bewegten Punctes eine gerade Linie nach einem im Raume feststehenden Puncte zieht, welche wir Radius vector nennen wollen, und man zerfällt die wahre Geschwindigkeit des bewegten Punctes in zwei auf einander winkelrechte, davon die eine nach dem Radius vector gerichtet ist, so ist letztere gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Radius vector zu- oder abnimmt.

Beweis. Es sei BC (Fig. 3.) ein Bogen der beschriebenen Curve, und A der feststehende Punct im Raum; man ziehe die Radii vectores AB und AC und die Sehne BC. Man beschreibe aus A durch C einen Kreisbogen CD bis an AB oder deren Verlängerung, und fälle das Perpendikel CE auf AD. Setzt man nun voraus, die Bewegung geschähe auf der Sehne BC in derselben Zeit τ, in welcher sie auf dem Bogen BC wirklich geschieht, und nennt man diejenige unveränderliche Zeit, in welcher ein Weg gleichförmig zurückgelegt wird, den man als Maaſs der Geschwindigkeit ansieht, t, und macht man $\tau : t =$ Sehne $BC : x = BD : y$, so ist die Gröſse, welcher sich x nähert, indem man den Punct C auf dem Bogen CB immer näher bei B annimmt, die wahre Geschwindigkeit der krumm-

linigen Bewegung im Punct B, die Gröſse aber, welcher sich y nähert, die Geschwindigkeit, womit der Radius vector zu- oder abnimmt. Da nun der $\angle BAC$ kleiner werden kann als jeder gegebener Winkel, so kann das Verhältniſs $DE:EC$ kleiner werden als jedes gegebene Verhältniſs. Das Verhältniſs $EC:EB$ aber nähert sich dem Verhältniſs des aus A auf die Tangente des Punctes B gefällten Perpendikels zu dem vom Perpendikel abgeschnittenen Stück der Tangente. Folglich kann auch das Verhältniſs $DE:EB$ kleiner werden als jedes gegebene Verhältniſs; oder, was desselbe sagt: das Verhältniſs $BE:BD$ kann dem Verhältniſs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältniſs (es müſste denn sein, daſs die Tangente auf AB winkelrecht stehet). Macht man also $\tau:t = BE:z$, so nähert sich z, so gut wie vorher y, der Geschwindigkeit, womit der Radius vector zu- oder abnimmt (für den Fall aber, wo die Tangente winkelrecht auf AB steht, ist letztere Geschwindigkeit 0, und auch die nach dem Radius vector zerfällte wahre Geschwindigkeit der krummlinigen Bewegung im Puncte $B = 0$; daher brauchen wir diesen Fall nicht weiter zu berücksichtigen). Aus den Proportionen $\tau:t =$ Sehne $BC:x$ und $\tau:t = BE:z$, folgt simpliciter ex aequo: Sehne $BC:x = BE:z$; verwechselt (Eucl. 5, 16.): Sehne $BC:BE = x:z$. Folglich stehet die wahre Geschwindigkeit der krummlinigen Bewegung im Punct B zu der Geschwindigkeit, womit der Radius vector zu- oder abnimmt, in demjenigen Verhältniſs, dem sich das Verhältniſs der Sehne BC zu BE nähert, d. h. im Verhältniſs des Radius vector zu dem vom Perpendikel abgeschnittenen Stück der Tangente, d. h. im Verhältniſs der wahren Geschwindigkeit der krummlinigen Bewegung im Punct B zu der nach dem Radius vector zerfällten Geschwindigkeit.

§. 4. **Lehrsatz.** Wenn mehrere geradlinige, gleichförmige oder ungleichförmige Bewegungen (die wir mit A, B, C, D bezeichnen wollen) eben dieselbe zusammengesetzte geradlinige oder krummlinige Bewegung E geben als mehrere andere geradlinige Bewegungen F, G, H, und man setzt nun mehrere geradlinige gleichförmige Bewegungen I, K, L, M, N, O, P, welche respective die Richtungen der Bewegungen A, B, C, D, F, G, H haben, und sich wie die beschleunigenden oder verzögernden Kräfte in correspondirenden Augenblicken der Bewegungen A, B, C, D, F, G, H verhalten (wobei aber für verzögernde Kräfte die Richtungen der Bewegungen A, B, C, D, F, G, H in die entgegengesetzten zu verwandeln sind), in Eine zusammen, I, K, L, M in Q, und N, O, P

in R, so haben die Bewegungen Q und R einerlei Richtung und Geschwindigkeit.

Beweis. Die Bewegung E habe in dem correspondirenden Augenblicke die Richtung AB (Fig. 4.) und die Geschwindigkeit a. Dann ist nach §. 2. die Geschwindigkeit derjenigen Bewegung, die man aus den Richtungen und Geschwindigkeiten der correspondirenden Puncte der Bewegungen A, B, C, D zusammensetzen kann, gleichfalls a, und ihre Richtung AB, aber auch die Geschwindigkeit derjenigen Bewegung, die man aus den Richtungen und Geschwindigkeiten der correspondirenden Puncte der Bewegungen F, G, H zusammensetzen kann, gleichfalls a, und ihre Richtung AB. Hieraus folgt, dafs wenn man sich statt der Bewegungen A, B, C, D, F, G, H eben so viele andere geradlinige Bewegungen S, T, U, V, W, X, Y denkt, worin die Räume in demselben Verhältnifs wachsen oder abnehmen wie die Geschwindigkeiten in den Bewegungen A, B, C, D, F, G, H, dafs alsdann die Bewegungen S, T, U, V eben dieselbe geradlinige oder krummlinige Bewegung Z geben als die Bewegungen W, X, Y. Man kann daher wie zu Anfang schliefsen, und findet dadurch, dafs die Bewegung, welche man aus den zu correspondirenden Augenblicken gehörigen Richtungen und Geschwindigkeiten der Bewegungen S, T, U, V zusammensetzen kann, nach Richtung und Geschwindigkeit einerlei ist mit der Bewegung, welche man aus den zu denselben Augenblicken gehörigen Richtungen und Geschwindigkeiten der Bewegungen W, X, Y zusammensetzen kann. Statt dessen können wir (zufolge des in §. 1. gegebenen Begriffs der beschleunigenden oder verzögernden Kraft) sagen: Die Kraft, welche man aus den zu correspondirenden Augenblicken gehörigen beschleunigenden oder verzögernden Kräften der Bewegungen A, B, C, D zusammensetzen kann, ist nach Stärke und Richtung einerlei mit der Kraft, welche man aus den zu denselben Augenblicken gehörigen beschleunigenden oder verzögernden Kräften der Bewegungen F, G, H zusammensetzen kann.

§. 5. **Erklärung.** Die auf die beschriebene Art aus den Kräften der einzelnen geradlinigen Partialbewegungen zusammengesetzte Kraft heifst **die der krummlinigen Bewegung zugehörige Kraft** oder die **Curvenkraft.**

§. 6. **Lehrsatz.** Für jeden Punct einer krummlinigen Bewegung giebt es eine, aber auch nur *eine* Curvenkraft.

Beweis. Man projicire die Curve auf eine beliebige Ebene durch winkelrechte Linien, und die dadurch entstehende Partialbewegung auf zwei gerade Linien, die sich in derselben Ebene winkelrecht schneiden, so hat man die totale krummlinige Bewegung in drei auf einander winkelrechte geradlinige zerfällt. Für jede drei correspondirenden Puncte dieser geradlinigen Bewegungen giebt es drei beschleunigende oder verzögernde Kräfte, welche zusammengesetzt die dem correspondirenden Punct der Curve gehörige Curvenkraft geben; und diese Curvenkraft bleibt nach §. 4. immer dieselbe, wenn man die krummlinige Bewegung in beliebige andere geradlinige Bewegungen von beliebiger Anzahl zerfällt.

§. 7. **Lehrsatz.** Wenn man mehrere geradlinige oder krummlinige Bewegungen in Eine zusammensetzt, so ist die Curvenkraft für jeden Punct der zusammengesetzten Bewegung nach Stärke und Richtung einerlei mit derjenigen Kraft, die man aus den den correspondirenden Puncten der Partialbewegungen zugehörigen Curvenkräften zusammensetzen kann.

Beweis. Die Partialbewegungen mögen mit A, B, C, D, die zusammengesetzte mit E bezeichnet werden. Man zerfälle jede Partialbewegung in drei geradlinige auf einander winkelrechte, und zwar nach Richtungen, die für alle Partialbewegungen dieselben sind. Auf diese Art werde die Bewegung A in drei geradlinige, F, G, H, die Bewegung B in I, K, L, dagegen C in M, N, O, und D in P, Q, R zerfällt. Alsdann ist nach §. 1. die zusammengesetzte aus den Bewegungen F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R einerlei mit E. Folglich ist die zusammengesetzte aus den zu correspondirenden Puncten gehörigen beschleunigenden oder verzögernden Kräften der Bewegungen F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R einerlei mit der Curvenkraft, welche zu dem correspondirenden Puncte der Bewegung E gehört. Die zusammengesetzte aus den Kräften der Bewegungen F, G, H ist aber einerlei mit der Curvenkraft der Bewegung A, die zusammengesetzte aus den Kräften der Bewegungen I, K, L einerlei mit der Curvenkraft der Bewegung B, ... M, N, O - - - - - - - - - - - C, ... P, Q, R, - - - - - - - - - - - D. Folglich ist auch die zusammengesetzte aus den Curvenkräften der Bewegungen A, B, C, D einerlei mit der Curvenkraft der Bewegung E.

§. 8. **Erklärung.** Eine Bewegung in einer krummen Linie oder auf einer Fläche, wo außer den äußeren Kräften allemal noch eine auf

der Tangente (Berührungs-Ebene) winkelrechte Kraft von unbestimmter Stärke wirkt, so dafs der bewegte Punct gezwungen wird, auf einer vorgezeichneten Curve oder Fläche zu bleiben, heifst eine Bewegung auf vorgeschriebenem Wege, und die vorgezeichnete Curve oder Fläche die Bedingung der Bewegung. Ist keine solche Bedingung vorhanden, so sagt man, der Punct bewegt sich frei.

§. 9. Lehrsatz. Wenn auf zwei bewegte Puncte, die sich frei oder auf vorgeschriebenen Flächen oder Curven bewegen, Kräfte wirken, die nach feststehenden Puncten im Raume gerichtet sind, und deren Stärke von der Entfernung vom feststehenden Punct abhängt (worunter aber auch solche Kräfte sein können, die nach parallelen Richtungen wirken), und die Anfangs- und Endpuncte beider Bahnen fallen zusammen, so ist die Differenz der Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten gleich der Differenz der Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

Beweis. Man setze bei demjenigen von beiden Puncten, der etwa frei oder nur gezwungen ist sich auf einer vorgezeichneten Fläche zu bewegen, voraus, nicht nur die Fläche, sondern auch die Curve, in welcher er sich wirklich bewegt, sei vorgeschrieben, welches im Erfolg nichts ändert. Nun trägt der Widerstand der Curve nichts zur Änderung der Geschwindigkeit bei (es müfste denn sein, dafs die Curve irgendwo eine scharfe Ecke hätte, für welchen Fall aber überhaupt der zu beweisende Lehrsatz nicht gilt). Die beschleunigende oder verzögernde Kraft auf der Curve ist also nur das Resultat der nach der Tangente zerfällten äufseren Kräfte. Nach §. 3. verhält sich jede dieser äufseren Kräfte zu der ihr zugehörigen nach der Tangente zerfällten Kraft wie die wahre Geschwindigkeit in dem betreffenden Punct der Bahn zu der Geschwindigkeit, womit die Entfernung dieses Puncts von dem zugehörigen im Raume feststehenden Puncte zu- oder abnimmt; d. h. die äufsere Kraft zu der Geschwindigkeit, womit sie sich bestrebt die Geschwindigkeit des bewegten Puncts zu- oder abnehmen zu lassen, wie die Geschwindigkeit des bewegten Puncts zu der Geschwindigkeit, womit die Entfernung dieses Puncts vom feststehenden Punct zu- oder abnimmt. Folglich ist (Eucl. 6, 16.) das Rechteck aus der äufseren Kraft und der Geschwindigkeit, womit die Entfernung des bewegten Puncts vom feststehenden Punct zu- oder abnimmt, gleich dem Rechteck aus der Geschwindigkeit des bewegten Puncts und aus der Ge-

schwindigkeit, womit diese Geschwindigkeit in Folge der betreffenden äußeren Kraft zu- oder abnimmt. Addirt oder subtrahirt man Gleiches und Gleiches, so ergiebt sich: Die Summe der einzelnen Rechtecke, deren jedes aus einer äußeren Kraft und aus der Geschwindigkeit, womit die Entfernung des bewegten Puncts vom feststehenden Punct zu- oder abnimmt, gebildet ist (wobei aber, wenn der bewegte Punct sich dem einen feststehenden Punct nähert, und von dem andern sich entfernt, statt der Addition eine Subtraction vorzunehmen ist, welches auch für den Fall gilt, wo die eine äußere Kraft eine anziehende und die andere eine abstoßende ist), ist sowohl für den einen bewegten Punct als für den andern gleich dem Rechteck aus der Geschwindigkeit des bewegten Puncts und aus der Geschwindigkeit, womit diese Geschwindigkeit wirklich zu- oder abnimmt, d. h. (wie man leicht aus der Betrachtung der Fig. 5. erkennt) gleich der halben Geschwindigkeit, womit das Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Puncts zu- oder abnimmt. (Die vollständige Ausführung des Beweises kann hier auf ähnliche Art wie in §. 3. gegeben werden.) Man construire nun zweimal soviel Curven, als äußere Kräfte vorhanden sind, für jede äußere Kraft zwei, eine für den einen, die andere für den andern bewegten Punct; man construire sie aber so, daß die von einem unveränderlichen Anfangspunct an gerechneten Abscissen einer geraden Grundlinie die Entfernungen von dem im Raume feststehenden Punct, die aus den Endpuncten der Abscissen winkelrecht errichteten Ordinaten aber, die jenen Entfernungen zugehörigen anziehenden (oder abstoßenden) Kräfte ausdrücken (man richte aber die Ordinaten nach entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie auf, wenn die äußeren Kräfte theils anziehende, theils abstoßende Kräfte sind, und lasse für parallele Kräfte den Anfangspunct der Abscissenlinie unbestimmt); der geometrische Ort des Endpuncts der errichteten Ordinate ist alsdann die jedesmalige zu construirende Curve. Vergleicht man alsdann zwei zu einer und derselben äußeren Kraft gehörige Curven, und begrenzt man jede derselben so, daß die Anfangs-Abscisse gleich der Entfernung des gemeinschaftlichen Anfangspuncts beider Bahnen vom feststehenden Punct, und die End-Abscisse gleich der Entfernung des gemeinschaftlichen Endpuncts beider Bahnen von demselben feststehenden Puncte ist, so erhellt, daß die zwischen beiden Hülfscurven und ihren Abscissenlinien eingeschlossenen Flächenräume einander congruent sind (weil die Stärke der äußeren Kraft nach der Voraussetzung nur von der Ent-

fernung vom feststehenden Puncte abhängig, also für beide bewegte Puncte bei gleicher Entfernung gleich ist). Folglich ist auch die **Summe** dieser Flächenräume (wenn wir **alle** äußeren Kräfte in Betracht ziehen, dabei aber die auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenlinie liegenden Flächenräume, statt zu addiren, von einander subtrahiren) bei dem einen bewegten Punct so groß als bei dem andern. Denkt man sich nun die Ordinate in jeder Hülfscurve parallel mit sich selbst und so bewegt, daß sie die Abscissenlinie nach demselben Gesetz durchläuft, wie die Entfernung des bewegten Puncts vom feststehenden Punct sich ändert, so läßt sich an (Fig. 6.) auf ähnliche Art wie in §. 3. der Beweis führen, daß das Rechteck aus der äußeren Kraft und aus der Geschwindigkeit, womit die Entfernung des bewegten Puncts vom feststehenden sich ändert, gleich ist der Geschwindigkeit, womit der von der Ordinate durchlaufene Flächenraum sich ändert. Hieraus, verglichen mit dem bereits Bewiesenen, folgt, daß die Geschwindigkeit, womit die **Summe** der von der Ordinate in sämmtlichen Hülfscurven durchlaufenen Flächenräume sich ändert, sowohl für den einen als für den andern bewegten Punct gleich ist der Geschwindigkeit, womit das halbe Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Puncts sich ändert. Und hieraus folgt wieder, daß die Summe der ganzen, von der Ordinate durchlaufenen, auf die oben angezeigte Art begrenzten Flächenräume sowohl für den einen als für den andern bewegten Punct gleich ist der Größe, um welche das halbe Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Puncts von Anfang bis zu Ende der Bahn sich ändert. Da nun bewiesen worden, daß die Summe der Flächenräume für beide bewegte Puncte gleich ist, so nimmt auch das Quadrat der Geschwindigkeit von Anfang bis zu Ende der Bahn für beide bewegte Puncte um gleichviel zu oder ab.

§. 10. **Zusatz.** Laufen daher beide bewegte Puncte mit gleicher Geschwindigkeit aus, so langen sie auch im Endpunct mit gleicher Geschwindigkeit an.

§. 11. **Zusatz.** Wenn ein Körper auf einer vorgeschriebenen Bahn, durch die Schwere getrieben, herab- oder hinaufrollt, so erlangt er zuletzt dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er auf einer zwischen demselben Anfangs- und Endpunct enthaltenen **geraden Linie**, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit anhebend, herab- oder hinaufgerollt wäre.

§. 12. Lehrsatz. Wenn ein Körper auf einer schiefen geraden Linie, vom Zustand der Ruhe anhebend, herabrollt, so erlangt er zuletzt dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er an einer eben so hohen senkrechten Linie, vom Zustand der Ruhe anhebend, frei herabgefallen wäre.

Beweis. Wenn bei einer beschleunigten Bewegung die beschleunigende Kraft sich gleich bleibt, also die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit wächst, so läfst sich durch einfache geometrische Schlüsse, wie ich in meinen in diesem Jahre zu Zerbst bei Kummer herausgekommenen mathematischen Abhandlungen Seite 452.—58. gethan habe, zeigen, dafs die vom Zustand der Ruhe an beschriebenen Räume im doppelten Verhältnifs der darauf verwandten Zeiten stehen. Nun ist die Schwere eine unveränderliche Kraft, und sie bleibt es auch, wenn sie nach einer schiefen geraden Linie zerfällt wird; folglich stehen sowohl beim freien Fall, als beim Herabrollen auf einer schiefen geraden Linie die vom Zustand der Ruhe an zurückgelegten Räume im doppelten Verhältnifs der Zeiten. Wenn aber nach Ablauf irgend einer Zeit t die Beschleunigung aufhörte, so würde der Körper, wenn er mit der erlangten Geschwindigkeit fortführe sich zu bewegen, in der folgenden Zeit t einen Weg beschreiben, der durch die Wirkung der Beschleunigungskraft um eben so viel vermehrt wird, als der gesammte Weg in der ersten Zeit t beträgt. Folglich ist die Geschwindigkeit am Ende der ersten Zeit t so grofs, dafs ein mit dieser Geschwindigkeit behafteter gleichförmig bewegter Körper sich in der Zeit t um einen Weg fortbewegt, gleich dem Unterschiede der in der ersten Zeit t und in der zweiten Zeit t wirklich beschriebenen Wege, d. h. gleich dem Doppelten des in der ersten Zeit t beschriebenen Weges. Nun sei AB (Fig. 7.) die schiefe Linie, auf welcher der Körper herabrollt, und AC die eben so hohe senkrechte Linie; man ziehe BC, und fälle das Perpendikel CD auf AB. Alsdann verhält sich die Schwerkraft zu der beschleunigenden Kraft auf AB wie $AC:AD$ (indem die auf AB winkelrechte Kraft, worin die Schwerkraft zerfällt worden durch den Widerstand der vorgeschriebenen Bahn aufgehoben wird). Folglich werden AC und AD in gleicher Zeit beschrieben, und die in C erlangte Geschwindigkeit verhält sich zu der in D erlangten wie $AC:AD$. Die in D erlangte Geschwindigkeit aber verhält sich zu der in B erlangten (zufolge des Begriffs der gleichförmig beschleunigten Bewegung) wie die auf AD verwandte Zeit zu der auf AB verwandten, welche Zeiten, zufolge des aus-

einandergesetzten Gesetzes der Räume, im Verhältnifs $\frac{1}{2}(AD:AB)$, d. i. (Eucl. 6, 8. Zus.) im Verhältnifs $AD:AC$ stehen. Folglich ist die Geschwindigkeit in B gleich der in C.

§. 13. Zusatz. Hieraus ist leicht zu beweisen, dafs, wenn ein Körper, von der Schwere getrieben, auf einer schiefen geraden Linie, mit irgend einer Geschwindigkeit anhebend, herab- oder hinaufrollt, er zuletzt dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er an einer eben so hohen senkrechten Linie, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit anhebend, frei herab- oder hinaufgegangen wäre.

§. 14. Zusatz. Hieraus, verglichen mit §. 11., folgt, dafs ein Körper, der auf einer vorgeschriebenen Curve oder Fläche herab- oder hinaufrollt, zuletzt dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er an einer eben so hohen senkrechten Linie, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit anhebend, herab- oder hinaufgegangen wäre, und dafs überhaupt ein Körper, welcher aus einer horizontalen Ebene in eine andere herab- oder hinaufrollt, zuletzt einerlei Geschwindigkeit erlangt, auf welchem Wege er auch dahin gelangen mag, vorausgesetzt, dafs er allemal mit einerlei Anfangsgeschwindigkeit ausläuft. Die Geschwindigkeit ist aber bei jeder vorgeschriebenen Bahn desto gröfser, in einem je tieferen Puncte der Körper sich befindet, und es läfst sich aus dem Bisherigen durch leichte geometrische Schlüsse darthun, dafs die Differenz der Quadrate zweier Geschwindigkeiten in verschiedenen Horizontal-Ebenen gleich ist dem vierfachen Rechteck aus der Entfernung beider Horizontal-Ebenen von einander, und aus dem Wege, welchen ein vom Zustand der Ruhe an frei fallender Körper in der zum Maafs der Geschwindigkeiten dienenden unveränderlichen Zeit zurücklegt.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Herabrollens eines Körpers auf einer Cykloïde.

§. 15. Erklärung. Wenn über einer geraden Linie AC (Fig. 8.) ein Halbkreis AEC beschrieben ist, und man fällt aus einem beliebigen Puncte E der Peripherie ein Perpendikel EH auf AC, und verlängert es von E aus, bis EF gleich Bogen EC, so heifst der geometrische Ort des Punctes F (die Curve CFD) eine Cykloïde oder Radlinie.

§. 16. Zusatz. Zieht man $CM \# HF$, so liegt CM ganz aufserhalb der Cykloïde; es läfst sich aber zwischen CM und den Kreis (nach

Euc l.3, 16.) keine gerade Linie aus C ziehen; folglich läfst sich noch weniger zwischen CM und die Cykloïde eine gerade Linie aus C ziehen; daher ist CM (nach §. 1.) auch eine Tangente der Cykloïde. Rückt man den Punct E immer näher an A, so kann (wenn AD die Tangente des Punctes E in O schneidet) das Verhältnifs $AO+OE-HE:AH$, also um so mehr das Verhältnifs des Bogens $AE-HE:AH$, d. i. $AD-EF-HE:AH$, d. i. $AD-HF:AH$ kleiner werden als jedes gegebene Verhältnifs; folglich kann der Winkel, welchen die Sehne DF gegen die aus D mit AC parallel gezogene Linie macht, kleiner werden als jeder gegebene Winkel; oder, was dasselbe sagt: die letztere Linie ist gleichfalls eine Tangente der Cykloïde. Die zusammengehörigen Puncte A und D des Kreises und der Cykloïde haben daher die Eigenschaft, dafs die Tangente der Cykloïde mit der nach C gezogenen Sehne des Kreises parallel ist.

Aber diese Eigenschaft ist allgemeiner, wie der folgende Lehrsatz zeigt.

§. 17. **Lehrsatz.** Zusammengehörige Puncte E und F des Kreises und der Cykloïde sind allemal so beschaffen, dafs die Tangente des Puncts F der Cykloïde mit der Sehne EC parallel ist.

Beweis. Man ziehe $FN \# EC$, und aus einem beliebigen Punct m des Bogens CF die Linie $mI \# MC$, so dafs mI die Linie AC in I, EC in L, den Bogen EC in i, die Tangente EG des Kreises in e, endlich FN in K schneidet. Alsdann ist (Eucl. 3, 32.) $\angle GEC = EAC = R - ECA = ILC = ELe$, daher $iEL < ELi$, und folglich (Eucl. 1, 19.) Sehne $Ei > Li$, und um so mehr Bogen $Ei > Li$, d. i. $EF - im > Li$; folglich (Eucl. 1, 4ter Grunds.) $EF > Lm$. Da aber (Eucl. 1, 34.) $EF = LK$, so ist auch $LK > Lm$, und so haben wir bewiesen, dafs die ganze Linie FN aufserhalb der Cykloïde liegt. Aber das Verhältnifs Li : Sehne iE kann, wenn man m nahe genug bei F annimmt, dem Verhältnifs der Gleichheit näher kommen als jedes gegebene Verhältnifs. Dasselbe gilt nach §. 2. vom Verhältnifs der Sehne iE zum Bogen iE, also auch vom Verhältnifs Li : Bogen iE, d. i. $Li : EF - im$, d. i. $Li : LK - im$, d. i. $Li : Li + mK$. Folglich kann das Verhältnifs $mK : Li$ kleiner werden als jedes gegebene Verhältnifs. Aber das Verhältnifs $Li : LE$ nähert sich dem Verhältnifs $CP : CE$ (P ist der Durchschnittspunct der Linien CM und EG). Folglich kann auch das Verhältnifs $mK : LE$, d. i. $mK : KF$, kleiner werden als jedes gegebene Verhältnifs. Daher läfst sich zwischen Fm

und FK keine gerade Linie aus F ziehen; also ist (§. 1.) FN eine Tangente der Cykloïde.

§. 18. **Lehrsatz.** Der von C aus gerechnete Bogen CF der Cykloïde ist allemal doppelt so grofs als die zugehörige Sehne CE des Kreises, und die ganze Cykloïde CD doppelt so grofs als der Durchmesser CA.

Beweis. Man denke sich zwei Puncte in Bewegung, einen auf der Peripherie des Halbkreises, den andern auf der Cykloïde entlang, so dafs sie zu gleicher Zeit allemal sich in zusammengehörigen Puncten E und F befinden, also auch zu gleicher Zeit von C auslaufen, und zu gleicher Zeit in A und D anlangen. Man bezeichne die Geschwindigkeiten in E und F mit c und c'. Man zerfälle beide Geschwindigkeiten nach den Richtungen CA und CM, und nenne die nach CA zerfällten Geschwindigkeiten d und d'. Man zerfälle aber die Geschwindigkeit c auch nach zwei andern auf einander winkelrechten Richtungen, deren eine die Richtung CE ist. Dann verhält sich nach §. 3. (weil $\angle CEG = CAE$) die Geschwindigkeit, womit CE wächst, zu c wie AE zu AC, d. i. (Eucl. 6, 8.) wie $HE:EC$; nach §. 2. aber (wenn G der Durchschnittspunct der Linien EG und AC ist) $c:d = GE:GH =$ (Eucl. 6, 8.) $BE:EH$, endlich (weil die Tangente des Puncts $F \# EC$ ist, §. 17.) d', d. i. $d:c' = CH:CE =$ (Eucl. 6, 8. Zus.) $CE:CA$. Setzt man alle diese Proportionen zusammen, so findet man: Geschwindigkeit, womit CE wächst, zu c', d. i. zur Geschwindigkeit, womit Bogen CF wächst, wie $BE:CA$, d. h. die Geschwindigkeit, womit Bogen CF wächst, ist doppelt so grofs als die Geschwindigkeit, womit Sehne CE wächst. Da nun Bogen CF und Sehne CE beide von 0 anfangen, so ist klar, dafs, wo man auch die correspondirenden Puncte E und F annehmen mag, allemal $CF = 2CE$. Daraus ist auch klar, dafs $CD = 2CA$.

§. 19. **Lehrsatz.** Hat eine Cykloïde CD (Fig. 8.) eine solche Lage, dafs der Scheitel C den untersten Punct ausmacht, die Tangente CM aber horizontal liegt, und man läfst zwei Körper von C aus mit gleichen oder verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten c und C bis zu beliebigen, gleichen oder verschiedenen Weiten aufsteigen, so dafs der erste Körper den Bogen s, der andere den Bogen S beschreibt, so verhält sich der Verlust des Quadrats der Geschwindigkeit zum Quadrat einer dem durchlaufenen Bogen gleichen geraden Linie bei dem einen Körper wie bei dem andern.

Beweis. Nach Durchlaufung des Bogens s erlange der erste Körper die Geschwindigkeit c', der zweite Körper nach Durchlaufung des Bogens S die Geschwindigkeit C', so ist nach §. 14., wenn wir den Weg, den ein vom Zustand der Ruhe an frei fallender Körper in der zum Maaſs der Geschwindigkeiten dienenden Zeit beschreibt, g nennen, $\square c - \square c' =$ dem Rechteck aus $4g$ und aus der Höhe des Bogens s. Der Bogen s selbst ist aber nach §. 18. (verglichen mit Eucl. 6, 8. Zusatz) die doppelte mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser $2r$ des Kreises und der Höhe h des Bogens s. Folglich ist (Eucl. 6, 17.) $\square s = 8r \times h$. Also verhält sich $\square c - \square c' : \square s = 4g : 8r = g : 2r$, und eben so wird bewiesen, daſs $\square C - \square C' : \square S = g : 2r$. Folglich ist simpl. ex aeq. $\square c - \square c' : \square s = \square C - \square C' : \square S$.

§. 20. **Lehrsatz.** Wenn man, in der eben beschriebenen Lage der Cykloïde, zwei Körper vom untersten Punct an mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten aufsteigen läſst, so verhalten sich die ganzen durchlaufenen Bogen wie die Anfangsgeschwindigkeiten, und wenn man von beiden durchlaufenen Bogen vom untersten Punct an Stücke abschneidet, die sich wie die ganzen Bogen verhalten, so findet man zwei Puncte, in denen sich die Geschwindigkeiten wie die Anfangsgeschwindigkeiten verhalten.

Beweis. Die Bewegung erreicht ihr Ende, sobald die Geschwindigkeit in 0 übergegangen ist, d. h. sobald das $\square$ der Geschwindigkeit des ersten Körpers sich um $\square c$, das $\square$ der Geschwindigkeit des zweiten Körpers sich um $\square C$ vermindert hat. Folglich verhält sich, wenn s' und S' die ganzen durchlaufenen Bogen bedeuten, nach §. 19. $\square c : \square s' = \square C : \square S'$, also (Eucl. 6, 22.) $c : s' = C : S'$; verwechselt, $c : C = s' : S'$. Schneidet man von den Bogen s' und S' Stücke s und S ab, so daſs $s : S = c : C$, und nennt man die zu Ende der Bogen s und S erreichten Geschwindigkeiten c' und C', so ist nach §. 19.:

$$\begin{array}{llll} \square c - \square c' : & \square C - \square C' & = \square s : \square S = & \square c : \square C \\ \square c \quad : & \square C & = & \square c : \square C \\ \hline \square c' : & \square C' & = & \square c : \square C, \end{array}$$

also auch $c' : C' = c : C$.

§. 21. **Lehrsatz.** Läſst man auf die in der beschriebenen Lage liegende Cykloïde zwei Körper vom untersten Punct an mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten aufsteigen, so verhalten sich die vom untersten Punct an in gleichen Zeiten beschriebenen Bogen wie die Anfangsgeschwindigkeiten.

Beweis. Da beide Körper nach Durchlaufung zweier Bogen, die sich wie die Anfangsgeschwindigkeiten verhalten, zufolge §. 20. allemal Geschwindigkeiten erlangt haben, welche in demselben Verhältnifs stehen, so sind beide Bewegungen in nichts als in dem zum Grunde liegenden Maafsstab des Raums unterschieden, übrigens aber in Beziehung auf die Zeit vollkommen ähnlich. Es werden daher in correspondirenden Zeiten Bogen beschrieben, welche in demselben Verhältnifs stehen, d. h. sich wie die Anfangsgeschwindigkeiten verhalten.

§. 22. **Zusatz.** Hieraus, verglichen mit §. 20., wo bewiesen ist, dafs die ganzen durchlaufenen Bogen sich wie die Anfangsgeschwindigkeiten verhalten, folgt, dafs die ganzen durchlaufenen Bogen in gleichen Zeiten beschrieben werden. Die Dauer der Bewegung auf der Cykloïde, vom untersten Punct an bis dahin, wo der Körper zurückzukehren anfängt, ist also dieselbe, wie grofs auch der ganze durchlaufene Bogen sein mag.

§. 23. **Lehrsatz.** Aufser der Cykloïde hat keine andere Curve von einfacher Krümmung die Eigenschaft des Tautochronismus.

Beweis. Es sei *AB* (Fig. 9.) eine senkrechte Linie und t eine gegebene Zeit. Man setze an *AB* eine gebrochene Linie *BCDEF*, deren Stücke von beliebiger, aber gleicher Gröfse sind, so dafs die concaven Winkel *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF* u. s. w. sämmtlich nach oben gerichtet sind. Die Gröfse dieser Winkel aber bestimme man nach folgendem Gesetz: Man neige zuerst *BC* gegen *AB* so, dafs ein von der Schwere getriebener Körper in der Zeit t von C bis B herabrolle. (Zu dem Ende darf die Gröfse eines Stücks der gebrochenen Linie nicht gröfser gewählt werden als die freie Fallhöhe in der Zeit t. Die folgenden Determinationen, wodurch die Gröfse eines Stücks der gebrochenen Linie noch mehr eingeschränkt wird, ergeben sich nachher von selbst.) Alsdann neige man *CD* gegen *BC* so, dafs ein von der Schwere getriebener Körper in der Zeit t von D auf der gebrochenen Linie *DCB* entlang bis B herabrolle. Alsdann neige man *DE* gegen *DC* so, dafs ein von der Schwere getriebener Körper in der Zeit t von E auf der gebrochenen Linie *EDCB* entlang bis B herabrolle. So fahre man allmälig weiter fort. Dadurch kann man die gebrochene Linie so weit fortsetzen, bis die Erreichung der senkrechten Lage eines Stücks das weitere Fortsetzen unmöglich macht, oder bis selbst bei der senkrechten Lage des folgenden Stücks das Herabrollen auf der ganzen gebrochenen Linie längere Zeit als die Zeit t er-

fordert. Man vermindere nun die Gröfse eines jeden Stücks der gebrochenen Linie, und wiederhole dieselbe Construction von vorn, so wird man eine andere gebrochene Linie erhalten. Man denke sich nun die Gröfse eines jeden Stücks so weit abnehmend, dafs es kleiner werden kann als jede gegebene Linie, so wird sich die gebrochene Linie einer, aber auch nur Einer **krummen** Linie so sehr nähern, dafs die Abweichung geringer werden kann als jede gegebene Abweichung, ohne sie jedoch zu erreichen. Für eine andere Zeit t wird die Curve eine andere sein. Nun läfst sich aber beweisen, dafs bei der Bewegung auf einer **Cykloïde** die Schwingungszeit gröfser und kleiner werden kann als jede gegebene Zeit, wenn man nur den Halbmesser des erzeugenden Kreises grofs oder klein genug annimmt. Denn wird der Halbmesser des erzeugenden Kreises allmälig gröfser als jede gegebene Linie, so nähert sich ein gleicher vom untersten Punct an gerechneter Bogen, hinsichtlich seiner Lage, allmälig einer horizontalen geraden Linie; folglich wird die Zeit des Herabrollens gröfser als jede gegebene Zeit. Wird aber der Halbmesser des erzeugenden Kreises allmälig kleiner als jede gegebene Linie, so wird die Zeit des Herabrollens kleiner als jede gegebene Zeit. Hieraus folgt, dafs die Schwingungszeit auf einer Cykloïde, bei unveränderter Intensität der Schwerkraft, jeder gegebenen Zeit gleich sein kann, wenn man nur den Halbmesser des erzeugenden Kreises danach bestimmt. Folglich sind die vorher angezeigten, durch Näherung vermittelst gebrochener Linien herausgebrachten Curven lauter Cykloïden. Daher hat keine andere Curve als die Cykloïde die Eigenschaft des Tautochronismus.

5.

Note sur les valeurs de la fonction 0^{0^x}.

(Par M. le comte *Guillaume Libri* de Florence.)

Les questions de Physique-mathématique dont on s'occupe de préférence depuis quelques années, ont obligé les géomètres à considérer avec plus d'attention qu'on ne l'avoit fait jusqu'à présent, les formules qui expriment des fonctions discontinues. Ces formules contiennent toutes des intégrales définies et l'on ne connaissait aucune expression propre à représenter les fonctions discontinues, et qui ne renfermât que des quantités algébriques ou des fonctions logarithmiques et circulaires. Cependant il est possible d'exprimer des fonctions discontinues par des formules qui ne contiennent point d'intégrales définies, et nous avons montré ailleurs *) pour la première fois, que la fonction 0^{0^x} peut servir à cet objet. Mais nous n'avons fait alors qu'indiquer la propriété dont jouit cette fonction de pouvoir exprimer une condition de discontinuité quelconque. Maintenant nous allons reprendre cet objet et indiquer avec briéveté quelques unes des applications que l'on peut faire des propriétés singulières que possède cette fonction, à la théorie des nombres et à d'autres branches de l'analyse.

On sait que lorsque $x=0$, la fonction $x^n \log x$ est nulle si l'exposant n est positif, et infinie dans le cas contraire **). A présent si l'on discute les diverses valeurs de la fonction

$$e^{(\log y)\, e^{(x-n)\log y}}$$

lorsque $y=0$, où ce qui revient au même, de la fonction

$$z = e^{(\log 0)\, e^{(x-n)\log 0}}$$

*) Libri *Mémoires de mathématiques et de physique. Vol. I. page* 44.

**) Lacroix *Traité du calcul différentiel et intégral. Seconde édition. Tome I. page* 355.

on aura trois cas différens selon que l'on supposera $x > n$, $x = n$, $x < n$ (n étant une quantité réelle positive quelconque).

I. Soit $x > n$, alors le produit $(x-n)\log 0$ sera toujours égal à l'infini négatif, et l'on aura:

$$z = e^{(\log 0)e^{-\infty}} = e^{-\infty e^{-\infty}} = e^{0} = 1.$$

II. Soit $x = n$, l'on aura $(x-n)\log 0 = 0\log 0 = 0$, et partant:

$$z = e^{(\log 0)e^{0\log 0}} = e^{-\infty e^{0}} = e^{-\infty} = 0.$$

III. Enfin soit $x < n$, on aura $x - n = -p$ (p étant une quantité réelle positive) et on trouvera:

$$(x-n)\log 0 = -p\log 0 = \infty,$$

et partant:

$$z = e^{(\log 0)e^{\infty}} = e^{-\infty e^{\infty}} = e^{-\infty} = 0.$$

Il résulte de là que la fonction $e^{(\log 0)e^{(\log 0)(x-n)}}$ est égale à zéro, depuis $x = -\infty$ jusques et inclusivement à $x = n$, et que depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$ cette fonction est égale à l'unité. On peut observer que l'on a

$$e^{(\log 0)e^{(\log 0)(x-n)}} = 0^{0^{x-n}},$$

et comme l'expression $0^{0^{x-n}}$ est plus simple que l'autre, nous nous en servirons de préférence dans tout ce qui va suivre.

La fonction $0^{0^{x-n}}$ est d'un grand usage dans l'analyse mathématique. Ainsi p. ex. l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial q \,.\, \cos qx}{1+q^2}$, que l'on rencontre dans la théorie mathématique de la chaleur, et que l'on croyoit comprise parmi les transcendantes irréductibles, donne l'équation:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial q \,.\, \cos qx}{1+q^2} = e^{x}\, 0^{0^{-x}} + e^{-x}(1 - 0^{0^{-x}}),$$

d'où l'on déduit cette relation fort singulière:

$$\left(e^{x}\, 0^{0^{-x}} + e^{-x}(1-0^{0^{-x}})\right)^{n} = e^{nx}\, 0^{0^{-x}} + e^{-nx}(1-0^{0^{-x}}).$$

En général étant donnée une fonction discontinue quelconque, on pourra toujours la considérer comme la somme d'un nombre donné de fonctions qui resteront continues entre des limites données; et ces limites seront déterminées par les points où il y a solution de continuité dans la fonction discontinue proposée. Maintenant chacune de ces fonctions continues partielles, dont la fonction discontinue se compose, pourra être considérée comme le produit de deux facteurs dont l'un fournira la valeur de la fonction entre les limites déjà assignées, et l'autre exprimera la loi de discontinuité; pourvuque l'on ait toujours égard aux valeurs de ces fonctions aux limites, et qu'il s'agisse de fonctions discontinues d'une seule variable: si le nombre des variables était plus grand, on devroit augmenter le nombre des facteurs *). En exprimant la condition de discontinuité par des fonctions de la forme $0^{0^{x-a}}$, on verra que les fonctions discontinues ne forment pas une classe séparée de transcendentes, comme on l'avoit cru jusqu'à présent, et on trouvera l'expression finie d'un grand nombre d'intégrales définies qui passaient pour irréductibles.

La fonction $0^{0^{x-a}}$ est d'une grande utilité dans l'analyse indéterminée, et en général dans la théorie des fonctions entières. Ainsi la somme des diviseurs du nombre m qui se trouvent compris dans la série des nombres b, $b+1$, $b+2$, ... $b+a$, sera donnée par la formule:

$$(A.)\quad a+1 + \sum_{x=b}^{x=b+a+1} \left\{ \begin{array}{l} -m\,0^{0^{x-m}} - (m-1)\,0^{0^{x-m+1}\left(-0^{0^{x-1}}\right)} - (m-2)\,0^{0^{x-m+2}\left(-0^{0^{x-2}}\;0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right)} \dots \\ -(m-n)\,0^{0^{x-m+n}\left(-0^{0^{x-n}} - 0^{0^{x-n+1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right) - 0^{0^{x-n+2}}\left(-0^{0^{x-2}} - 0^{0^{x-2}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right) - \text{etc.}\right)} - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

dans laquelle la loi des termes est manifeste, puisque chaque terme se compose par une opération très simple de ceux qui le précèdent. Si l'on

---

*) Dans le *Bulletin des sciences mathématiques et physiques de Mr.* de Férussac, un géomètre distingué, Mr. Cournot, a paru revoquer en doute la possibilité d'exprimer les fonctions discontinues de la manière que je viens d'indiquer. La chose me semble si claire d'elle même, que je craindrais de la rendre moins évidente en voulant l'expliquer avec plus de détail. Mais du reste si ce que je dis ici, ne paraissait pas encore satisfaisant a Mr. Cournot, je le prierais de vouloir bien me désigner telle fonction discontinue qu'il voudra choisir, et je m'engage d'avance à la réduire à la forme que j'ai indiqué précédemment.

vouloit connoître, par exemple, la somme de tous les diviseurs du nombre 4, on auroit $b=1$, $a+b=m=a+1=4$; et en substituant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouveroit:

$$4+\sum_{x=1}^{x=5}\left\{\begin{array}{l}-4.0^{0^{x-4}}-3.0^{0^{x-3}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)-2.0^{0^{x-2}}\left(-0^{0^{x-2}}-0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right)\\ -0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-3}}-0^{0^{x-2}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)-0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-2}}-0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right)\right)\end{array}\right\}$$

$$=4-4.0-3.1(-1)-2\{(1(-1-1(-1))+1(-1-1(-1))\}$$
$$-1\{-1-1(-1)-1(-1-1(-1))+(-1(-1)-1(-1-1(-1)))+(-1)(-1(-1))\}$$
$$=4-0+3-2(-1+1-1+1)-(-1+1+1-1)-(1+1-1)+1$$
$$=4+3-1+1=7,$$

d'où il résulte que la somme des diviseurs du nombre 4 est égal à 7.

Si l'on vouloit exprimer le nombre des diviseurs de m qui sont compris dans la série des nombres b, $b+1$, $b+2$, ... $b+a$, on auroit la formule:

$$\sum_{x=b}^{x=b+a+1}\frac{1}{x}\left\{1+\left(-m.0^{0^{x-m}}-(m-1)0^{0^{x-m+1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)-(m-2)0^{0^{x-m+2}}\left(-0^{0^{x-2}}-0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right)-\text{etc.}\right)\right\},$$

qui se déduit aisément de l'expression (*A.*).

Maintenant soit pour abréger, $p=1.2.3\ldots x-1=[x-1]^{x-1}$; la formule

$$a+1+\sum_{x=b}^{x=b+a+1}\left\{\begin{array}{l}-(p+1)0^{0^{x-p-1}}-p.0^{0^{x-p}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)-(p-1)0^{0^{x-p+1}}\left(-0^{0^{x-2}}-0^{0^{x-1}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)\right)\ldots\\ \qquad\ldots-(p-n)0^{0^{x-p-n}}\left(-0^{0^{x-n-1}}-0^{0^{x-n}}\left(-0^{0^{x-1}}\right)-\text{etc.}\right)-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

exprimera la somme des nombres premiers compris dans la série des nombres b, $b+1$, $b+2$, ... $b+a$. On pourroit par une formule semblable à la précédente, exprimer aussi le nombre des nombres premiers compris dans la série des nombres b, $b+1$, $b+2$, ... $b+a$.

Si l'on exprime par $M_m(y)$ le nombre de fois que y peut résulter de la somme de m termes différens dans la série des nombres naturels 1, 2, 3, ... etc., et si l'on fait, pour abréger, $y-\frac{m(m+1)}{2}=u$, on aura *) l'équation:

---

*) *Memorie della società Italiana. Tom. I., 2da parte, pag.* 823.

$$(B.)\quad M_m(y) = \frac{\int_m(u)}{u} + \frac{\int_m(u-1)}{u}\int_m(1) + \frac{\int_m(u-2)}{u}\left(\frac{\int_m(2)+\int_m(1)\int_m(1)}{2}\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\int_m(u-r)}{u}\left(\frac{\int_m(r)+\int_m(r-1)\int_m(1)+\text{etc.}}{r}\right) + \text{etc.},$$

dont le second membre sera tout à fait connu à l'aide de la formule $(A.)$.

Soit donnée l'équation

$$X = x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots\ldots + a_r = 0,$$

dans laquelle on ait $a_1 = -y$, $a_2 = -y$, $a_3 = -y + y^2$, $a_4 = -y + y^2$, $a_5 = -y + 2.y^2$, ... et en général:

$$a_m = -yM_1(m) + y^2 M_1(m) - y^3 M_3(m) \ldots\ldots \pm y^z M_z(m) \mp \text{etc.};$$

en indiquant toujours par $M_z(m)$ le nombre de fois que le nombre m peut être formé par la somme de z termes différens entre eux, de la série des nombres naturels 1, 2, 3, ... m. Puisque la fonction $M_z(m)$ est déterminée par la formule $(B.)$, il en résulte que les coëfficiens a_1, a_2, a_3, ... a_m etc. seront tous connus généralement: on sait d'ailleurs *) que la somme des puissances r^{mes} des racines de l'équation $X=0$ (somme que nous exprimerons par S_r), est donnée par l'équation:

$$S_r = r(-a_r) + (r-1)(-a_{r-1})(-a_1) + (r-2)(-a_{r-2})(-a_2 - a_1(-a_1))\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (r-s)(-a_{r-s})(-a_s - a_{s-1}(-a_1) - \text{etc.}) + \text{etc.},$$

et si l'on fait dans cette équation les substitutions et les réductions convenables, on aura:

$$S_r = y^r + \frac{r}{s}y^s + \frac{r}{t}y^t + \frac{r}{v}y^v + \text{etc.},$$

et les nombres s, t, v, etc. seront les diviseurs de r inégaux entre eux. Maintenant si l'on veut trouver un nombre premier plus grand qu'un nombre donné p, on fera dans les formules précédentes

$$r = 1.2.3\ldots\ldots(p-1) + s;$$

et le plus petit des nombres s, t, v, etc. dans la valeur de S_r sera un nombre premier plus grand que p.

Les formules précédentes offrent quelques unes des nombreuses applications de la fonction $0^{0^{x-n}}$ à la théorie des nombres, et servent d'introduction à la théorie des transcendentes numériques que nous avons annoncée à la fin du premier volume des Mémoires de mathé-

*) Libri *mémoires de mathématiques et de physique. Vol. I. pag.* 10.

matiques et de physique. Ces formules peuvent être variées d'une infinité de manières, et renferment la résolution de quelques uns des problèmes que nous avons proposés à la fin du volume que nous venons de citer. Mais l'exposition des méthodes variées dont il faut s'aider pour éviter des longueurs excessives de calcul, ne sauraient trouver place ici, et d'ailleurs les géomètres exercés dans ce genre de recherches, saisiront aisément l'esprit de notre méthode. Dans cette note nous n'avons eu d'autre bût, que de montrer la possibilité de résoudre d'une manière directe et générale quelques questions d'analyse numérique, qui étaient regardées comme insolubles jusqu'à présent, et nous espérons de l'indulgence de nos lecteurs qu'ils voudront nous pardonner la manière succincte dont nous avons traité dans cet écrit, ce genre de questions.

6.

Fernere mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen.

(Fortsetzung von No. 28. Bd. V. Heft 4. S. 336.)

Schreiben des Herrn N. H. Abel an Herrn Legendre zu Paris.

(Mitgetheilt durch die Güte des Letzteren.)

Monsieur. La lettre que Vous avez bien voulu m'adresser en date du 25. Octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les momens les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle. Cela a porté au plus haut degré mon zêle pour mes études. Je les continuerai avec ardeur, mais je serai assez heureux pour faire quelques découvertes; je les attribuerai à Vous plutôt qu'à moi, car certainement je n'aurais rien fait sans avoir été guidé par Vos lumières.

J'accepte avec reconnoissance l'exemplaire de Votre traité des fonctions elliptiques que Vous voulez bien m'offrir.

Je m'empresserai de Vous donner les éclaircissements que Vous m'avez fait l'honneur de me demander. Lorsque je dis que le nombre de transformations différentes correspondantes à un nombre premier n est $6(n+1)$, j'entends par cela qu'on peut trouver $6(n+1)$ valeurs différentes pour le module c', en supposant l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\sqrt{((1-y^2)(1-c'^2 y^2))}} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(1-c^2 x^2))}}$$

et en mettant pour y une fonction rationnelle de la forme:

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n}.$$

C'est ce qui a en effet lieu; mais parmi les valeurs de c' il y en aura $n+1$ qui repondent à la forme suivante de y:

$$y = \frac{A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots + A_n x^n}{1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}}.$$

Ce sont ces $n+1$ modules dont parle M. Jacobi. Ils sont en effet racines d'une même équation du degré $n+1$. Ces $n+1$ valeurs étant supposées connues, il est facile d'avoir les $5(n+1)$ autres.

En effet, en désignant par c' un quelconque des modules, on au encore ceux-ci:

$$\frac{1}{c'}, \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2, \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,$$

auxquelles répondent les valeurs suivantes de y:

$$\frac{y'}{c'}, \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}}, \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}}, \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

$$\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

ce qui est facile de vérifier, en faisant la substitution dans l'équation differentielle.

Toutes les $6(n+1)$ valeurs du module c' sont différentes entre elles, excepté pour quelques valeurs particulières de c. Dans ce qui précède, n est supposé impair et plus grand que l'unité. Si n est égal à deux, c' aura encore $6(n+1)=18$ valeurs différentes. De ces 18 valeurs il y aura six, qui répondent à une valeur de y de la forme:

$$y = \frac{a+bx^2}{a'+b'x^2};$$

ils sont:

$$c' = \frac{1\pm c}{1\mp c}; \quad \frac{1\pm\sqrt{(1-c^2)}}{1\mp\sqrt{(1-c^2)}}; \quad \frac{c\pm\sqrt{(c^2-1)}}{c\mp\sqrt{(c^2-1)}}.$$

Il y en aura quatre qui répondent à une valeur de y de la forme $y=\frac{ax}{1+bx^2}$, savoir:

$$c' = \frac{2\sqrt{\pm c}}{1\pm c}, \quad \frac{1\pm c}{2\sqrt{\pm c}}, \quad y = (1\pm c)\frac{x}{1\pm cx^2} \text{ etc.}$$

Enfin pour les huit autres modules, y aura la forme:

$$a.\frac{A+Bx+Cx^2}{A-Bx+Cx^2}.$$

Ces huit modules seront

$$c' = \left(\frac{1\pm c\pm\sqrt{(2\sqrt{\pm c})}}{1\pm c\mp\sqrt{(2\sqrt{\pm c})}}\right)^2.$$

J'ai donné des développemens plus étendus sur cet objet dans un mémoire imprimé dans le cahier 4. tome II. du journal de Mr. **Crelle**. Peut-être vous en aurez déja connoissance.

Les fonctions elliptiques jouissent d'une certaine propriété bien remarquable et que je crois nouvelle. Savoir si l'on fait pour abréger:

$$\Delta x = \pm\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))},$$

$$\Pi(x) = \int\frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x}; \quad \varpi(x) = \int\frac{\partial x}{\Delta x}; \quad \varpi_0(x) = \int\frac{x^2\,\partial x}{\Delta x},$$

on aura toujours:

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots\ldots + \varpi(x_\mu) = C,$$
$$\varpi_0(x_1) + \varpi_0(x_2) + \ldots\ldots + \varpi_0(x_\mu) = C + p,$$

où p est une quantité algébrique, et

$$\Pi(x_1) + \Pi(x_2) + \ldots\ldots + \Pi(x_\mu) = C - \frac{a}{2\Delta a}.\log\left(\frac{fa + \varphi a.\Delta a}{fa - \varphi a.\Delta a}\right),$$

si l'on suppose les variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_\mu$ liées entre elles de la manière à satisfaire à une équation de la forme:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2.(1-x^2)(1-c^2x^2) = A.(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots\ldots(x^2-x_\mu^2);$$

fx et φx étant deux fonctions entières quelconques de l'indéterminée x, mais dont l'une est paire et l'autre impaire. Cette propriété me paroit d'autant plus remarquable qu'elle appartiendra à toute fonction transcendente $\Pi(x) = \int \frac{\partial x}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x}$, en supposant $(\Delta x)^2$ fonction entière quelconque de x^2. J'en ai donné la démonstration dans un petit mémoire inséré dans le cahier 4. du tome III. du journal de Mr. Crelle. Vous verrez que rien n'est plus simple que d'établir cette propriété générale. Elle m'a été fort utile dans mes recherches sur les fonctions elliptiques. En effet j'ai fondé sur elle toute la théorie de ces fonctions. Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui fera l'imprimer à ses frais. C'est pourquoi j'en ai fait un extrait, qui paroîtra dans le journal de Mr. Crelle. La première partie, dans laquelle j'ai considéré les fonctions elliptiques en général, doit paroître dans le cahier prochain. Il me seroit infiniment intéressant de savoir votre jugement sur ma méthode. Je me suis surtout attaché à donner de la généralité à mes recherches. Je ne sais si j'ai pu y réussir. La seconde partie qui suivra incessament la première, traitera principalement les fonctions avec des modules réels et moindres que l'unité. C'est surtout la fonction inverse de la première espèce qui est l'objet de mes recherches dans cette seconde partie. Cette fonction, dont j'ai démontré quelques unes des propriétés les plus simples dans mes recherches sur les fonctions elliptiques, est généralement d'un usage infini dans cette théorie. Elle facilite à un degré inespéré la theorie de la transformation. Un premier essai sur cet objet est contenu dans le mémoire inséré dans le No. 138.

du journal de Mr. Schumacher, mais actuellement je puis rendre cette théorie beaucoup plus simple.

La théorie des fonctions elliptiques m'a conduit à considérer deux nouvelles fonctions qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Si l'on fait

$$y = \lambda(x),$$

où

$$x = \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{((1-y^2)(1-c^2y^2))}},$$

$\lambda(x)$ sera la fonction inverse de la première espèce. J'ai trouvé qu'on peut développer cette fonction de la manière suivante:

$$\lambda(x) = \frac{x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \ldots}{1 + B_2x^4 + B_3x^6 + B_4x^8 + \ldots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes quelles que soient les valeurs de la variable x et du module c, réelles ou imaginaires. Les coëfficiens A_1, A_2, ... B_2, B_3, ... sont des fonctions entières de c^2. Si l'on fait

$$\varphi x = x + A_1x^3 + A_2x^5 + \ldots,$$
$$fx = 1 + B_2x^4 + B_3x^6 + \ldots,$$

où φx et fx sont les deux fonctions en question, elles auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(x+y).\varphi(x-y) = (\varphi x.fy)^2 - (\varphi y.fx)^2;$$
$$f(x+y).f(x-y) = (fx.fy)^2 - c^2(\varphi x.\varphi y)^2,$$

x et y étant des quantités quelconques. On pourra représenter ces fonctions de beaucoup de manières. Par exemple on a:

$$\varphi\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = A.e^{ax^2}.\sin x.\{1-2\cos 2x.q^2+q^4\}\{1-2\cos 2x.q^4+q^8\}\{1-2\cos 2x.q^6+q^{12}\}\ldots,$$

$$\varphi\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = A'.e^{a'x^2}(e^x-e^{-x})\{1-p^2.e^{2x}\}\{1-p^2.e^{-2x}\}\{1-p^4.e^{2x}\}\{1-p^4.e^{-2x}\}\ldots$$

$$f\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = B.e^{ax^2}\{1-2\cos 2x.q+q^2\}\{1-2\cos 2x.q^3+q^6\}\ldots,$$

$$f\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = B'.e^{a'x^2}\{1-p.e^{-2x}\}\{1-p.e^{2x}\}\{1-p^3.e^{-2x}\}\{1-p^3.e^{2x}\}\ldots,$$

où A, A', B, B', a, a' sont des quantités indépendantes de x; $q = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$ $p = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$; $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}$ enfin sont les fonctions complètes correspondantes aux modules $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et c.

Outre les fonctions elliptiques il y a deux autres branches de l'analyse, dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. A l'aide d'une méthode particulière j'ai trouvé beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une très grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégation:

„Étant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y\,\partial x$, $\int y_1\,\partial x$, $\int y_2\,\partial x$ etc., où $y, y_1, y_2, \ldots$ sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver toutes les relations possibles entre elles qui pourront s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques.

J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante:

$$A\int y\,\partial x + A_1\int y_1\,\partial x + A_2\int y_2\,\partial x + \ldots = u + B_1\log v_1 + B_2\log v_2 + \ldots,$$

où $A, A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ etc. sont des constantes, et $u, v_1, v_2, \ldots$, des fonctions **algébriques** de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problême; mais le plus important est le suivant:

„Si une intégrale $\int y\,\partial x$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut être exprimée d'une manière quelconque **explicitement ou implicitement** à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer:

$$\int y\,\partial x = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \ldots + A_m\log v_m,$$

où $A_1, A_2, \ldots$ sont des constantes, et $u, v_1, v_2, \ldots v_m$ des **fonctions rationnelles** de x et y."

P. ex. si $y = \frac{r}{\sqrt{R}}$, où r et R sont des fonctions rationnelles, on aura dans tous les cas où $\int\frac{r\,\partial x}{\sqrt{R}}$ est intégrable:

$$\int\frac{r\,\partial x}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A_1\log\left(\frac{p_1+q_1\sqrt{R}}{p_1-q_1\sqrt{R}}\right) + A_2\log\left(\frac{p_2+q_2\sqrt{R}}{p_2-q_2\sqrt{R}}\right) + \ldots,$$

où $p, p_1, p_2, \ldots q_1, q_2, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de x.

J'ai réduit de cette manière au plus petit nombre possible les fonctions transcendentes contenues dans l'expression:

$$\int\frac{r\,\partial x}{\sqrt[m]{R}},$$

où R est une fonction entière, et r une fonction rationnelle. J'ai decouvert de même des propriétés générales de ces fonctions. Savoir

Soient $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$ des fonctions entières quelconques d'une quantité indéterminée x, et regardons les coëfficiens des puissances de x dans ces fonctions comme des variables. Soient de même $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$ les racines de l'équation $\alpha^m = 1$, m étant premier ou non, et faisons:

$$s_k = p_0 + \alpha^k p_1 R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha^{(m-1)k} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Cela posé, en formant le produit:

$$s_0 . s_1 . s_2 \ldots s_{m-1} = V,$$

V sera comme vous voyez une fonction entière de x. Maintenant si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ les racines de l'équation $V = 0$, la fonction transcendante

$$\psi(x) = \int \frac{\partial x}{(x-a) R^{\frac{n}{m}}},$$

où $\frac{n}{m} < 1$, et a une quantité quelconque, aura la propriété suivante:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_\mu)$$
$$= C + \frac{1}{R'^{\frac{n}{m}}} \{\log(s'_0) + \alpha^n \log(s'_1) + \alpha^{2n} \log(s'_2) + \ldots + \alpha^{(m-1)n} \log(s'_{m-1})\},$$

C étant une constante, et

$$R', \; s'_0, \; s'_1, \; \ldots \; s'_{m-1}$$

les valeurs, que prendront respectivement les fonctions

$$R, \; s_0, \; s_1, \; \ldots \; s_{m-1},$$

en écrivant simplement a au lieu de x.

Rien n'est plus facile que la démonstration de ce théorème. Je le donnerai dans un de mes mémoires prochains dans le journal de Mr. Crelle. Un corollaire bien remarquable du théorême précédent est le suivant.

Si l'on fait $\varpi(x) = \int \frac{r \partial x}{R^{\frac{n}{m}}}$, où r est une fonction quelconque entière de x, dont le degré est moindre que $\frac{n}{m} . \nu - 1$, où ν est le degré de R, la fonction $\varpi(x)$ est telle que

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots + \varpi(x_\mu) = \text{const.}$$

Si par exemple $m = 2$, $n = 1$, $\nu = 4$, on aura $r = 1$, donc

$$\varpi(x) = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots + \varpi(x_\mu) = C.$$

C'est le cas des fonctions elliptiques de la première espèce.

Les belles applications que vous avez donné des fonctions elliptiques à l'intégration des formules différentielles, m'ont engagé à considérer un problème très général à cet égard, savoir:

Exprimer, s'il est possible, une intégrale de la forme $\int y\,\partial x$, où y est une fonction algébrique quelconque par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de la manière suivante:

$$\int y\,\partial x =$$

fonct. algéb. de $[x, \log v_1, \log v_2, \log v_3, \ldots\ \Pi_1(z_1), \Pi_2(z_2), \Pi_3(z_3), \ldots]$, $v_1, v_2, v_3, \ldots\ z_1, z_2, z_3, \ldots$ étant des fonctions algébriques de x les plus générales possibles, et Π_1, Π_2, Π_3 etc. désignant des fonctions elliptiques quelconques en nombre fini. J'ai fait le premier pas vers la solution de ce problème, en démontrant le théorème suivant:

„S'il est possible d'exprimer $\int y\,\partial x$ comme on vient de le dire, on pourra toujours donner à son expression la forme suivante:

$\int y\,\partial x = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \ldots$,

où $t, t_1, t_2, \ldots\ y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont toutes des fonctions rationnelles de x et z; mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais. Je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de la forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x. Cela est déjà très général. J'ai reconnu qu'on pourra mettre l'intégrale $\int \frac{r\,\partial x}{\sqrt{R}}$ sous cette forme:

$$\int \frac{r\,\partial x}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A' \log\left(\frac{p' + \sqrt{R}}{p' - \sqrt{R}}\right) + A'' \log\left(\frac{p'' + \sqrt{R}}{p'' - \sqrt{R}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \ldots$$

où toutes les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots\ p, p', p'', \ldots$ sont des fonctions rationnelles de la variable x."

J'ai démontré ce théorème dans le mémoire sur les fonctions elliptiques qui va être imprimé dans le journal de Mr. Crelle. Il m'a été extrêmement utile pour donner la généralité la plus grande possible à la théorie de la transformation. Savoir, j'ai non seulement comparé entre elles deux fonctions, mais un nombre quelconque de fonctions. Je suis conduit à ce résultat remarquable:

Si l'on a entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques des trois espèces avec les modules $c, c', c'', c''', \ldots$ une relation quelcon-

que de la forme:

$$A\Pi(x)+A'\Pi_1(x_1)+A''\Pi_2(x_2)+A'''\Pi_3(x_3)+\ldots\ldots+A^{(n)}\Pi_n(x_n)=v,$$

où x_1, x_2, x_3, ... x_n sont des variables liées entre elles par un nombre quelconque d'équations algébriques, et v une expression algébrique et logarithmique: les modules c', c'', c''', ... doivent être tels qu'on puisse satisfaire aux équations:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))}}=a'\frac{\partial x'}{\sqrt{((1-x'^2)(1-c'^2x'^2))}}=a''\frac{\partial x''}{\sqrt{((1-x''^2)(1-c''^2x''^2))}}=\text{etc.}$$

en mettant pour x', x'', x''', ... des fonctions rationnelles de x; a', a'', ... étant des constantes. Ce théorème reduit la théorie générale des fonctions elliptiques à celle de la transformation d'une fonction en une autre.

Ne soyez pas faché, Monsieur, que j'ai osé vous présenter encore une fois quelques unes de mes découvertes. Si vous me permetterez de vous écrire, je désirerois bien de vous communiquer un bon nombre d'autres, tant sur les fonctions elliptiques et les fonctions plus générales, que sur la théorie des équations algébriques. J'ai été assez heureux de trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnoître si une équation quelconque proposée est resoluble à l'aide de radicaux ou non. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est impossible de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

Agréez etc.

Christiania, le 25. Novembre 1828.

7.

Bemerkungen über die im 3. Hefte des 5. Bandes dieses Journals unter Nr. 22. enthaltene Auflösung der Aufgabe Nr. 6. Band 3. Heft 1. Seite 99.

(Von einem Abonnenten des Journals.)

Die Gleichung, welche S. 301. aufgestellt ist, nämlich:

$$h\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right).\frac{\partial\psi}{\partial P}\partial\psi - h\partial\left(\frac{\varphi^2\,\partial\psi}{\partial P}\right) + \varphi\,\partial s = 0$$

giebt, wenn man für $\frac{\partial P}{\partial\psi}$ seinen Werth $\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}$ setzt:

$$h\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}} - h\,\frac{\partial\,\frac{\varphi^2}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}}}{\partial\psi} + \varphi\frac{\partial s}{\partial\psi} = 0.$$

Da nun

$$\frac{\partial\,\frac{\varphi^2}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}}}{\partial\psi} = \frac{2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}} - \frac{\varphi^3\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}+\varphi^2\frac{\partial s}{\partial\psi}\,\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}}{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi},$$

also

$$\frac{\partial\,\frac{\varphi^2}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}}}{\partial\psi} = \frac{2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)+2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}} - \frac{\varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)+\varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}+\varphi^2\frac{\partial s}{\partial\psi}\,\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}}{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

so giebt die zuletzt genannte Gleichung:

$$h\left\{\frac{\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)-2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)-2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}}{\sqrt{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)}} + \frac{\varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)+\varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}+\varphi^2\frac{\partial s}{\partial\psi}\,\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}}{\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} + \varphi\frac{\partial s}{\partial\psi} = 0$$

oder, wenn man die Nenner wegschafft:

$$h\left\{\varphi^2\frac{\partial s}{\partial\psi}\,\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2} + \varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi} + \varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) - \left[2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi} + \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\right]\left[\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right]\right\}$$

$$+\,\varphi\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial s}{\partial\psi} =$$

oder

$$h\left\{\varphi^2\frac{\partial s}{\partial\psi}\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s^3}{\partial\psi^3}-\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}-\varphi^3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}\right\}+\varphi\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial s}{\partial\psi}=0,$$

oder endlich:

$$\left\{h\left[\varphi\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}-\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right]+\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}.\varphi\frac{\partial s}{\partial\psi}=0.$$

Diese Gleichung besteht, wie man sieht, aus drei Factoren; aber die Factoren $\varphi=0$ und $\frac{\partial s}{\partial\psi}=0$ sind es keinesweges, welche die vollständige Lösung der Aufgabe geben; dies geschieht vielmehr nur durch die Differential-Gleichung 2ter Ordnung:

$$(A.)\quad h\left[\varphi\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}-\varphi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\right]+\left(\varphi^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}=0.$$

Wenn die gegebene Fläche eine Ebene ist, so hat man $\varphi=s$, daher $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)=1$ und $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)=0$; dann verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$h\left[s\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-2\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}-s^2\right]+\left(s^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}=0 \text{ oder in } h=-\frac{\left(s^2+\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{s\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-2\frac{\partial s^2}{\partial\psi^2}-s^2},$$

deren zweiter Theil nichts Anderes ist, als der Ausdruck für den Krümmungsradius in Polar-Coordinaten (s und ψ). Die Gleichung giebt also, wie es auch sein mufs, die Curve deren Krümmungsradius constant ($=h$) ist, d. i. den Kreis.

Wenn aber die gegebene Fläche weder eben, noch abwickelbar ist, so ist im Allgemeinen $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)$ nicht gleich Null; und die Gleichung (*A.*) wird durch $\frac{\partial s}{\partial\psi}=0$ nicht befriedigt; daher ist $\frac{\partial s}{\partial\psi}=0$ kein particulaires erstes Integral derselben, und folglich ist auch $s=$ Const. kein zweites Integral. Daher

kann man im Allgemeinen nicht behaupten, dafs die in Rede stehende Curve des kürzesten Perimeters die Eigenschaft habe, dafs alle Puncte ihres Umrings gleich weit von einem Puncte der Fläche entfernt sind.

So weit die Berichtigung. — Was die oben erwähnten Resultate betrifft, so fand ich

1stens, wie es S. 299. angegeben ist, $h\cos i=R$;

2tens, wenn man in irgend einem Puncte der Curve eine Normale zu der krummen Fläche errichtet und durch diese Normale und die Tangente der Curve in demselben Puncte eine Ebene legt, so schneidet diese Ebene die Fläche in einer Curve, deren Krümmungsradius ϱ, multiplicirt

mit dem $\sin i$, nach dem bekannten Satze, gleich R sein muſs. Eliminirt man nun zwischen $h \cos i = R$ und $\varrho \sin i = R$ das i, so erhält man:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{\varrho^2},$$

d. i. die Differenz der inversen Quadrate der Krümmungsradien der Fläche, von denen der eine in der Osculations-Ebene, der andere aber in derjenigen Tangential-Ebene der Curve liegt, die durch die Normale der Fläche geht, ist eine constante Gröſse.

3tens, wenn man eine abwickelbare Fläche beschreibt, welche eine andere Fläche in einer bestimmten Linie berührt, sodann jene umschriebene Fläche in eine Ebene ausbreitet, so bildet die Linie, in welcher die Berührung statt fand, eine gewisse ebene Curve. Nennt man die rechtwinkligen Coordinaten im Raume x, y, z, die in der (abgewickelten) Ebene u, t, so hat man (auſser den Gleichungen die zwischen x, y, z als Coordinaten der Fläche und Curve im Raume Statt finden) zwischen den Gröſsen x, y, z, t und u, unter andern die Gleichung:

$$(B.) \quad \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial s} + q \partial \frac{\partial z}{\partial s}}{\partial x \sqrt{(1+p^2+q^2)}} = - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{\left(1+\frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist aber für die Curve des kürzesten Perimeters $\dfrac{\partial \frac{\partial y}{\partial s} + q \partial \frac{\partial z}{\partial s}}{\partial x \sqrt{(1+p^2+q^2)}} = \dfrac{1}{h}$, daher

$$h = - \frac{\left(1+\frac{\partial u^2}{\partial t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}},$$

d. i. der Krümmungsradius der ebenen Curve ist constant, und folglich diese Curve ein Kreis. Also.

„Wenn man die Curve des kürzesten Perimeters von der gegebenen krummen Fläche vermittelst einer developpabeln Fläche abwickelt, so bildet sie einen Kreis."

Dies nun ist die characteristische Eigenschaft der Curven des kürzesten Perimeters. — Bevorworten muſs ich noch den Fall, daſs Jemand die Formel (*B.*) in einem Lehrbuche nachschlüge, sie da nur für developpabele Flächen hergeleitet fände, und daraus den Schluſs zöge, daſs sie nicht auf alle krumme Flächen, wie hier geschehen, angewendet werden könne. Sie gilt aber in der That für alle Flächen. In Lacroix *Traité du calc. diff. et int. sec. éd. T. I. p.* 648. findet man diese Formel für developpabele Flächen, und *p.* 649. die Bemerkung, daſs sie allgemein gültig sei.

8.

Auflösung zweier Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Beweis des von Herrn Steiner im II. Bd. p. 98. dieses Journals gegebenen 12ten Lehrsatzes.

1. Die drei Seiten l, l', l'' eines sphärischen Dreiecks sind gegeben; man verlangt die Gröfse des dem Dreiecke umschriebenen Kreises.

Man errichte aus den Mitten der Seiten l' und l'' senkrechte Bogen, die sich in dem Puncte P schneiden, so ist P der Pol des gesuchten Kreises. Der von dem Puncte P bis an die der Seite l gegenüberliegende Winkelspitze beschriebene Bogen sei $=\varrho$; der Winkel zwischen ihm und der Seite l' sei φ' und zwischen der Seite l'', φ''. Setzt man den der Seite l gegenüberliegenden Winkel des gegebenen Dreiecks $=a$, so ist: $a=\varphi'+\varphi''$. In den beiden kleinen rechtwinkligen Dreiecken hat man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}l' = \cos\varphi' \operatorname{tang}\varrho,$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}l'' = \cos\varphi'' \operatorname{tang}\varrho.$$

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen, und berücksichtigt die bekannten trigonometrischen Relationen, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(l'+l'')}{\cos\frac{1}{2}l'\cos\frac{1}{2}l''} = 2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{\varphi''-\varphi'}{2}\operatorname{tang}\varrho,$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(l'-l'')}{\cos\frac{1}{2}l'\cos\frac{1}{2}l''} = 2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{\varphi''-\varphi'}{2}\operatorname{tang}\varrho.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden ist:

$$1.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}(l'+l'')^2+\cos\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}(l'-l'')^2}{4\sin\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}l'^2\cos\frac{1}{2}l''^2} = \operatorname{tang}\varrho^2.$$

Bekanntlich ist:

$$\cos l = \cos a\sin l'\sin l'' + \cos l'\cos l'' = \cos(l'-l'')\cos\tfrac{1}{2}a^2 + \cos(l'+l'')\sin\tfrac{1}{2}a^2.$$

Subtrahirt man diese von der identischen Gleichung:

$$1 = \cos\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2,$$

so folgt:

$$2.\quad \sin\tfrac{1}{2}l^2 = \sin\tfrac{1}{2}(l'-l'')^2\cos\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}(l'+l'')^2\sin\tfrac{1}{2}a^2,$$

ferner, da

$$\sin x^2 - \sin y^2 = \sin(x+y)\sin(x-y):$$

$$3.\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l-l'+l''}{2}\right) = \sin\tfrac{1}{2}a^2\sin l'\sin l'', \\ \sin\left(\frac{l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{-l+l'+l''}{2}\right) = \cos\tfrac{1}{2}a^2\sin l'\sin l''. \end{cases}$$

Subtstituirt man (2. und 3.) in (1.), so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\varrho^2 = \frac{4\sin\frac{1}{2}l^2\sin\frac{1}{2}l'^2\sin\frac{1}{2}l''^2}{\sin\left(\frac{l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{-l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l-l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)},$$

und hieraus:

$$\begin{cases} \cos\varrho^2 = \\ \dfrac{\sin\left(\frac{l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{-l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l-l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)}{\left(\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(-\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(\sin\frac{l}{2}-\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}-\sin\frac{l''}{2}\right)} \\ \sin\varrho^2 = \\ \dfrac{4\sin\frac{1}{2}l^2\sin\frac{1}{2}l'^2\sin\frac{1}{2}l''^2}{\left(\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(-\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(\sin\frac{l}{2}-\sin\frac{l'}{2}+\sin\frac{l''}{2}\right)\left(\sin\frac{l}{2}+\sin\frac{l'}{2}-\sin\frac{l''}{2}\right)} \end{cases}$$

2. Es seien die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks, a, a', a'', man sucht die Gröfse des in dem Dreiecke beschriebenen Kreises.

Man halbire die beiden Winkel a und a' durch Bogen, die sich in dem Puncte Q schneiden. Der von Q auf die dem Winkel a'' gegenüberliegende Seite l'' gefällte senkrechte Bogen sei σ, dessen Endpunct die Seite in die beiden Theile θ und θ' theilt. Es ist unter diesen Voraussetzungen:

$$\cot\tfrac{1}{2}a = \sin\theta\cot\sigma,$$
$$\cot\tfrac{1}{2}a' = \sin\theta'\cot\sigma,$$

woraus man durch Addition und Subtraction erhält:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}a'} = 2\sin\tfrac{1}{2}l''\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cot\sigma,$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-a)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}a'} = 2\cos\tfrac{1}{2}l''\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cot\sigma.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen ist:

$$5.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}l''^2\sin\frac{1}{2}(a'+a)^2+\sin\frac{1}{2}l''^2\sin\frac{1}{2}(a'-a)^2}{4\sin\frac{1}{2}l''^2\cos\frac{1}{2}l''^2\sin\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}a'^2} = \cot\sigma^2$$

Ferner hat man:

$$\cos a'' = \cos l''\sin a\sin a' - \cos a\cos a'$$
$$= -\cos\tfrac{1}{2}l''^2\cos(a'+a) - \sin\tfrac{1}{2}l''^2\cos(a'-a),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a''^2 = \cos\tfrac{1}{2}l''^2\sin\tfrac{1}{2}(a'+a)^2 + \sin\tfrac{1}{2}l''^2\sin\tfrac{1}{2}(a'-a)^2.$$

und da

$$\cos x^2 - \sin y^2 = \cos(x+y)\cos(x-y):$$

$$6.\quad \begin{cases} \cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a-a'+a''}{2}\right) = \cos\tfrac{1}{2}l''^2 \sin a \sin a', \\ \cos\left(\frac{a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a+a'-a''}{2}\right) = -\sin\tfrac{1}{2}l''^2 \sin a \sin a'. \end{cases}$$

Nach Substitution der Gleichungen (5. und 6.) in die Gleichung (4.) erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} \cot\sigma^2 = \dfrac{4\cos\frac{1}{2}a^2 \cos\frac{1}{2}a'^2 \cos\frac{1}{2}a''^2}{-\cos\left(\frac{a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a-a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a+a'-a''}{2}\right)}, \\ \text{und hierdurch:} \\ \sin\sigma^2 = \\ \dfrac{-\cos\left(\frac{a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a-a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a+a'-a''}{2}\right)}{\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(-\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}-\cos\frac{a''}{2}\right)}, \\ \cos\sigma^2 = \\ \dfrac{4\cos\frac{1}{2}a^2 \cos\frac{1}{2}a'^2 \cos\frac{1}{2}a''^2}{\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(-\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{a'}{2}+\cos\frac{a''}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{a'}{2}-\cos\frac{a''}{2}\right)}. \end{cases}$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs ϱ und σ die sphärischen Radien der gesuchten kleinen, auf der Kugel beschriebenen Kreise sind.

3. Die Gleichungen für die Gröfse des umschriebenen Kreises läfst sich durch die Winkel des Dreiecks folgendermafsen ausdrücken. Durch die Gleichung (6.) hat man:

$$\cos\tfrac{1}{2}l''^2 = \frac{\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a-a'+a''}{2}\right)}{\sin a \sin a'},$$

folglich auch:

$$\cos\tfrac{1}{2}l'^2 = \frac{\cos\left(\frac{a+a'-a''}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)}{\sin a'' \sin a}$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}l^2 = \frac{-\cos\left(\frac{a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)}{\sin a' \sin a''}.$$

Verbindet man diese letztere mit der Gleichung (2.) und substituirt sie mit den beiden ersten zugleich in (1.), so folgt:

$$8.\quad \operatorname{tang}\varrho^2 = \frac{-\cos\left(\frac{a+a'+a''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{-a+a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a-a'+a''}{2}\right)\cos\left(\frac{a+a'-a''}{2}\right)}.$$

4. Eben so findet man für den in dem Dreiecke beschriebenen Kreis, wenn die Seiten gegeben sind, mittelst der Gleichungen (3.):

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l-l'+l''}{2}\right)}{\sin l'\sin l''},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a'^2 = \frac{\sin\left(\frac{-l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)}{\sin l''\sin l},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a''^2 = \frac{\sin\left(\frac{l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)}{\sin l\sin l'},$$

und endlich aus (5.):

$$9.\qquad \cot\sigma^2 = \frac{\sin\left(\frac{l+l'+l''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{-l+l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l-l'+l''}{2}\right)\sin\left(\frac{l+l'-l''}{2}\right)}.$$

5. Setzt man die Spitze eines dreiseitigen Körper-Ecks in den Mittelpunct einer Kugel, so bildet der Durchschnitt der drei, das Eck bildenden Ebenen, mit der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten den Winkeln der Kanten, und dessen Winkel den Flächenwinkeln des Körper-Ecks gleich sind. Eine von der Spitze desselben durch den Pol des in dem sphärischen Dreiecke beschriebenen Kreises gezogene Linie ist der geometrische Ort des Mittelpuncts aller Kugeln, die einzeln die drei Ebenen berühren; und zwar ist der Halbmesser R_1 einer beliebigen derselben, wenn die Entfernung des Mittelpuncts von der Spitze des Körper-Ecks $= g_1$ ist, $R_1 = g_1 \sin\sigma$. Es sei in Beziehung auf eine zweite dieser Kugeln $R_2 = g_2 \sin\sigma$, so ist, wenn sie die erstere berührt:

$$g_2 - g_1 = \frac{R_2 - R_1}{\sin\sigma} = R_2 + R_1,$$

folglich:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1+\sin\sigma}{1-\sin\sigma} = \operatorname{tang}(45+\tfrac{1}{2}\sigma)^2 = \left(\frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\right)^2 = (\operatorname{tang}\sigma + \sqrt{(1+\operatorname{tang}\sigma^2)})^2,$$

welches, wenn die Gleichung (7.) oder (9.) substituirt wird, die von Hrn. **Steiner** gegebene Formel ist.

Auflösung der im 2ten Bande dieses Journals p. 96. von Hrn. Steiner gegebenen 4ten Aufgabe.

Die von Hrn. **Steiner** gegebene Aufgabe ist mit der folgenden identisch.

„In dem Umfange eines Kegelschnitts liegen die Mittelpuncte einer Reihe Kreise, wovon jeder die auf beiden Seiten liegenden, und einen aus dem Brennpuncte des Kegelschnitts als Mittelpunct beschriebenen Kreis berührt; die Relation zwischen den Dimensionen des Kegelschnitts und dem letztgenannten Kreise zu finden."

1. Es sei der halbe Parameter des Kegelschnitts p, die Excentricität e, der Halbmesser des aus dem Brennpuncte beschriebenen Kreises ϱ, die aus dem Brennpuncte an die Mittelpuncte zweier aufeinander folgenden der andern Kreise gezogenen Linien r und r', welche mit der Absidenlinie die Winkel φ und φ' bilden, so hat man:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}; \quad r' = \frac{p}{1+e\cos\varphi'},$$

und die Halbmesser der beiden Kreise:

$$\frac{p}{1+e\cos\varphi} - \varrho, \quad \frac{p}{1+e\cos\varphi'} - \varrho.$$

Die Summe dieser beiden Halbmesser bilden die Seite eines ebenen Dreiecks, in welchem $\varphi'-\varphi$ der gegenüberstehende Winkel, und r und r' die beiden übrigen Seiten sind. Es ist also:

$$\left\{\frac{p}{1+e\cos\varphi} + \frac{p}{1+e\cos\varphi'} - 2\varrho\right\}^2$$

$$= \frac{pp}{(1+e\cos\varphi)^2} + \frac{pp}{(1+e\cos\varphi')^2} - \frac{2pp\cos(\varphi'-\varphi)}{(1+e\cos\varphi)(1+e\cos\varphi')},$$

und nach Reduction:

$$1. \quad 0 = (pp - 4p\varrho + 2\varrho\varrho) + 2e\varrho(\varrho - p)(\cos\varphi' + \cos\varphi)$$
$$+ (pp + 2ee\varrho\varrho)\cos\varphi\cos\varphi' + pp\sin\varphi\sin\varphi'.$$

Um dieser Gleichung eine einfachere Gestalt zu geben, bemerke ich, daſs man folgende Substitutionen machen könne:

$$2. \begin{cases} t\cos\varphi = \cos\theta - \cos\alpha, & t'\cos\varphi' = \cos\theta' - \cos\alpha, \\ t\sin\varphi = \sin\alpha\sin\theta, & t'\sin\varphi' = \sin\alpha\sin\theta', \\ t = 1 - \cos\alpha\cos\theta, & t' = 1 - \cos\alpha\cos\theta. \end{cases}$$

Multiplicirt man also die Gleichung (1.) mit tt', und substituirt dann diese Werthe, so ergiebt sich:

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} &0 = pp - 4p\varrho + 2\varrho\varrho - 4e\varrho(\varrho - p)\cos\alpha + (pp + 2ee\varrho\varrho)\cos\alpha^2 \\ &+ \{-(pp - 4p\varrho + 2\varrho\varrho)\cos\alpha + 2e\varrho(\varrho - p)(1 + \cos\alpha^2) - (pp + 2ee\varrho\varrho)\cos\alpha\}(\cos\theta' + \cos\theta) \\ &+ \{(pp - 4p\varrho + 2\varrho\varrho)\cos\alpha^2 - 4e\varrho(\varrho - p)\cos\alpha + (pp + 2ee\varrho\varrho)\}\cos\theta'\cos\theta \\ &+ pp\sin\alpha^2\sin\theta'\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

Setzt man also den Coëfficienten von $\cos\theta' + \cos\theta = 0$, so wird

$$\cos\alpha = \frac{\varrho - p}{e\varrho} \text{ oder } = \frac{e\varrho}{\varrho - p}.$$

2. D. erste dieser Werthe von $\cos\alpha$ giebt für die Gleichung (3.):

$$4.\quad 1 = \frac{2ee\varrho\varrho - 2\varrho\varrho + 4p\varrho - pp}{pp}\cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta.$$

Der zweite Werth giebt:

$$5.\quad \cos(\theta' - \theta) = \frac{2ee\varrho\varrho - 2\varrho\varrho + 4p\varrho - pp}{pp}.$$

Wenn man die zweite Substitution anwendet, so ist $\varrho = \dfrac{p}{1 - \dfrac{e}{\cos\alpha}}$; und da $\cos\alpha$ zwischen den Grenzen $+1$ und -1 enthalten ist, so mufs ϱ zwischen θ und $\frac{p}{1+e}$ oder zwischen $\frac{p}{1-e}$ und ∞ liegen. (Es versteht sich von selbst, dafs ϱ immer positiv ist.) Sie umfafst also alle Fälle, wo der aus dem Brennpuncte beschriebene Kreis den Kegelschnitt nicht schneidet. Dieses ist für unsern Fall hinreichend, da die Reihe der Kugeln nicht über den Schneidungspunct hinaus verlängert werden kann.

Ist nun $\sin\alpha$ nicht $= 0$, welches nur für den Fall einer Berührung mit dem Kegelschnitte Statt findet, so sind φ und θ zu gleicher Zeit 0, π, 2π etc., und wenn θ dem Werthe φ entspricht, so entspricht $\pi + \theta$ dem Werthe $\pi + \varphi$, woraus die von Herrn Steiner durch so scharfsinnige geometrische Betrachtungen gefundene Gleichzeitigkeit der Commensurabilität für alle belichige Anfangspuncte der Reihe folgt. Soll also nach u Umläufen der $(n+1)$te Kreis mit dem ersten zusammenfallen, so mufs

$$6.\quad \cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) = \frac{2ee\varrho\varrho - 2\varrho\varrho + 4p\varrho - pp}{pp}$$

sein; mithin:

$$7.\quad \frac{\varrho}{p} = \frac{1}{1 - ee}\left[1 \pm \sqrt{\left(\sin\left(\frac{u\pi}{n}\right)^2 + ee\cos\left(\frac{u\pi}{n}\right)^2\right)}\right].$$

$\frac{\varrho}{p}$ kann also bei einer Ellipse, wo $e < 1$, nicht gröfser als $\frac{2}{1-ee}$ werden, welche Grenze für ϱ der grofsen Axe gleich ist.

Ich füge einige specielle Fälle hinzu: Ist der Kegelschnitt eine Parabel, oder $e = 1$, so ist

$$8. \quad \cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) = \frac{4\varrho}{p} - 1.$$

Ist a die senkrechte Entfernung des Mittelpuncts des Hauptkreises von einer geraden Linie, so hat man für diese:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi};$$

betrachtet man also dieselbe als einen Kegelschnitt, so wird $\frac{p}{e} = a$, $\frac{1}{e} = 0$, folglich:

$$9. \quad \cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) = \frac{2\varrho\varrho}{aa} - 1.$$

Dieser Fall, daſs eine Reihe Kreise, deren Mittelpuncte auf einer geraden Linie liegen, sich gegenseitig und alle einen andern Kreis berühren können, wird nur dadurch möglich, daſs der eine Kreis sie alle einschlieſst, und so den Übergang von der einen auf die andere Seite bildet *).

*) Erst nachdem die gegenwärtige Abhandlung gedruckt ist, bemerke ich, daſs die in derselben enthaltenen Ausdrücke der Tangenten der Halbmesser-Winkel der in und um ein sphärisches Dreieck beschriebenen Kreise sich auch in meinem Lehrbuche der Geometrie, Berlin, bei Reimer, 1826—27, Seite 916. §. 747. finden. Da dieses Buch, obgleich fast durchweg eigenthümlich, bis jetzt noch wenig allgemein bekannt geworden ist, so sind die benannten Formeln gleichwohl noch als neu zu betrachten, und es ist gut, daſs sie hier mitgetheilt wurden. Ich bitte indessen den verehrten Herrn Verfasser hierdurch um Verzeihung, daſs ich ihn darauf aufmerksam zu machen übersehen habe, und zwar um so mehr, da ich so eben erinnert worden war, welche sorgfältige Rücksicht Er auf etwa schon Vorhandenes zu nehmen gewohnt ist. Denn noch ganz kürzlich hatte Er mir in einem Briefe seinen Willen zu erkennen gegeben, daſs der Aufsatz No 33. im 4. Hefte 5. Bandes S. 383., der inzwischen gedruckt worden war, zurückgelegt werden sollte, weil die Darstellung desselben, wie Er später gefunden, schon von Lagrange in der *Mec. anal.* gegeben sei, welche Bemerkung des Herrn Verfassers ich zugleich hierdurch bekannt zu machen nicht unterlasse. Ich hoffe auf geneigte Entschuldigung.

Anm. d. Herausg.

9.

Über die Berechnung des Näherungswerthes doppelter Integrale.

(Von Herrn Dr. Ferd. *Minding* zu Berlin.)

---

1. Es sey $z = \varphi(x, y)$ irgend eine rationale Function von x und y von einem beliebig hohen Grade. Man habe n Werthe von x, die zwischen 0 und s liegen, nemlich:

$$a_1 s, \; a_2 s, \; a_3 s, \; \ldots \; a_n s,$$

eben so m Werthe von y, alle zwischen 0 und σ, nemlich:

$$\alpha_1 \sigma, \; \alpha_2 \sigma, \; \alpha_3 \sigma, \; \ldots \; \alpha_n \sigma.$$

Das Product $x - a_1 s \,.\, x - a_2 s \,.\, x - a_3 s \ldots x - a_n s$ werde durch fx, und $y - \alpha_1 \sigma \,.\, y - \alpha_2 \sigma \,.\, y - \alpha_3 \sigma \ldots y - \alpha_m \sigma$ durch Fy bezeichnet. Ferner sei

$$\frac{1}{fx} = \frac{A_1}{x^n} + \frac{A_2}{x^{n+1}} + \frac{A_3}{x^{n+2}} + \ldots$$

$$\frac{1}{Fy} = \frac{B_1}{y^m} + \frac{B_2}{y^{m+1}} + \frac{B_3}{y^{m+2}} + \ldots$$

Dividirt man nun $\varphi(x, y)$ zuerst mit fx, so wird der Quotient einen ungebrochenen und einen gebrochenen Theil enthalten; dividirt man den Quotienten mit Fy, so wird jeder Theil desselben wiederum in zwei andre zerfallen, so dafs man erhält:

$$\frac{\varphi(x, y)}{fx \,.\, Fy} = \frac{\varphi_1(x, y)}{fx \,.\, Fy} + \frac{P}{Fy} + \frac{Q}{fx} + R,$$

oder

$$z = z' + P.fx + Q.Fy + R.fx.Fy,$$

wo $z' (= \varphi_1(x, y))$, P, Q, R rationale ganze Functionen sind.

2. Da $\frac{z'}{fx \,.\, Fy}$ ein ächter Bruch ist, so kann z' in Bezug auf x und y höchstens resp. von der Ordnung $n-1$ und $m-1$ sein. Bedeutet b irgend eine der Gröfsen $a_1 s$, $a_2 s$, $\ldots$ $a_n s$, und β irgend eine der Gröfsen $\alpha_1 \sigma$, $\alpha_2 \sigma$, $\ldots$ $\alpha_m \sigma$, so hat die Function z' die Eigenschaft, dafs für $x = b$, $y = \beta : z = z'$ wird.

Hieraus kann z' folgendermafsen gefunden werden:

Man setze

$$z' = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + Y_3 x^3 + \ldots Y_{n-1} x^{n-1},$$

wo Y_0, Y_1, Y_2, ... ganze Functionen von y von der $m-1$ten Ordnung sind.

Man erhält

$$\frac{z'}{fx} = \frac{U_1}{f'a_1s \, . \, x - a_1 s} + \frac{U_2}{f'a_2 s \, . \, x - a_2 s} + \ldots + \frac{U_n}{f'a_n s \, . \, x - a_n s},$$

wo $U_1 = \varphi_1(a_1 s, y)$, $U_2 = \varphi_1(a_2 s, y)$, etc.

Nun sind aber $\frac{U_1}{Fy}$, $\frac{U_2}{Fy}$, etc. ebenfalls ächte Brüche; und da allgemein: $\varphi_1(b, \beta) = \varphi(b, \beta)$, so erhält man durch Zerlegung:

$$\frac{U_1}{Fy} = \frac{\varphi(a_1 s, \alpha_1 \sigma)}{F'\alpha_1\sigma \, . \, y - \alpha_1\sigma} + \frac{\varphi(a_1 s, \alpha_2 \sigma)}{F'(\alpha_2\sigma) \, . \, y - \alpha_2\sigma} + \ldots \frac{\varphi(a_1 s, \alpha_m \sigma)}{F'\alpha_m\sigma \, . \, y - \alpha_m\sigma},$$

und so fort für U_2, U_3, ...

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{z'}{fx \, . \, Fy} = \frac{1}{f'a_1 s \, . \, x - a_1 s}\left(\frac{\varphi a_1 s, \alpha_1\sigma}{F'\alpha_1\sigma \, . \, y - \alpha_1\sigma} + \frac{\varphi a_1 s, \alpha_2\sigma}{F'\alpha_2\sigma \, . \, y - \alpha_2\sigma} + \ldots \frac{\varphi a_1 s, \alpha_m\sigma}{F'\alpha_m\sigma \, . \, y - \alpha_m\sigma}\right)$$

$$+ \frac{1}{f'a_2 s \, . \, x - a_2 s}\left(\frac{\varphi a_2 s, \alpha_1\sigma}{F'\alpha_1\sigma \, . \, y - \alpha_1\sigma} + \ldots + \frac{\varphi a_2 s, \alpha_m\sigma}{F'\alpha_m\sigma \, . \, y - \alpha_m\sigma}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{fs'a_n \, . \, x - a_n s}\left(\frac{\varphi a_n s, \alpha_1\sigma}{F'\alpha_1\sigma \, . \, y - \alpha_1\sigma} + \ldots + \frac{\varphi a_n s, \alpha_m\sigma}{F'\alpha_m\sigma \, . \, y - \alpha_m\sigma}\right).$$

Dies ist eine Interpolationsformel für eine Function zweier veränderlicher Gröfsen.

3. Man setze $\Pi = P + RFy$, $K = Q + Rfx$, so erhält man

$$z - z' = \Pi fx + KFy - Rfx\, Fy = \Pi fx + QFy.$$

Man bestimmt nun leicht die Functionen Π, K und R. Stellen wir zu diesem Zwecke z durch folgende Reihe vor:

$$z = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 + Y_3 x^3 + \ldots + Y_\mu x^\mu + \ldots,$$

in welcher allgemein:

$$Y_\mu = \binom{\mu}{0} + \binom{\mu}{1} y + \binom{\mu}{2} y^2 + \ldots + \binom{\mu}{\nu} y^\nu \ldots,$$

so dafs, wenn man nach Potenzen von x und y zugleich ordnet, hervorgeht:

$$z = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} x + \binom{0}{1} y + \binom{1}{1} xy + \ldots + \binom{\mu}{\nu} x^\mu y^\nu + \ldots$$

Um nun Π zu erhalten, braucht man blofs mit fx in z zu dividiren und den gebrochenen Theil des Quotienten wegzulassen. Auf diese Weise erhält man, indem man sich der oben gegebenen Reihe für $\frac{1}{fx}$ bedient:

$$\Pi = Y_n A_1 + Y_{n+1}(A_1 x + A_2) + Y_{n+2}(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) + \ldots$$

Ordnet man hierauf z nach Potenzen von y, so dafs:

$$z = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots X_\nu y^\nu + \ldots$$

wo

$$X_\nu = \binom{0}{\nu} + \binom{1}{\nu} x + \binom{2}{\nu} x^2 + \ldots \binom{\mu}{\nu} x^\mu + \ldots,$$

und dividirt mit Fy, so erhält man:

$$K = X_m B_1 + X_{m+1}(B_1 y + B_2) + X_{m+2}(B_1 y^2 + B_2 y + B_3) + \ldots$$

Um nun R zu erhalten, braucht man nur eine dieser Reihen, z. B. Π, noch mit Fy zu dividiren. Zu dem Ende sei Π, nach y geordnet:

$$\Pi = U_0 + U_1 y + U_2 y^2 + \ldots + U_\nu y^\nu + \ldots$$

wo

$$U_\nu = \binom{n}{\nu} A_1 + \binom{n+1}{\nu}(A_1 x + A_2) + \binom{n+2}{\nu}(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) + \ldots$$

Man erhält dann durch Division:

$$R = B_1 U_m + U_{m+1}(B_1 y + B_2) + U_{m+2}(B_1 y^2 + B_2 y + B_3) + \ldots$$

Aus Π und K lassen sich P und Q erhalten. Bezeichnet man die verschiedenen Werthe von Π, welche man erhält, wenn $y = \alpha_1 \sigma, \alpha_2 \sigma, \ldots \ldots \alpha_m \sigma$ gesetzt wird, der Reihe nach mit $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$, so ist

$$\frac{P}{Fy} = \frac{\Pi_1}{F'\alpha_1 \sigma . y - \alpha_1 \sigma} + \frac{\Pi_2}{F'\alpha_2 \sigma . y - \alpha_2 \sigma} + \ldots + \frac{\Pi_m}{F'\alpha_m \sigma . y - \alpha_m \sigma}.$$

Auf ähnliche Weise findet sich:

$$\frac{Q}{fx} = \frac{K_1}{f'\alpha_1 s . x - \alpha_1 s} + \frac{K_2}{f'\alpha_2 s . x - \alpha_2 s} + \ldots + \frac{K_n}{f'\alpha_n s . x - \alpha_n s}.$$

4. Soll nun das Integral $\iint z\, dx\, dy$ zwischen den Grenzen 0 und s, 0 und σ in Bezug auf x und y näherungsweise gefunden werden, so substituire man demselben das Integral $\iint z'\, dx\, dy$, und der Fehler E wird sein:

$$E = \iint P fx\, dx\, dy + \iint Q Fy\, dx\, dy + \iint R fx Fy\, dx\, dy, \text{ oder auch}$$

$$E = \iint \Pi fx\, dx\, dy + \iint K Fy\, dx\, dy - \iint R fx Fy\, dx\, dy.$$

Um nun den Fehler möglichst zu verringern, nehmen wir, nach dem Aufsatze des Hrn. Prof. **Jacobi** im ersten Bande dieses Journals p. 301.:

$$fx = \frac{1}{n+1.n+2\ldots 2n} \frac{d^n x^n . x - s^n}{dx^n}; \quad Fy = \frac{1}{m+1\ldots 2m} \frac{d^m y^m . y - \sigma^m}{dy^m},$$

durch welche Annahme man erhält:

$$\int_0^s fx\, dx = 0, \quad \int_0^s x fx\, dx = 0, \quad \ldots \quad \int_0^s x^{n-1} fx\, dx = 0;$$

und, zwischen denselben Grenzen:

$$\int x^n fx\, dx = \frac{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}{n+1^2.n+2^2\ldots 2n^2} . \frac{s^{2n+1}}{2n+1} = N . s^{2n+1};$$

$$\int x^{n+1} fx\, dx = N . \frac{n+1^2}{2n+2} s^{2n+2}; \quad \int x^{n+2} fx\, dx = N . \frac{n+1^2 . n+2^2}{2n+2 . 2n+3} s^{2n+3}, \text{ u. s. f.}$$

Es sei nun

$$\int_0^s \frac{fx\, dx}{f'\alpha_1 s . x - \alpha_1 s} = r . s, \quad \int_0^\sigma \frac{Fy\, dy}{F'\alpha_1 \sigma . y - \alpha_1 \sigma} = \varrho' . \sigma, \text{ u. s. f.},$$

so erhält man den Näherungswerth des Integrals $\iint z\, dx\, dy$:

$$\iint z'\, dx\, dy = s\sigma . r' \{\varrho' \varphi a_1 s, \alpha_1\sigma + \varrho'' \varphi a_1 s, \alpha_2\sigma + \ldots + \varrho^m \varphi a_1 s, \alpha_m \sigma\}$$
$$+ s\sigma . r'' \{\varrho' \varphi a_2 s, \alpha_1\sigma + \varrho'' \varphi a_2 s, \alpha_2\sigma + \ldots + \varrho^m \varphi a_2 s, \alpha_m \sigma\}$$
$$+ \ldots + s\sigma . r^n \{\varrho' \varphi a_n s, \alpha_1\sigma + \varrho'' \varphi a_n s, \alpha_2\sigma + \ldots + \varrho^m \varphi a_n s, \alpha_m \sigma\}.$$

5. Man hat, vermöge des oben gegebenen Ausdrucks für P

$$\iint P f x\, dx\, dy = \sum_1^m \int \Pi_\mu f x\, dx . \int \frac{F\gamma\, d\gamma}{\gamma - \alpha_\mu \sigma . F'\alpha_\mu \sigma} = \sigma \sum^m \varrho^\mu \int \Pi_\mu f x\, dx.$$

Man bezeichne den Werth, den Y_μ erlangt, wenn $y = \alpha_\nu \sigma$ gesetzt wird, durch Γ_μ^ν, so erhält man:

$$\int_0^s \Pi_\nu f x\, dx = N . s^{2n+1} \left\{ \Gamma_{2n}^\nu A_1 + \Gamma_{2n+1}^\mu . A_1 \frac{n+1^2}{2n+2} s + A_2 + \ldots \right\}.$$

Nun ist aber die Summe $\sigma(\varrho' \Gamma_{2n}^1 + \varrho'' \Gamma_{2n}^2 + \ldots \varrho^m \Gamma_{2n}^m)$ offenbar der Näherungswerth des Integrals $\int_0^\sigma Y_{2n}\, dy$, nach der Gaufsischen Methode mit m Ordinaten berechnet, welchen wir mit Y'_{2n} bezeichnen. Auf gleiche Weise wird unter Y'_{2n+1} der Näherungswerth von $\int_0^\sigma Y_{2n+1}\, dy$ verstanden, d. i. die Summe:

$$\sigma(\varrho' \Gamma_{2n+1}^1 + \varrho'' \Gamma_{2n+1}^2 + \ldots + \varrho^m \Gamma_{2n+1}^m), \text{ u. s. f.}$$

Hieraus folgt:

$$\iint P f x\, dx\, dy = N . s^{2n+1} \left\{ Y'_{2n} A_1 + Y'_{2n+1} \left(A_1 \frac{n+1^2}{2n+2} s + A_2 \right) \right.$$
$$\left. + Y'_{2n+2} \left(A_1 \frac{n+1^2 . n+2^2}{2n+2 . 2n+3} s^2 + A_2 \frac{n+1^2}{2n+2} s + A_3 \right) + \ldots \right\}.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich, wenn man die Näherungswerthe der Integrale $\int_0^\sigma X_\mu\, dx$ mit n Ordinaten berechnet, durch X'_μ bezeichnet:

$$\iint Q F y\, dx\, dy = M . \sigma^{2m+1} \left\{ X'_{2m} B_1 + X'_{2m+1} \left(B_1 \frac{m+1^2}{2m+2} \sigma + B_2 \right) + \ldots \right\},$$

wo M eben so von m abhängt, wie vorhin N von n.

Ferner ist

$$\iint \Pi f x\, dx\, dy = N . s^{2n+1} \left\{ V_{2n} A_1 + V_{2n+1} \left(A_1 \frac{n+1^2}{2n+2} s + A_2 \right) + \ldots \right\},$$

$$\iint K F y\, dx\, dy = M . \sigma^{2m+1} \left\{ \xi_{2m} B_1 + \xi_{2m+1} \left(B_1 \frac{m+1^2}{2m+2} \sigma + B_2 \right) + \ldots \right\},$$

wenn man den genauen Werth des Integrals $\int_0^\sigma Y_\mu\, dy$ mit V_μ, und den von $\int_0^s X_\mu\, dx$ mit ξ_μ bezeichnet.

Hierdurch erhält man, indem man R eliminirt, für den Fehler folgenden Ausdruck:

$$2E = N . s^{2n+1} \left\{ V_{2n} + Y'_{2n} . A_1 + V_{2n+1} + Y'_{2n+1} . A_1 \frac{n+1^2}{2n+2} s + A_2 + \ldots \right\}$$
$$+ M . \sigma^{2m+1} \left\{ \xi_{2m} + X'_{2m} . B_1 + \xi_{2m+1} + X'_{2m+1} . B_1 \frac{m+1^2}{2m+2} \sigma + B_2 + \ldots \right\}$$

Da in dem Ausdrucke des Fehlers E alle Coëfficienten $\binom{\mu}{\nu}$ verschwunden sind, deren Indices μ und ν resp. kleiner waren, als $2n$ und $2m$, und da solcher Coëfficienten, von $\binom{0}{0}$ bis $\binom{2n-1}{2m-1}$ incl., überhaupt $4nm$ sind, so haben wir durch die Wahl der vortheilhaftesten Werthe der Coordinaten die $4nm$ ersten Glieder der Reihe z erschöpft.

Soll die Integration von $\iint z\,dx\,dy$ zuerst zwischen veränderlichen Grenzen geschehen, so lassen sich diese sehr leicht auf constante zurückführen. Denn wenn zuerst von $y=\omega$ bis $y=\pi$ zu integriren ist (wo π und ω Functionen von x sind), so setze man: $y=\omega+(\pi-\omega)u$, wodurch das gegebene Integral übergeht in: $\iint z.\overline{\pi-\omega}.dx\,du$, welches in Bezug auf u zwischen den Grenzen 0 und 1 zu nehmen ist.

Um die Brauchbarkeit der vorstehenden Methode zu prüfen, berechnete ich das Integral: $\iint dx\,dy\,\frac{\log\text{vulg}\,x+y}{x+y}$ zwischen den Grenzen $x=y=1$, $x=y=101$. Ich fand zuerst durch Annahme zweier Werthe von x und von y den Werth: 231,1; durch drei Werthe von x und y: 237,3; durch 4 Werthe: 236,4. Durch wirkliche Integration aber fand ich: 236,3.

10.
Beweis des Satzes No. 68. 2. Band, 4. Heft, S. 395. dieses Journals.

(Von dem Herrn Ingenieur Pr. Lieut. v. *Renthe* zu Berlin.)

Lehrsatz. Wenn drei Kreise von gegebenen Halbmessern in einer und derselben Ebene liegen, und von einer und derselben geraden Linie berührt werden, und Δ bezeichnet den Flächen-Inhalt des geradlinigen Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise liegen, δ' hingegen den Flächen-Inhalt des Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise dann liegen, wenn sie in veränderter Lage eine beliebige Coordinaten-Axe der x berühren, während ihre Mittelpuncte in derselben Entfernung von der auf dieser Axe senkrechten Axe der y bleiben, wie zuvor; δ'' endlich den Flächen-Inhalt des Dreiecks, in dessen Ecken die Mittelpuncte der drei Kreise liegen, wenn sie wieder in veränderter Lage die Coordinaten-Axe der y berühren, während ihre Mittelpuncte in gleicher Entfernung wie in der ersten Lage von der Axe der x sind, so ist:

$$\Delta^2 = \delta'^2 + \delta''^2$$

Beweis. Es seien r, r', r'' die Halbmesser der gegebenen, die gerade Linie AB (Taf. I. Fig. 10.) in o, o', o'' berührenden Kreise, zu deren Mittelpuncten a, b, c die senkrechten Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' gehören, und a', b', c' und a'', b'', c'' die Mittelpuncte der drei gegebenen Kreise in der veränderten Lage gegen die Axen der x und der y; ferner werden die Seiten der drei Dreiecke, deren Ecken in den Mittelpuncten der Kreise liegen, durch die am entgegengesetzten Scheitel stehenden Buchstaben benannt.

Nach der angenommenen Bezeichnung ist:

$$\begin{aligned} a^2 &= (x''-x')^2 + (y'-y'')^2, \\ a'^2 &= (x''-x')^2 + (r'-r'')^2, \\ a''^2 &= (r'-r'')^2 + (y'-y'')^2, \end{aligned}$$

daher

$$a'^2 + a''^2 - a^2 = 2(r'-r'')^2 = 2d^2.$$

Eben so

$$b'^2 + b''^2 - b^2 = 2(r - r'')^2 = 2d'^2,$$
$$c'^2 + c''^2 - c^2 = 2(r' - r)^2 = 2d''^2.$$

Ferner

$$r - r'' + r' - r = r' - r'',$$

oder

$$d' + d'' = d.$$

Endlich

$$(A.) \quad \sqrt{(a^2 - d^2)} + \sqrt{(c^2 - d''^2)} = \sqrt{(b^2 - d'^2)},$$
$$(B.) \quad \sqrt{(a'^2 - d^2)} + \sqrt{(c'^2 - d''^2)} = \sqrt{(b'^2 - d'^2)},$$

und

$$(C.) \quad \sqrt{(a''^2 - d^2)} + \sqrt{(c''^2 - d''^2)} = \sqrt{(b''^2 - d'^2)},$$

Durch Wegschaffen der Wurzelzeichen erhält man aus $(A.)$:

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2d^2d'^2 + 2d^2d''^2 - 2d'^2d''^2 - d^4 - d'^4 - d''^4$$
$$= 2a^2(d'^2 + d''^2 - d^2) + 2b^2(d^2 + d''^2 - d'^2) + 2c^2(d^2 + d'^2 - d''^2),$$

oder

$$4\Delta^2 = -a^2 d' d'' + b^2 d d'' + c^2 d d';$$

Aus $(B.)$ und $(C.)$:

$$4\delta'^2 = -a'^2 d' d'' + b'^2 d d'' + c'^2 d d',$$
$$4\delta''^2 = -a''^2 d' d'' + b''^2 d d'' + c''^2 d d';$$

daher

$$4(\delta'^2 + \delta''^2 - \Delta^2) = -(a'^2 + a''^2 - a^2)d'd'' + (b'^2 + b''^2 - b^2)dd'' + (c'^2 + c''^2 - c^2)dd'$$
$$= 2(d' + d'' - d)\,d d' d'' = 0.$$

also

$$\Delta^2 = \delta'^2 + \delta''^2.$$

Berlin, den 28. März 1830.

11.

Beweise einiger geometrischen Sätze.

(Von Herrn *Th. Scheerer*, Stud. math.)

I. **Lehrsatz.** *Jede Ebene welche durch die Mittelpuncte zweier gegenüberstehender Kanten eines beliebigen Tetraëders gelegt wird, halbirt dasselbe.* (Gergonne's Annalen.)

Beweis. $ABCD$ (Taf. I. Fig. 11.) sei ein beliebiges Tetraëder, E und F seien die Mitten zweier gegenüberstehender Kanten. Legt man durch die Kante AD und den Punct E eine Ebene, so wird, weil sie durch den Scheitel A geht, und die Grundfläche BCD halbirt, das Tetraëder durch dieselbe in zwei Hälften getheilt:

$$1. \quad ACDE = ABDE = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Wird eine Ebene durch den Punct F und die Kante BC gelegt, so ist aus demselben Grunde: $$2. \quad BCDF = ABCF = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Aus (1. und 2.) folgt: $$3. \quad ACDE = ABCF.$$

Da aber $ACDE$ und $ABCF$ das Tetraëder $ACEF$ gemein haben, so ergiebt sich aus (3.): $$4. \quad CDEF = ABEF.$$

Jetzt lege man eine beliebige Ebene $EGFH$ durch E und F, und fälle aus den vier Ecken des Tetraëders die vier Lothe a, b, c und d auf dieselbe, so ist:

$$a \times EFH + d \times EFH = CDEF,$$
$$b \times EFG + c \times EFG = ABEF,$$

und deshalb nach (4.):

$$5. \quad (a+d)EFH = (b+c)EFG.$$

Da die Ebene $EGFH$ die Kanten AD und BC in der Mitte schneidet, und die Neigungswinkel dieser Kanten unterhalb und oberhalb jener Ebene gleich sind, so ist $a = c$ und $d = b$, woraus folgt:

$$6. \quad EFH = EFG,$$
$$7. \quad d \times EFH = b \times EFG,$$
$$8. \quad DEFH = AEFG.$$

Aus (1. und 8.) aber folgt:

$$9. \quad ACHEGF = BDHEGF.$$

II. **Lehrsatz.** *Zieht man in einem convexen Vieleck alle möglichen Diagonalen, und verlängert alle Seiten, dafs alle diese Geraden einander wo möglich paarweise schneiden: so entstehen, im Allgemeinen,*

innerhalb des Vielecks gerade halb so viele Durchschnittspuncte als aufserhalb, z. B. beim Zwanzigeck innerhalb 4845, *aufserhalb* 9690. (Gegenw. Journal, Band III. Heft 2. S. 209.)

Beweis. Bei einem beliebigen n Eck werden, bei Verlängerung der Seiten und Diagonalen, im Allgemeinen nur solche Durchschnittspuncte entstehen, die von zwei Geraden gebildet werden. Nun kann man bekanntlich durch vier Puncte sechs Gerade legen, und diese schneiden sich paarweise in drei Puncten, von denen einer innerhalb und zwei aufserhalb der beiden Puncte liegen. Zu je vier Ecken eines n Ecks werden also ebenfalls ein Durchschnittspunct in dem Polygon, und zwei aufserhalb desselben gehören. So viel mal, wie man also vier verschiedene Ecken zusammenstellen kann, so viel Durchschnittspuncte wird es innerhalb, und noch einmal so viel aufserhalb geben. Es lassen aber n Elemente, zu vieren geordnet verbunden, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ verschiedene Verbindungen zu. Daher giebt es $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Durchschnittspuncte im n Ecke, und $2\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ aufserhalb desselben. Beim Zwanzigeck würden dies z. B. innerhalb $\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=4845$, und aufserhalb $2\times\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=9690$ sein.

III. Aufgabe. *Drei in einer Ecke zusammenstofsende Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide sind gegeben: man soll die der Ecke gegenüberliegende Seitenfläche so bestimmen, dafs der Inhalt der Pyramide ein Maximum sei.* (Gegenw. Journal, Band V. Heft. 3. Seite 318.)

Auflösung. Da die Gröfse einer dreiseitigen Pyramide von ihrer Grundfläche und Höhe abhängig ist, so werden die drei gegebenen Kanten nothwendig so zusammengefügt werden müssen, dafs die möglichst gröfste Grundfläche und Höhe entstehet. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn zwei Kanten auf einander senkrecht stehen, und die dritte auf beiden senkrecht ist. Denn sobald die dritte Kante mit den andern keine rechte Winkel mehr bildet, ist die Höhe, und sobald die beiden übrigen Kanten nicht mehr senkrecht zu einander sind, die Grundfläche kleiner als vorher. Sind a, b, c die drei gegebenen Kanten, so müfste also, für das Maximum des aus ihnen zusammengefügten Tetraëders, nach einem bekannten Lehrsatze, die gegenüberliegende Fläche $=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}$ sein *).

*) Die nemliche Auflösung ist auch von dem ungenannten Herrn Verfasser des Aufsatzes Nr. 7. in diesem Journal gefunden und dem Herausgeber fast zu derselben Zeit mitgetheilt worden, als er die gegenwärtige erhielt. Anm d. Herausg.

12.
Théorèmes et problèmes sur les nombres.

Théorème I. *Si n est un nombre premier, les sommes des nombres* $1, 2, 3, 4 \ldots n-1$, *pris deux à deux, quatre à quatre, six à six etc. et divisées par n, laissent un nombre égal de fois les restes* $1, 2, 3 \ldots \ldots n-1$, *et le restes* 0 *une fois de plus; et les sommes des mêmes nombres* $1, 2, 3, 4, \ldots n-1$, *pris trois à trois, cinq à cinq, sept à sept etc. et divisées par n, laissent encore les restes* $1, 2, 3 \ldots n-1$ *un nombre égal de fois, mais le reste* 0 *une fois de moins.*

Demonstration. Soit α une des racines imaginaires de l'équation

$$1.\quad x^n - 1 = 0,$$

on sait que les $n-1$ racines de l'équation

$$2.\quad x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1 = 0$$

sont $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}$ et que les coëfficiens de l'équation (2.), exprimés par ses racines, sont:

$$3.\quad \begin{cases} \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} = -1, \\ \alpha.\alpha^2 + \alpha.\alpha^3 + \ldots\ldots + \alpha^2.\alpha^3 = +1, \\ \alpha.\alpha^2.\alpha^3 + \alpha.\alpha^2.\alpha^4 + \ldots + \alpha^2.\alpha^3.\alpha^4 = -1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si dans ces équations on fait les produits des racines, les expressions des puissances de α seront les sommes des nombres $1, 2, 3 \ldots n-1$ deux à deux, trois à trois, quatre à quatre etc. Mais puisque $\alpha^n = 1$, ces produits se réduiront aux puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}, \alpha^n = 1$; donc ces puissances se présenteront plusieurs fois, aussitôt que les exposans surpassent n. Mais toutes les sommes de ces produits étant des quantités réelles et entières, il faut qu'elles contiennent les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \ldots \alpha^{n-1}$ un même nombre de fois; car si quelques unes des puissances n'y etoient pas, il y entreroit des quantités imaginaires, ou au moins irrationnelles, qui ne pourroient être détruites par d'autres: donc il faut que les équations (3.) aient la forme:

$$4.\quad \begin{cases} \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1} = -1, \\ p(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1}) + p + 1 = +1, \\ q(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1}) + q - 1 = -1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ou p, q .... sont des nombres entiers; et cela fait voir que la division des sommes $1+2$, $1+3$, ... $2+3$, ... par n donnera un même nombre de fois les restes 1, 2, 3, ... $n-1$ et le reste 0 une fois de plus; la division des sommes $1+2+3$, $1+2+4$, ... $2+3+4$, ... par n donnera un même nombre de fois les restes 1, 2, 3 .... $n-1$ et le reste 0 une fois de moins etc.

Théorème II. *Si n est un nombre premier, les coëfficiens binomiaux $(n-1)_1$, $(n-1)_3$, $(n-1)_5$ etc. étant divisées par n, laissent -1 pour restes, et ceux-ci: $(n-1)_0$, $(n-1)_2$, $(n-1)_4$, ... étant divisées par n, laissent $+1$ pour restes.*

Démonstration 1. Les nombres des termes à gauche dans les équations (3.) sont $(n-1)_1$, $(n-2)_2$, $(n-3)_3$, ... Mais en vertu des équations (4.) elles pourront toujours être réduites à:

$$5.\quad\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{n-1})-1=-1,\\ p(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{n-1})+1=+1,\\ q(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{n-1})-1=-1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

dont chacune n'a que n termes, après avoir alternativement supprimé ou ajouté un seul terme; donc il faut que $(n-1)_1+1$, $(n-1)_2-1$, $(n-1)_3-1$, $(n-1)_4+1$ etc. soient divisibles par n.

Démonstration 2. (Par un abonné.) Un quelconque des coëfficiens binomiaux de la puissance $n-1$ peut être exprimé par

$$6.\quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots m}=k,$$

ou bien par

$$7.\quad \frac{n^m-\beta_1 n^{m-1}+\beta_2 n^{m-2}-\beta_3 n^{m-3}\ldots\pm 1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}=k,$$

où β_1, β_2, β_3 .... sont des nombres entiers. L'équation (7.) donne

$$n^m-\beta_1 n^{m-1}+\beta_2 n^{m-2}\ldots\pm 1.2.3\ldots m=k.1.2.3\ldots m,$$

ou bien

$$8.\quad n(n^{m-1}-\beta_1 n^{m-2}+\beta_2 n^{m-3}\ldots\beta_{m-1})=(k\mp 1)\,1.2.3\ldots m.$$

Cette équation est divisible à gauche par n; mais les facteurs 1, 2, 3 .... m à droite ne le sont pas, n étant premier et tous les nombres 1, 2, 3 .... m étant moindres que n; donc il faut que le facteur $k\mp 1$ soit divisible par n, c'est à dire que $(n-1)_1-1$, $(n-1)_2+1$, $(n-1)_3-1$, $(n-1)_4+1$ etc. le sont.

Théorème III. *Généralement, si n est un nombre premier, les quantités suivantes:*

1) n_1, n_2, n_3, ... n_{m-1},

2) $(n-1)_1+1$, $(n-1)_2-1$, $(n-1)_3+1$, ... $(n-1)_m\pm 1$,

3) $(n-2)_1+2$, $(n-2)_2-3$, $(n-2)_3+4$, ... $(n-2)_m\pm m+1$,

4) $2(n-3)_1+2.3$, $2(n-3)_2-3.4$, $2(n-3)_3+4.5$, ... $2(n-3)_m\pm(m+1)(m+2)$,

5) $2.3(n-4)_1+2.3.4$, $2.3(n-4)_2-3.4.5$, $2.3(n-4)_3+4.5.6$, ...

..... $2.3(n-4)_m\pm(m+1)(m+2)(m+3)$,

. . . .

μ) $2.3\ldots.(\mu-1)(n-\mu)_1+2.3\ldots.\mu$, $2.3\ldots.(\mu-1)(n-\mu)_2-2.3\ldots.\mu$, ...

.... $2.3\ldots.(\mu-1)(n-\mu)_m\pm(m+1)(m+2)\ldots.(m+\mu-1)$

sont divisibles par n. Les indices à droite designent les coëfficiens binomiaux.

Démonstration. Le théorème de la première ligne est evident. Celui de la seconde ligne a été démontré précédemment. Aussi est-il contenu implicitement dans le théorème général de la ligne (μ); donc il ne s'agit que de démontrer ce dernier. Cela se fait comme suit, en imitant la seconde démonstration du théorème II. ci-dessus.

Le m^{me} coëfficient binomial de la puissance $n-\mu$ peut être exprimé par:

$$10.\quad \frac{(n-\mu)(n-\mu-1)(n-\mu-2)\ldots.(n-\mu-m+1)}{1.2.3\ldots m} = (n-\mu)_m.$$

En développant, cela donne

$$11.\quad \varkappa n\pm\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots.(\mu+m-1) = 2.3.4\ldots.m(n-\mu)_m,$$

étant un nombre entier, ou bien:

$$12.\quad \varkappa n =$$
$$(2.3.4\ldots.(\mu-1)(n-\mu)_m\mp(m+1)(m+2))\ldots.(m+\mu-1)\,\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots.m.$$

La partie à gauche de cette équation est divisible par n: le facteur $\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots.m$, ne l'est pas, μ, $\mu+1$, $\mu+2$, ... m étant moindres que n et n premier; donc il faut que l'autre facteur à droite le soit: et cela donne le théorème général ci-dessus (III. μ.).

Corollaire. On a

$$13.\quad \begin{cases} (1+1)^n = 1+n_1+n_2+n_3\ldots\ldots.+n_{n-1}+1, \\ (1+1)^{n-1} = 1+(n-1)_1+(n-1)_2+(n-1)_3\ldots.+(n-1)_{n-1}, \\ (1+1)^{n-2} = 1+(n-2)_1+(n-2)_2+(n-2)_3\ldots.+(n-2)_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1+1)^{n-\mu} = 1+(n-\mu)_1+(n-\mu)_2+(n-\mu)_3\ldots.+(n-\mu)_{n-\mu}. \end{cases}$$

Cela donne en vertu du théorème (III.):

$$14.\quad\begin{cases} 2^n = vn+2, \\ 2^{n-1} = v_1 n+1-1+1-1\ldots\ldots+1, \\ 2^{n-2} = v_2 n+1-2+3-4\ldots\ldots\pm(n-1), \\ 2^{n-3} = v_3 n+1.2-2.3+3.4-4.5\ldots\ldots\pm(n-2)(n-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2.3.4\ldots\ldots(\mu-1).2^{n-\mu} = v_\mu n+S_{n-\mu}(\pm 1.2.3\ldots\ldots\mu-1), \end{cases}$$

où v, v_1, v_2, v_3 .... v_μ sont des nombres entiers. Par là on voit que les quantités

$$15.\quad\begin{cases} 2.(2^{n-1}-1), \\ 2^{n-1}-1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2.3.4\ldots\ldots\mu-1.2^{n-\mu}-S_{n-\mu}(\pm 1.2.3\ldots\ldots\mu-1) \end{cases}$$

sont divisibles par n.

Problème. Il s'agit de savoir si les quantités (15.) peuvent être divisibles par n, même dans le cas où n n'est pas premier mais un nombre composé.

Il est aisé de voir que si les quantités (15.) n'étoient divisibles par n, qu'exclusivement dans les cas où n est premier, on auroit un moyen assez expéditif pour reconnoître si un nombre donné est premier ou non.

Mais ce ne sera que la divisibilité de **plusieurs** ou de **toutes** les quantités (15.) qui soit peut-être exclusivement propre aux nombres premiers n; car on démontre aisément comme il suit, que n peut être un nombre **composé**, sans que la divisibilité de la première quantité $2^{n-1}-1$ par n cessât d'avoir lieu. Soit p. ex. p un nombre premier, on sait que $a^{p-1}=\varkappa p+1$, où $\varkappa$ est un nombre entier qui n'est pas nécessairement premier. Soit donc $\varkappa=\lambda q$, on a $a^{p-1}=\lambda pq+1$, donc a^{p-1} divisé par pq laisse 1 pour reste, donc aussi $a^{(p-1)q}=a^{pq-q}$ divisé par n laisse 1 pour reste; et si a^{q-1} divisé par n laisse également 1 pour reste, $a^{pq-q}.a^{q-1}-1=a^{pq-1}-1$ sera divisible par pq. Mais $a^{pq-1}-1$ sera effectivement divisible par pq, si $q-1$ est un multiple de $p-1$, et puisque cela peut être ainsi, on voit que a^n-1 peut être divisible par n, même si n est un nombre composé pq.

Soient par ex. $p=11$, $q=31$. Si $a=2$, on a $2^{11.31-1}=2^{340}$ et cela divisé par 341 laisse 1 pour reste, comme il est aisé de voir; car $2^{10}=1024$, divisé par 341, laisse 1 pour reste, donc aussi $2^{10.34}=2^{340}$, divisé par 341, laissera le même reste.

Remarque 1. Nous remarquerons que le théorème (II.) ci-dessus offre une démonstration du théorème de **Fermat** de la divisibilité de $a^{n-1}-1$ par n, toute semblable et en partie égale à celle qu'**Euler** a fondée sur la divisibilité des coëfficiens n_1, n_2, $n_3 \ldots . n_{n-1}$ par n. Car on a

16. $(1+x)^{n-1}-1=(n-1)_1 x+(n-1)_2 x^2+(n-1)_3 x^3 \ldots +(n-1)_{n-1} x^{n-2}+x^{n-1}$.

Mais suivant le théorème (II.) les coëfficiens binomiaux $(n-1)_1$, $(n-1)_2$, ..., si on les divise par n, laissent alternativement -1, $+1$, -1, etc. pour restes; donc l'équation (16.) donne

$$(1+x)^{n-1}-1 = \nu n - x(1-x+x^2-x^3+\ldots .-x^{n-2}),$$

ν étant un nombre entier, et en multipliant par $1+x$:

17. $$(1+x)((1+x)^{n-1}-1) = \nu_1 n + x(x^{n-1}-1),$$

où ν_1 est également un nombre entier. Si dans cette équation on fait $x=1$, elle donne

18. $$2(2^{n-1}-1) = \nu_2 n;$$

donc $2^{n-1}-1$ est divisible par n, si n est un nombre premier plus grand que 2. En faisant $x=2$, et substituant (18.) dans (17.), on a

19. $$3(3^{n-1}-1) = \nu_1 n - \nu_2 n = \nu_3 n;$$

donc $3^{n-1}-1$ est divisible par n, si n est premier et plus grand que 3. En faisant $x=3$ et substituant de nouveau, on trouve que $4^{n-1}-1$ est divisible par n. On pourra continuer de cette sorte, et on trouvera jusqu'à $(n-1)^{n-1}-1$ que ces quantités sont divisibles par n. Mais la substitution **suivante**, x étant $=n-1$, donne

20. $$n(n^{n-1}-1) = \nu_n n + (n-1)((n-1)^{n-1}-1).$$

Ici les termes à droite sont divisibles par n, mais il ne s'en suit pas que $n^{n-1}-1$ le soit également, car l'autre facteur à gauche l'est aussi. En vérité $n^{n-1}-1$ n'est pas divisible par n; au contraire cette quantité divisée par n laisse -1 pour reste. En continuant, on trouve:

21. $$(n+1)((n+1)^{n-1}-1) = \nu_{n+1} n + n(n^{n-1}-1),$$

et les deux termes à droite étant divisibles par n, mais non pas le facteur $n+1$ à gauche, il s'en suit que $(n+1)^{n-1}-1$ sera divisible par n. Puis $(n+2)^{n-1}-1$ le sera etc. Généralement $a^{n-1}-1$, n étant un nombre premier, sera divisible par n pour une valeur quelconque de a **non-divisible** par n, et c'est le théorème connu de **Fermat** *).

---

*) La démonstration la plus simple, claire et élémentaire du théorème de **Fermat**: $\frac{a^{n-1}-1}{n}=\nu n$ est sans doute celle qu'a donnée Mr. **Dirichlet**, tome 3. de ce journal, cahier 3., page 392.

Remarque 2. Nous rapporterons encore en cette occasion quelques transformations des théorèmes de **Fermat** et **Wilson** qui se présentent aisément.

I. Si le nombre entier a n'est pas divisible par les n nombres premiers inégaux $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ et que c soit le plus grand commun diviseur de $p_1-1,\ p_2-1,\ p_3-1, \ldots\ldots p_n-1$ (le nombre 2 au moins en sera toujours un diviseur commun, puisque $p_1-1,\ p_2-1,\ p_3-1, \ldots \ldots p_n-1$ sont nécessairement pairs), la puissance

$$27.\quad a^{\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots\ldots(p_n-1)}{c^{n-1}}} = A,$$

divisée par le produit $p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_n$ laissera $+1$ pour reste. Car suivant le théorème de **Fermat** a^{p_1-1} divisé par p_1 laisse $+1$ pour reste, donc aussi toute puissance de a^{p_1-1}, et parconséquent

$$a^{(p_1-1)\left[\frac{p_2-1}{c}\cdot\frac{p_3-1}{c}\cdots\frac{p_n-1}{c}\right]} = A,$$

divisé par p_1 laissera $+1$ pour reste. Mais aussi a^{p_2-1} divisé par p_2 laisse $+1$ pour reste, donc aussi $a^{(p_2-1)\left[\frac{p_1-1}{c}\cdot\frac{p_3-1}{c}\cdots\frac{p_n-1}{c}\right]} = A$, divisé par p_2 laissera $+1$ pour reste. On dira la même chose de $p_3, p_4 \ldots\ldots p_n$, et A divisé séparément par tous ces nombres laissera $+1$ pour reste. Donc $A-1$ est divisible par $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ en même tems, c'est-à-dire par le produit $p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_n$, ou bien A divisé par ce produit laisse $+1$ pour reste *).

II. Suivant le théorème de **Wilson** la quantité $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots$ $\ldots 1+1$ est, comme on sait, divisible par n, si n est un nombre premier. Mais les quantités

$$28.\quad \begin{cases} (n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ldots 1-1, \\ 2(n-3)(n-4)(n-5)\ldots\ldots 1+1, \\ 2.3(n-4)(n-5)(n-6)\ldots\ldots 1-1, \\ 2.3.4(n-5)(n-6)(n-7)\ldots\ldots 1+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

le seront également.

Car si l'on divise la quantité $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots+1$ par $n-1+1=n$ on a $(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1$ pour quotient et $-(n-2)(n-3)(n-4)\ldots$ $\ldots 1+1$ pour reste. Donc il faut que ce reste, ou bien $(n-2)(n-3)(n-4)\ldots$ $\ldots 1-1$ soit également divisible par n. Si l'on divise cette quantité par

*) Il a été d'abord remarqué que $a^{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots\ldots(p_n-1)}$ divisé par $p_1 p_2 p_3 \ldots$ $\ldots p_n$ laisse $+1$ pour reste. La remarque que l'exposant $(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots$ $\ldots(p_n-1)$ peut encore être divisé par c^{n-1} est due à l'auteur de la seconde démonstration du théorème II. ci-dessus.

$n-2+2=n$, on a $(n-3)(n-4)\ldots.1$ pour quotient et $-2(n-3)(n-4)\ldots.-1$ pour reste; donc cette quantité, ou bien $2(n-3)(n-4)\ldots.+1$, sera aussi divisible par n. Si l'on divise de nouveau par $n-3+3=n$, on a $2(n-4)(n-5)\ldots.1$ pour quotient et $-2.3(n-4)(n-5)\ldots.+1$ pour reste, donc ce reste, ou bien $2.3(n-4)(n-5)\ldots.1-1$, sera divisible par n. En continuant de cette sorte on trouvera les expressions (28.).

On tire les mêmes résultats de la considération suivante. Savoir $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.1+1$ étant divisible par n et égal à

$$n(n-2)(n-3)\ldots.1-(n-2)(n-3)\ldots.1+1,$$

où le premier terme est divisible par n, il faut que les deux autres termes $(n-2)(n-3)\ldots.1-1$ le soient également. Ces deux termes sont égaux à

$$n(n-3)(n-4)\ldots.1-2(n-3)(n-4)\ldots.1-1,$$

et de là on conclut que $2(n-3)(n-3)\ldots.1+1$ est divisible par n etc.

Puisque n est nécessairement impair, $n-1$ sera pair, donc une des quantités (28.) aura la forme

$$29.\quad \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots\ldots1\right)^2-1,$$

si $\frac{n-1}{2}$ est impair, et la forme

$$30.\quad \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots\ldots1\right)^2+1,$$

si $\frac{n-1}{2}$ est pair; et ces quantités seront divisibles par n. La première de ces quantités est égale à

$$31.\quad \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots\ldots1-1\right)\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.1+1\right),$$

donc, étant premier, un des deux facteurs sera divisible par n. La seconde étant divisible par n, il faut que si l'on divise $\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.1$ par n, le reste soit tel que son quarré divisé par n laisse le reste -1. Puisque la quantité (30.) est égale à la moitié de

$$32.\quad \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.1+1\right)^2+\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.-1\right)^2,$$

on voit aussi que les deux quantités

$$\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.1+1\right)^2 \text{ et } \left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}\ldots.-1\right)^2$$

étant divisées par n, les restes seront égaux, mais de signes différents.

Corrigenda.

In commentatione: „de discerptione singulari fractionum etc." Vol. V. pag. 344 ab initio legendum est hunc in modum

Proposita expressione $\frac{1}{ax+by-t}\cdot\frac{1}{b'y+a'x-t'}$

evolvamus alterum factorem $\frac{1}{ax+by-t}$

ad dignitates negativas ipsius x, alterum factorem $\frac{1}{b'y+a'x-t}$

ad dignitates negativas ipsius y. Quem evolutionis modum etc.

13.

Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen.

(Vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.)

---

1. In einem Aufsatze, der in einem frühern Hefte dieses Journals abgedruckt worden ist, habe ich mich mit einem neuen Coordinaten-Systeme beschäftigt. Die Absicht des vorliegenden Aufsatzes geht weiter. Wir haben es jetzt nicht mehr zu thun blofs mit einer neuen Bestimmungsweise der Lage eines Punctes, wodurch man eben ein neues Coordinaten-System erhält, sondern mit einer gänzlich verschiedenen Art, eine Curve durch eine Gleichung auszudrücken. Man denkt sich nemlich, indem man eine Curve wie gewöhnlich durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Gröfsen darstellt, welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten Punctes bedeuten, diese Curve als aus einer unendlichen Menge stetig auf einander folgender Puncte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punctes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Gröfsen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte gerade Linie gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig auf einander folgen, und also eine bestimmte Curve umhüllen.

Auf diese neue Art wird eine Curve durch eine Gleichung eben so vollständig dargestellt, als nach der gewöhnlichen Methode: denn hier wie dort lassen sich alle Eigenschaften derselben aus ihrer Gleichung vollständig ableiten. Man durchschaut leicht, wie hiernach in der Geometrie der Curven die Beweismittel sich verdoppeln; wie jeder Entwickelung, die bisher gemacht worden ist, indem man die gebräuchlichen Gleichungen zu Grunde gelegt, eine andere entspricht, die auf den neuen Gleichungen beruht. Ich übersehe jetzt schon neue Entwickelungen, die mehr als einen Band füllen, und neue Sätze und Constructionen, die von allen Seiten sich darbieten. In dem Folgenden will ich Einzelnes hervorheben.

Man wird bald erkennen, daſs die in dem Vorstehenden angedeuteten analytischen Methoden in naher Verbindung stehen mit der Theorie der Reciprocität (*Théorie des polaires réciproques*). Es gingen aus denselben diejenigen Entwickelungen hervor, die ich an einem andern Orte angedeutet habe, und die jene Theorie einschlieſslich enthalten *).

2. Die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf zwei unter einem beliebigen Winkel sich schneidende Coordinaten-Axen ist folgende:

$$1.\quad Ay + Bx + C = 0,$$

indem wir durch y und x Coordinaten, durch A, B und C drei Constanten bezeichnen. Wenn wir diesen Constanten nach und nach verschiedene Werthe beilegen, so können wir alle möglichen geraden Linien durch die vorstehende Gleichung darstellen. Diese Gleichung stellt auch dann noch unendlich viele geraden Linien dar, die aber wie bekannt alle durch denselben Punct gehen, wenn zwischen den obigen drei Constanten, die wir übrigens als ganz beliebig betrachten, eine Gleichung von folgender Form besteht:

$$aA + bB + cC = 0,$$

in der a, b und c drei beliebige neue Constanten bezeichnen. Wenn wir also A, B und C als veränderlich betrachten und demnach statt derselben u, v und w schreiben, so können wir sagen, es stelle die Gleichung:

$$2.\quad au + bv + cw = 0,$$

einen Punct dar. Je drei Werthen von u, v und w, die die letzte Gleichung befriedigen, entspricht eine gerade Linie, und jede solche gerade Linie geht durch den in Rede stehenden Punct. Wir betrachten also hier einen Punct als einen geometrischen Ort, in dem unendlich viele gerade Linien sich schneiden, während man, indem man von der gewöhnlichen Gleichung einer geraden Linie ausgeht, diese als einen geometrischen Ort von unendlich vielen Puncten betrachtet.

Wir können eine der drei Veränderlichen u, v oder w beliebig annehmen, und der Kürze halber auch gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus (2.) folgende Gleichungen:

---

*) Ich hoffe später Gelegenheit zu finden, in diesem Journale auf die Theorie der Reciprocität zurückzukommen und unter Anderm auch die Beziehung der von mir angedeuteten Theorie zu der Theorie der Herren Poncelet und Gergonne nachzuweisen.

$$a + bv + cw = 0,$$
$$au + b + cw = 0,$$
$$au + bv + c = 0.$$

3. Wenn statt der Gleichung (2.) eine beliebige, in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung gegeben ist, die wir durch:

$$3. \quad F(u, v, w) = 0$$

bezeichnen wollen, so entspricht je drei Werthen von u, v und w, die die vorstehende Gleichung befriedigen, eine bestimmte gerade Linie. Solcher Linien erhalten wir also unendlich viele, die unmittelbar auf einander folgen und also eine stetige Curve umhüllen. Wir sagen, diese Curve werde dargestellt durch die Gleichung (3.). Wir sagen ferner, die Curve sei von der zweiten, dritten, etc. Classe *), wenn ihre Gleichung vom zweiten, dritten, etc. Grade ist, so wie man sagt: die Curve sei von der zweiten, dritten, etc. Ordnung, wenn die gewöhnliche Gleichung derselben in y und x vom zweiten, dritten, etc. Grade ist. Der Analogie nach nennen wir den Punct: geometrischen Ort erster Classe. Die Örter zweiter Classe werden durch folgende allgemeine Gleichung dargestellt:

$$au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2 = 0,$$

und enthalten alle Curven zweiter Ordnung. Die Örter der dritten und höherer Classen sind im Allgemeinen nicht Örter dritter und derselben höheren Ordnung **).

---

*) Ich gebrauche hier das Wort Classe nach Hrn. Gergonne, der einer Curve, an die sich im Allgemeinen von einem gegebenen Puncte aus m Tangenten legen lassen, den Namen einer Curve $m$ter Classe giebt, dem analog, wie man einer Curve, die von einer geraden Linie in m Puncten geschnitten wird, eine Curve $m$ter Ordnung nennt. (Mir scheint es passender, hier das Wort Ordnung statt des Wortes Grad zu gebrauchen, weil auch eine Curve $m$ter Classe durch eine Gleichung $m$ten Grades dargestellt wird.)

**) Ich kann eine Bemerkung, die nahe liegt und vielleicht nicht ganz unerheblich ist, hier nicht unberührt lassen. Wenn ein System von Parallel-Coordinaten gegeben ist, und man sucht, gleichviel ob nach der Poncelet-Gergonneschen oder der rein analytischen Theorie, die Polar-Figur desselben, so erhält man statt der beiden Axen zwei Puncte, statt des Anfangspunctes eine gerade Linie, die diese beiden Puncte verbindet, und statt der Coordinaten Puncte die auf zwei durch jene beiden Puncte gehenden geraden Linien liegen. Statt eines durch zwei Coordinaten gegebenen Punctes erhält man eine durch zwei Puncte bestimmte gerade Linie; statt unendlich vieler in gerader Linie liegenden Puncte, die durch eine lineare Gleichung gegeben ist: einen Punct, durch den unendlich viele gerade Linien gehen, und dessen lineäre Gleichung zu bestimmen die Aufgabe ist. Statt einer Curve, deren Puncte durch eine Gleichung zwischen den gewöhnlichen Coordinaten gegeben ist erhält man

§. 1.

Discussion der Gleichung des Punctes oder des Ortes erster Classe (Taf. II. Fig. 1.).

4. Die allgemeine Gleichung des Punctes ist nach dem Vorstehenden folgende:

$$1. \quad au + bv + cw = 0.$$

Setzen wir $w = 0$, so kommt:

$$au + bv = 0,$$

mithin:

$$2. \quad \frac{a}{b} = -\frac{u}{v}.$$

Wenn aber $w = 0$ ist, so geht die bezügliche gerade Linie durch den Anfangspunct der Coordinaten, und ist also, wenn M der dargestellte Punct ist, keine andere als OM, mithin ist:

$$3. \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

wenn α und β die beiden Winkel sind, die OM mit der ersten und zweiten Coordinaten-Axe bildet.

Setzen wir ferner $u = 0$, so giebt (1.):

$$bv + cw = 0,$$

mithin kommt:

$$\frac{c}{b} = -\frac{v}{w};$$

und da der Bedingung $u = 0$ eine mit der zweiten Axe parallele gerade Linie, also MP entspricht, so kommt:

$$4. \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{OP}.$$

Aus (3. und 4.) endlich folgt:

$$5. \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{OP} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{OQ}.$$

---

eine Polar-Curve, deren Tangenten durch eine Gleichung desselben Grades zu bestimmen alsdann nicht schwer sein wird. Vermittelst der einen Gleichung bestimmt man die Lage von Puncten in Beziehung auf zwei gerade Linien, vermittelst der andern die Lage von geraden Linien in Beziehung auf zwei Puncte.

Wenn wir dann ferner in dem Polar-Systeme, um diesen Ausdruck hier zu gebrauchen, die lineare Gleichung eines Punctes zu Hülfe nehmen, gerade so wie wir uns im Texte der Hülfs-Gleichung (1.) bedienen, so erhalten wir in diesem Systeme eine lineare Gleichung für eine gerade Linie, und die Gleichungen der höhern Grade entsprechen hier wiederum Curven derselben höheren Ordnungen.

Wir erhielten also hiernach im Ganzen eine doppelte Bestimmung, sowohl von geraden Linien als von Puncten, nemlich ein Mal in Beziehung auf zwei gegebene gerade Linien, das andere Mal in Beziehung auf zwei Puncte.

5. Es stellt die Gleichung:

$$w = 0$$

den Anfangspunct der Coordinaten dar. Die beiden Gleichungen

$$u = 0, \qquad v = 0$$

stellen zwei Puncte dar, die auf der zweiten Axe und der ersten Axe unendlich weit liegen. Es stellt die Gleichung

$$au + bv = 0$$

irgend einen Punct dar, der unendlich weit liegt. Es stellen die beiden Gleichungen: $au + cw = 0, \qquad bv + cw = 0$

zwei solche Puncte dar, die irgendwo auf der zweiten Axe und der ersten Axe liegen.

6. Nach der 4. Nummer sind die gewöhnlichen Coordinaten des durch die Gleichung (1.) dargestellten Punctes:

$$x = OP = \frac{b}{c}, \qquad y = OQ = \frac{a}{c}.$$

7. Wir erhalten die Bestimmung einer geraden Linie, die durch zwei durch die beiden Gleichungen

$$6. \quad \begin{cases} au + bv + cw = U = 0, \\ a'u + b'v + c'w = U' = 0, \end{cases}$$

gegebenen Puncte geht, wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen die Werthe von u, v und w, oder vielmehr die Werthe der Quotienten je zweier dieser drei Veränderlichen eliminiren.

Es ergiebt sich hiernach für die Gleichung jedes dritten Punctes, der mit den beiden gegebenen in gerader Linie liegt, eine Gleichung von folgender Form: $\mu U + \mu' U' = 0,$

wo μ und μ' unbestimmte Coëfficienten bedeuten, für deren einen wir auch Eins nehmen können.

8. Die Entfernung D der beiden Puncte (6.) von einander ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{a'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{b'}{c'}\right)^2 = D^2.$$

9. Derjenige Punct, der in der Mitte zwischen den beiden gegebenen liegt, ist offenbar durch folgende Coordinaten-Werthe gegeben:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{b'}{c'}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{bc' + b'c}{cc'},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{a'}{c'}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{ac' + a'c}{cc'};$$

und hiernach erhalten wir für die Gleichung des Punctes:

$$c'U + cU' = 0.$$

Für den vierten harmonischen Theilungspunct, der zu den drei durch folgende Gleichungen:

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad \mu U + \mu' U' = 0,$$

gegebenen Puncten gehört, ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\mu U - \mu' U' = 0;$$

wobei μ und μ' irgend zwei unbestimmte Coëfficienten bedeuten.

10. Wir wollen den Abstand einer geraden Linie, für welche

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

von dem durch die Gleichung

$$au + bv + cw = 0$$

gegebenen Puncte bestimmen. Dieser Abstand, den wir P nennen wollen, ist offenbar kein anderer als der Abstand des Punctes (y', x') von der geraden Linie:

$$u'y + v'x + w' = 0,$$

wenn wir

$$x = \frac{b}{c}, \quad y = \frac{a}{c}$$

setzen. Wir erhalten also, nach bekanntem Ausdrucke:

$$P = \pm \frac{u'y + v'x + w'}{\sqrt{(u'^2 + v'^2)}},$$

$$= \pm \frac{au' + bv' + cw'}{c\sqrt{(u'^2 + v'^2)}}.$$

Wenn wir in der letzten Gleichung u', v' und w' als veränderlich betrachten, so stellt diese Gleichung einen Kreis dar, dessen Mittelpunct durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$au + bv + cw = 0.$$

§. 2.

Beispiel von der Verbindung linearer Gleichungen.

11. Aus dem folgenden bekannten Satze:

„Wenn man durch die drei Winkelpuncte eines Dreiecks und irgend zwei feste Puncte dreimal zwei gerade Linien zieht, so begegnen diese Linien jeden der drei gegenüberliegenden Seiten in zwei Puncten: die sechs Puncte, die man auf diese Weise erhält, liegen auf einer und derselben Linie zweiter Ordnung,"

erhält man nach dem Princip der Reciprocität sogleich nachstehenden Satz:

Wenn jede der drei Seiten eines Dreiecks von irgend zwei festen geraden Linien in zwei Puncten geschnitten wird, und man verbindet diese Durchschnitte mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten des Dreiecks durch gerade Linien, so umhüllen die sechs geraden Linien, die man auf diese Weise erhält, dieselbe Linie zweiter Classe, oder bilden, was dasselbe heifst, Sechsecke, deren drei Diagonalen in demselben Puncte sich schneiden.

Es seien, um den Beweis dieses letztern Satzes direct zu geben (Fig. 2.): $a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$
die Gleichungen der drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks. Es seien ferner:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$
$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

die Gleichungen der zweimal drei Puncte, die in gerader Linie und auf den jenen drei Winkelpuncten resp. gegenüberstehenden Seiten liegen. Hiernach erhalten wir die Voraussetzungen des obigen Satzes auf folgende Weise vollständig ausgedrückt:

$$C = a - b, \qquad C' = a - \mu b,$$
$$B = a - c, \qquad B' = a - \nu c,$$
$$A = b - c; \qquad A' = \mu b - \nu c.$$

Wir haben hierzu nur zwei unbestimmte Coëfficienten μ und ν nöthig. Die sechs geraden Linien, die die Puncte A und a, A' und a u. s. w. verbinden, mithin nach bekannter Bezeichnung folgende:

$$(A, a), \quad (A', a), \quad (B, b), \quad (B', b), \quad (C, c), \quad (C', c),$$

wollen wir der Kürze halber durch:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \quad (4), \quad (5), \quad (6)$$

bezeichnen. Sechs gerade Linien bestimmen bekanntlich sechzig verschiedene Sechsecke. Wir wollen hier dasjenige betrachten, dessen sechs Winkelpuncte folgende sind:

$$(1, 2), \quad (2, 3), \quad (3, 4), \quad (5, 6), \quad (6, 1),$$

und beweisen, dafs die drei geraden Linien, welche die drei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte verbinden, mithin folgende drei Linien:

$$[(1, 2)(4, 5)], \quad [(2, 3)(5, 6)], \quad [(3, 4)(6, 1)],$$

in demselben Puncte sich schneiden. Für jene sechs Winkelpuncte ergeben sich auf einfache Weise die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
(1,2) & a = 0, \\
(4,5) & a - b - \nu c = 0, \\
(2,3) & \nu a + \mu b - \nu c = 0, \\
(5,6) & c = 0, \\
(3,4) & b = 0, \\
(6,1) & a - \mu b + \mu c = 0.
\end{array}
$$

Für die Gleichung desjenigen Punctes endlich, in welchem zwei beliebige der eben bezeichneten drei geraden Linien [(1,2)(4,5)], [(2,3)(5,6)] und [(3,4)(6,1)] sich schneiden, erhält man sogleich:

$$\nu a + \mu b + \mu \nu c = 0.$$

Hierdurch ist also der obige Satz bewiesen.

12. Wenn von jenen sechs geraden Linien drei durch denselben Punct P (Fig. 3.) gehen, so vereinigen sich die übrigen drei in einem zweiten Puncte Q. In der 3ten Figur gehen die drei Linien (2), (3) und (5) durch denselben Punct, so dafs also

$$(2,3), \quad (2,5), \quad (3,5),$$

für deren Gleichungen wir sogleich folgende erhalten:

$$
\begin{array}{ll}
(2,3) & \nu a + \mu b - \nu c = 0, \\
(2,5) & \mu a - \mu b + \nu c = 0, \\
(3,5) & a - b - c = 0,
\end{array}
$$

denselben Punct bezeichnen. Diesem entspricht die Bedingungs-Gleichung:

$$\mu = -\nu,$$

wodurch die vorstehenden Gleichungen identisch werden. Alsdann werden aber auch die Gleichungen der drei Puncte

$$(1,4), \quad (1,6), \quad (4,6),$$

nemlich folgende drei Gleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
(1,4) & a + \nu b - \nu c = 0, \\
(1,6) & a - \mu b + \mu c = 0, \\
(4,6) & a - \mu b - \nu c = 0,
\end{array}
$$

identisch. Die drei geraden Linien (1), (4) und (6) gehen mithin durch denselben Punct. In diesem Falle erhalten wir also statt einer Curve zweiter Classe ein System von zwei Puncten, so wie auf ähnliche Weise an die Stelle einer Curve zweiter Ordnung ein System von zwei geraden Linien treten kann. Hierauf werden wir bald zurückkommen.

Übrigens werden auch in dem zuletzt betrachteten Falle durch die sechs geraden Linien (1), (2), (3), (4), (5) und (6) noch sechs verschie-

dene Sechsecke bestimmt, und von diesen ist nach der vorigen Nummer als bewiesen anzusehen, dafs in jedem derselben die drei Diagonalen in demselben Puncte sich schneiden. Legen wir nun die Construction so an, dafs wir von den zweimal drei, in den beiden Puncten P und Q sich schneidenden, und als durchaus beliebig zu betrachtenden geraden Linien ausgehen, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Wenn durch jeden von zwei festen Puncten drei beliebige gerade Linien gehen, so lassen sich durch die neun Durchschnitte dieser Linien achtzehn gerade Linien legen, die zu drei und drei durch dieselben Puncte gehen.

In den Gergonneschen Annalen (Oct. 1828) wird der vorstehende Satz von Hrn. Steiner noch dahin vervollständigt, dafs von den sechs Durchschnittspuncten, die man nach diesem Satze erhält, drei und drei in gerader Linie liegen, und dann zugleich mit demjenigen Satze, mit welchem er durch die Theorie der Reciprocität verbunden ist, zum Beweise vorgelegt. Dieser Zusatz ergiebt sich ohne Mühe nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten, von der wir in dem Vorstehenden ein Beispiel gegeben haben, das hier für unsere Absicht hinreichend ist; oder auch unmittelbar aus den Sätzen über das umschriebene und eingeschriebene Seckseck.

§. 3.

Discussion der allgemeinen Gleichung der Örter zweiter Classe.

(Bruchstück.)

14. Wir wollen für die allgemeine Gleichung dieser Örter in dem Nachstehenden folgende nehmen:

$$1.\quad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung $w = 0$ setzen, so kommt:

$$2.\quad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Werthe für $\frac{v}{u}$, die denjenigen Tangenten entsprechen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen. Diese Tangenten sind reell, fallen zusammen, oder sind imaginär, je nachdem der Ausdruck:

$$B^2 - AC$$

positiv, Null, oder negativ ist: also, im Allgemeinen, je nachdem der Anfangspunct der Coordinaten aufserhalb der Curve, auf ihrem Umfange, oder innerhalb der Curve liegt.

15. Wenn wir $v = 0$ setzen, so ergiebt sich aus (1.):

$$3. \quad Au^2 + 2Duw + Fw^2 = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Werthe von $\frac{w}{u}$, also die Ordinaten (mit entgegengesetzten Zeichen genommen) derjenigen Puncte, in welchen die der ersten Axe parallelen Tangenten in die zweite Axe einschneiden. Diese Tangenten sind reell, fallen zusammen, oder sind imaginär, jenachdem der Ausdruck:

$$D^2 - AF,$$

positiv, Null, oder negativ ist.

Wenn wir $u = 0$ setzen, so erhalten wir aus (1.) folgende Gleichung:

$$4. \quad Cv^2 + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

und diese Gleichung giebt die Werthe für $\frac{w}{v}$, d. h. die Abscissen (mit entgegengesetztem Zeichen genommen) derjenigen Puncte, in welchen die der zweiten Axe parallele Tangenten in die erste Axe einschneiden. Diese Tangenten sind reell, fallen zusammen, oder sind imaginär, je nachdem der Ausdruck:

$$E^2 - CF,$$

positiv, Null, oder negativ ist.

Jede der beiden Gleichungen:

$$D^2 - AF = 0, \qquad E^2 - CF = 0.$$

zeigt hiernach im Allgemeinen an, dafs die Gleichung (1) einen Punct oder ein System zweier geraden Linien darstellt.

16. Wenn

$$A = 0,$$

so giebt die Gleichung (2.) für das $\frac{v}{u}$ einer durch den Anfangspunct gehenden Tangente einen Werth gleich Null. Die Gleichung (3.) giebt alsdann für das auf eine der ersten Axe parallele Tangente sich beziehende $\frac{u}{u}$ ebenfalls einen Werth gleich Null. Hieraus erhellet also auf zwiefache Art, dafs alsdann die Curve von der ersten Axe berührt wird.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dafs wenn

$$C = 0,$$

die Curve von der zweiten Axe berührt wird.

17. Wenn

$$F = 0,$$

so erhalten wir sowohl für $\frac{w}{u}$ aus (3.) als für $\frac{w}{v}$ aus (4.) unendliche Werthe. Die Curve hat also nur eine Tangente, die jeder der beiden Coordinaten-

Axen parallel ist; die zweite Tangente liegt unendlich weit. Die Curve ist, im Allgemeinen, eine Parabel.

Die Gleichung einer auf zwei ihrer Tangenten, als Coordinaten-Axen, bezogenen Parabel hat also folgende einfache und symmetrische Form:

$$5. \quad Buv + Duw + Evw = 0.$$

18. Wenn

$$B = 0,$$

so giebt die Gleichung (2.) für $\frac{v}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, d. h.: in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten, halbiren die beiden Axen den von den beiden, durch den Anfangspunct an die Curve gelegten Tangenten gebildeten Winkel. In dem Falle eines beliebigen Coordinaten-Winkels bilden die beiden Axen und jene beiden Tangenten vier Harmonicalen.

19. Wenn

$$D = 0,$$

so giebt die Gleichung (3.) für $\frac{w}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe: es liegen also die beiden der ersten Axe parallelen Tangenten zu beiden Seiten derselben und gleich weit von ihr entfernt. Der Mittelpunct der Curve liegt also auf der ersten Axe. Wenn

$$E = 0,$$

so liegt nach Gleichung (4.) der Mittelpunct der Curve auf der zweiten Axe.

20. Die nachstehende Gleichung:

$$6. \quad Au^2 + Cv^2 + Fw^2 = 0$$

stellt, nach der vorigen Nummer, einen Ort zweiter Classe dar, dessen Mittelpunct zum Anfangspunct der Coordinaten genommen ist. Daſs auch das mit uv behaftete Glied fehlt, können wir hier nicht unmittelbar nach der 18. Nummer deuten. Man sieht aber leicht aus der Form dieser Gleichung, daſs die bezügliche Curve auf zwei ihrer zugeordneten Durchmesser als Coordinaten-Axen bezogen ist, und daſs die Quadrate der Längen dieser in die zweite und erste Axe fallenden Durchmesser respective gleich sind $\left(-\frac{A}{F}\right)$ und $\left(-\frac{C}{F}\right)$. Die Curve ist imaginär, wenn A, C und F dasselbe Zeichen haben; eine Ellipse, wenn A und C, was das Zeichen betrifft, unter einander übereinstimmen, nicht aber mit F; eine Hyperbel, wenn F entweder allein mit A oder allein mit C im Zeichen übereinstimmt. Wenn einer der drei Coëfficienten A, C und F gleich Null ist, so stellt die Gleichung (6.) das System von zwei Puncten dar,

die, nach der 5. Nummer, unendlich weit in dem einen Falle, in den andern beiden Fällen beide auf derselben Coordinaten-Axe liegen. Es können aber in allen diesen Fällen diese beiden Puncte imaginär werden. Die beiden Puncte fallen in den Anfangspunct der Coordinaten zusammen, wenn zugleich $A=0$ und $C=0$; sie fallen zusammen, liegen aber unendlich weit, und zwar auf einer der beiden Coordinaten-Axen, wenn zugleich mit $F=0$, auch $A=0$ oder $C=0$.

21. Die nachstehenden Gleichungen

$$7. \quad Au^2 + 2Evw = 0,$$

$$8. \quad Cv^2 + 2Duw = 0$$

stellen Parabeln dar (No. 17.). Die erste derselben berührt die zweite Axe im Anfangspuncte der Coordinaten und hat die andere Axe zu einem ihrer Durchmesser; die zweite Parabel berührt die erste Axe im Anfangspuncte der Coordinaten und hat die zweite Axe zu einem ihrer Durchmesser (No. 16., 18., 19.).

22. Die nachstehende Gleichung:

$$9. \quad Fw^2 + 2Buv = 0$$

stellt, was sogleich aus der 16. und 19. Nummer ersichtlich ist, eine auf ihre beiden Asymptoten bezogene Hyperbel dar.

23. Die Gleichung (3.) giebt die halbe Summe der Werthe von $\frac{w}{u}$ gleich $\left(-\frac{D}{F}\right)$; eben so giebt die Gleichung (4.) die halbe Summe der Werthe von $\frac{w}{v}$ gleich $\left(-\frac{E}{F}\right)$. Hiernach erhält man für die Coordinaten des Mittelpunctes der durch die allgemeine Gleichung (1.) dargestellten Curve:

$$y = \frac{D}{F}, \qquad x = \frac{E}{F}.$$

Die Gleichung dieses Mittelpunctes ist also folgende:

$$10. \quad Du + Ev + Fw = 0.$$

24. Es sei wiederum (Fig. 4.)

$$1. \quad Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Classe. Wenn wir von dieser Gleichung folgende abziehen:

$$11. \quad Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0,$$

so kommt:

$$12. \quad w(2Du + 2Ev + Fw) = 0.$$

Die Gleichung (11.) stellt zwei Puncte dar, die (nach bestimmten Richtungen hin) unendlich weit liegen. Die gemeinschaftlichen Tangenten der

beider Örter (1. und 11.), also hier insbesondere die Tangenten die sich von jenen beiden unendlich weit entfernten Puncten an die Curve legen lassen, bilden ein Parallelogramm. Da die Gleichung (12.) eine Folge von (1. und 11.) ist, so erhalten wir dasselbe Parallelogramm, wenn wir von den beiden Puncten (12.) aus Tangenten an die Curve legen. Diese beiden letztgenannten Puncte sind also zwei gegenüberstehende Winkelpuncte jenes Parallelogrammes. Die Form der Gleichung (12.) zeigt, daſs einer derselben der Anfangspunct der Coordinaten ist, wonach wir jenes Parallelogramm, wenn die Curve gegeben ist, leicht construiren können, und mithin auch den andern Punct P, dessen Gleichung:

$$13.\quad 2Du + 2Ev + Fw = 0,$$

erhalten.

25. Wenn in den Gleichungen zweier oder mehrerer Curven zweiter Classe, von der Form der Gleichung (1.), die Coëfficienten der drei ersten Glieder dieselben sind, so berühren diese Curven dieselben beiden, im Anfangspuncte sich schneidenden (reellen oder imaginären) Tangenten.

Wenn die Coëfficienten der drei letzten Glieder dieselben sind, so haben nach der 23. Nummer die bezüglichen Curven denselben Mittelpunct.

26. Wenn wir die Gleichung

$$14.\quad Au^2 + 2Duw + Fw^2 = 0$$

von der Gleichung (1.) abziehen, so bleibt:

$$15.\quad v(2Bu + Cv + 2Ew) = 0.$$

Die Gleichung (14.) stellt zwei Puncte (Fig. 5.) dar, die auf der zweiten Axe liegen. Wenn man von diesen Puncten aus Tangenten an die Curve legt, so erhält man ein Viereck, in welchem zwei gegenüberstehende Winkelpuncte durch (15.) dargestellt werden. Einer dieser beiden Puncte Q liegt aber, wie die Form dieser Gleichung zeigt, unendlich weit auf der ersten Axe; die Gleichung des andern Punctes P ist:

$$16.\quad 2Bu + Cv + 2Ew = 0.$$

Man erhält also, wenn die Curve gegeben ist, die beiden durch (14.) gegebenen Puncte R und S, wenn man an die Curve zwei der ersten Axe parallele Tangenten legt. Der Durchschnitt der beiden übrigen durch R und S gehenden Tangenten ist alsdann der Punct P.

Auf ähnliche Weise stellt die Gleichung

$$17.\quad Cv^2 + 2Evw + Fw^2 = 0$$

die beiden auf der ersten Axe liegenden Puncte M und N dar, und die

Gleichung

$$18. \quad Au + 2Bv + 2Dw = 0$$

den Punct L.

27. Wenn in den Gleichungen zweier oder mehrerer Curven zweiter Classe die Coëfficienten von u^2, uv und w^2 dieselben sind, so berühren diese Curven zwei feste, der ersten Axe parallele, gerade Linien: sie berühren zwei der zweiten Axe parallele gerade Linien, wenn die Coëfficienten von uv, v^2 und w^2 dieselben sind.

Wenn in mehreren Gleichungen die Coëfficienten von u^2, v^2, uw, vw und w^2 dieselben sind, und mithin nur der Coëfficient von uv irgend einen beliebigen Werth hat, so sind die bezüglichen Curven alle demselben Parallelogramme eingeschrieben, dessen Seiten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind.

28. Wenn in mehrern Gleichungen nur die Coëfficienten von vw oder uw verschieden sind, so sind die bezüglichen Curven alle demselben Parallel-Trapez eingeschrieben, dessen zwei parallele Seiten der ersten oder zweiten Axe parallel sind, und dessen beide andern Seiten im Anfangspuncte sich schneiden (No. 25., 27.).

29. Wenn in mehrern Gleichungen nur die Coëfficienten von uv und v^2 oder von u^2 und uv verschieden sind, so haben die bezüglichen Curven denselben Mittelpunct und berühren dieselben beiden der ersten oder zweiten Axe parallelen geraden Linien, etc. etc.

30. **Theorie der Berührung.** Da die allgemeine Gleichung, die alle Örter zweiter Classe darstellt, und die wir der Kürze halber durch

$$1. \quad U = 0$$

darstellen wollen, in Beziehung auf u, v und w homogen ist, so erhalten wir sogleich für die Gleichung des Berührungspunctes auf einer durch u', v' und w' gegebenen Tangente folgende:

$$2. \quad \frac{dU}{du}u + \frac{dU}{dv}v + \frac{dU}{dw}w = 0,$$

wenn wir, nach der Differentiation, in den Ausdrücken der drei partiellen Differential-Coëfficienten statt der drei veränderlichen Gröſsen, u', v' und w' setzen. Denn, nach dem Theorem **über die homogenen Functionen**, werden die Gleichungen (1. und 2.) identisch, wenn wir u', v' und w' für u, v und w schreiben, so daſs also der Punct (2.) auf der gegebenen Tangente liegt. Wenn wir ferner die Gleichungen (1. und 2.) vollständig differentiiren, und nach der Differentiation wiederum u', v' und

w' für die drei Veränderlichen schreiben, so erhalten wir ebenfalls zwei identische Gleichungen. Es schneiden sich also zwei consecutive Tangenten der Curve (1.) in dem Puncte (2.), der mithin der Berührungspunct auf der gegebenen Tangente ist.

Wenn wir die Gleichung (2.) entwickeln, so kommt:

3. $(Au'+Bv'+Dw')u+(Bu'+Cv'+Ew')v+(Du'+Ev'+Fw')w=0$

für die Gleichung des Berührungspunctes auf der Tangente (u', v', w').

31. Die letzte Gleichung ist, in Beziehung auf u, v, w und u', v', w', symmetrisch, so dafs wir sie auch folgendergestalt schreiben können:

$$(Au+Bv+Dw)u'+(Bu+Cv+Ew)v'+(Du+Ev+Fw)w'=0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir für die drei Veränderlichen drei solche Werthe u'', v'' und w'' nehmen, die sich auf irgend eine durch den Berührungspunct gehende gerade Linie beziehen. Betrachten wir ferner u', v' und w' als veränderlich, und lassen aus diesem Grunde die Accente fort, so stellt die Gleichung:

4. $(Au''+Bv''+Dw'')u+(Bu''+Cv''+Ew'')v+(Du''+Ev''+Fw'')w=0$,

da sie sich mit gleichem Rechte auf die Tangenten in beiden Durchschnitten der geraden Linie (u'', v'', w'') mit der Curve bezieht, den Durchschnitt jener beiden Tangenten, den Pol dieser geraden Linie, dar.

32. Wenn der Pol unendlich weit liegt, so ist jene gerade Linie ein Durchmesser. Der Pol liegt aber unendlich weit, wenn die Gleichung (4.) folgende Form annimmt:

$$mu+nv=0,$$

was nur dann geschieht, wenn

$$Du''+Ev''+Fw''=0,$$

d. h. wenn die gerade Linie (u'', v'', w'') durch den Mittelpunct geht, dessen Gleichung, nach der 23. Nummeo, nachstehende ist:

$$5. \quad Du+Ev+Fw=\frac{dU}{dw}=0.$$

Wenn der Pol auf der ersten Axe liegt, so mufs die Gleichung (4.) folgende Form:

$$mv+nw=0,$$

annehmen (Nro. 5.), was nur dann geschieht, wenn

$$Au''+Bv''+Dw''=0.$$

Hiernach stellt also die Gleichung:

$$6. \quad Au + Bv + Dw = \frac{dU}{du} = 0$$

diejenige des **Poles der ersten Axe** dar.

Eben so stellt die Gleichung

$$7. \quad Bu + Cv + Ew = \frac{dU}{dv} = 0$$

den **Pol der zweiten Axe** dar.

33. Durch Verbindung der Gleichungen (6. und 7.) zu einer neuen linearen Gleichung erhält man die Gleichung jedes beliebigen Punctes der Polaren des Anfangspunctes. Die Constanten dieser Polaren erhält man, indem man zwischen den beiden eben genannten Gleichungen die Werthe für $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ eliminirt.

Wenn man die Gleichung des Mittelpunctes (5.) mit einer der beiden Gleichungen (6.) oder (7.) zu einer neuen linearen Gleichung verbindet, so erhält man die Gleichung jedes beliebigen Punctes desjenigen Durchmessers, der die der ersten oder zweiten Coordinaten-Axe parallele Chorden halbirt.

34. Es ergeben sich aus dem Vorstehenden einige Sätze zu unmittelbar, als dafs ich dieselben hier unerwähnt lassen sollte. Es seien

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0$$

die Gleichungen dreier Örter zweiter Classe. Alsdann sind

$$\frac{dU}{dw} = 0, \qquad \frac{dU'}{dw} = 0, \qquad \frac{dU''}{dw} = 0$$

die Gleichungen ihrer Mittelpuncte. Wenn jene drei Örter dieselben vier geraden Linien berühren, so ist, wenn μ und μ' unbestimmte Coëfficienten bedeuten:

$$\mu U + \mu' U' + U'' = 0;$$

es ist mithin auch:

$$\mu \frac{dU}{dw} + \mu' \frac{dU'}{dw} + \frac{dU''}{dw} = 0,$$

d. h. die drei Mittelpuncte liegen in gerader Linie. Hiermit ist also folgender bekannter Satz gegeben:

Die Mittelpuncte aller Kegelschnitte (Örter zweiter Classe), die dieselben vier geraden Linien berühren, liegen in gerader Linie (Newton).

Zu diesen Örtern zweiter Classe gehören auch drei Systeme von zwei Puncten, nemlich die dreimal zwei gegenüberstehenden Winkelpuncte der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vollständigen, vier-

seitigen Figur. Der Mittelpunct des Systems zweier Puncte ist aber offenbar, was auch sogleich aus dessen Gleichung sich ergiebt, die Mitte zwischen den beiden Puncten des Systems. Wir erhalten hiernach diejenige gerade Linie, welche alle Mittelpuncte enthält, indem wir die drei Mitten der drei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur durch eine gerade Linie verbinden. Wir sehen hier beiläufig, dafs diese drei Mitten derselben geraden Linie angehören.

35. Die Gleichungen der Pole irgend einer geraden Linie (u'', v'', w'') in Beziehung auf dieselben drei in der vorigen Nummer betrachteten Curven sind folgende:

$$\frac{dU}{du}u''+\frac{dU}{dv}v''+\frac{dU}{dw}w''=V=0,$$
$$\frac{dU'}{du}u''+\frac{dU'}{dv}v''+\frac{dU'}{dw}w''=V'=0,$$
$$\frac{dU''}{du}u''+\frac{dU'}{dv}v''+\frac{dU''}{dw}w''=V''=0,$$

und man sieht sogleich, dafs, unter denselben Voraussetzungen als bisher, auch:

$$\mu V+\mu' V'+V''=0,$$

so dafs also die drei Pole in gerader Linie liegen. Hiernach ergiebt sich folgender Satz:

Wenn beliebig viele Curven zweiter Classe vier gegebene gerade Linien berühren, so liegen die Pole derselben beliebigen geraden Linie in Beziehung auf alle diese Curven in gerader Linie.

Es ist im Allgemeinen klar, dafs alle Örter, die durch Gleichungen dargestellt werden, in denen, als Constanten, auf dieselbe beliebige Weise und überdies blofs **linear**, Constanten aus den verschiedenen Gleichungen solcher Örter zweiter Classe die demselben Viereck eingeschrieben sind vorkommen, alle dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben; und also insbesondere, wenn diese Örter Puncte sind, in gerader Linie liegen.

36. **Theorie der Osculation.** Die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der die zweite Axe im Anfangspunct der Coordinaten berührt, sei folgende (No. 16. 14.):

$$Au^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0.$$

Stellen wir mit dieser Gleichung eine zweite ihr ähnliche:

$$Au^2+2D'uw+2E'vw+F'w^2=0,$$

zusammen und ziehen ab, so kommt:

$$w(2(D-D')u+2(E-E')v+(F-F')w)=0.$$

Diese Gleichung stellt ein System von zwei Puncten dar. Der Factor w bezieht sich auf den Anfangspunct der Coordinaten, durch den zwei in die zweite Axe zusammenfallende, gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven gehen. Der andere Factor, gleich Null gesetzt:

$$1.\quad 2(D-D')u+2(E-E')v+(F-F')w=0,$$

stellt den Durchschnittspunct der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten dar, und ist reell, diese Tangenten mögen es sein oder nicht. Wenn dieser Punct auf der zweiten Axe liegt, so fallen in diese Axe drei Tangenten zusammen; die beiden Curven haben alsdann eine dreipunctige Osculation. Damit die Gleichung (1.), dem entsprechend, die Form

$$2.\quad 2(D-D')u+(F-F')w=0$$

annehme, ergiebt sich die Bedingungs-Gleichung:

$$3.\quad E=E'.$$

37. Wenn die Osculation eine vierpunctige sein soll, so muſs, damit die vierte gemeinschaftliche Tangente mit den drei übrigen zusammenfalle, die Gleichung (2.) den Anfangspunct darstellen und also folgende Form annehmen:

$$w=0;$$

wonach wir neben der Bedingungs-Gleichung (3.) noch nachstehende erhalten:

$$4.\quad D=D'.$$

38. Wenn bloſs die letzte Bedingungs-Gleichung (4.) zwischen den Gleichungen der beiden, sich im Anfangspuncte berührenden Curven besteht, so ist sogleich ersichtlich, daſs alsdann die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven sich auf der ersten Axe schneiden.

39. Ich werde in dem folgenden Paragraphen, durch Verbindung allgemeiner Symbole vermittelst unbestimmter Coëfficienten, allgemeine Sätze beweisen und aus denselben viele einzelne Constructionen ableiten. Doch, um ein Beispiel der Behandlungsweise zu geben, will ich schon hier einige einzelne Sätze direct beweisen. Dies wird hinreichend sein, um zu zeigen, daſs man hier auf eine ganz ähnliche Weise verfahren kann, wie ich in dem ersten Bande meiner „Entwickelungen" §. 8. S. 222. ff. verfahren bin.

Die Gleichung irgend einer gegebenen Curve zweiter Classe, welche die zweite Axe im Anfangspuncte berührt, sei folgende:

$$5.\quad Au^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0.$$

Das System irgend zweier Puncte die auf der zweiten Axe liegen, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$6. \quad Au^2 + 2D'uw + F'w^2 = 0.$$

Die beiden Gleichungen (5. und 6.) vereint, dienen zur Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden bezüglichen Örter, d. h. derjenigen beiden Tangenten-Paare, welche man durch die beiden Puncte des Systems an die Curve legen kann. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$w(2(D-D')u + 2Ev + (F-F')w) = 0.$$

Der Factor w des ersten Theiles dieser Gleichung, der, gleich Null gesetzt, den Anfangspunct darstellt, entspricht den beiden in die zweite Axe zusammenfallenden Tangenten. Die beiden andern Tangenten schneiden sich also in demjenigen Puncte, dessen Gleichung folgende ist:

$$7. \quad 2(D-D')u + 2Ev + (F-F')w = 0.$$

40. Die Coëfficienten von u und v in dieser Gleichung ändern sich nicht, wenn man statt (5.) die Gleichung irgend einer andern Curve nimmt, welche die gegebene im Anfangspuncte vierpunctig osculirt (No. 37.). Es stellt also (7.) einen solchen Punct dar, der für alle diese Curven auf einer und derselben, durch den gemeinschaftlichen Osculationspunct gehenden geraden Linie liegt. Also:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Tangente im Osculationspuncte mehrerer sich vierpunctig osculirender Curven an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegen die Durchschnitte je zweier solcher Tangenten auf einer festen, durch den Osculationspunct gehenden geraden Linie.

41. Hiernach erhalten wir eine neue Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Sei OMN (Fig. 6.) die gegebene Curve, TS die gegebene gerade Linie, welche der Tangente im Osculationspuncte O im Puncte T begegne. Man lege durch T die zweite Tangente TS' und ziehe eine beliebige dritte Tangente, die den beiden ersten Tangenten in T' und S' begegne. Man ziehe OS', die der gegebenen geraden Linie in S begegne, und endlich $T'S$. Diese gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Wenn die beiden Puncte T und T' zusammenfallen, so sind S' und

und S Puncte der gegebenen und der zu construirenden Curve, die immer noch mit O in gerader Linie liegen. Wir können hiernach, wenn ein Punct der zu construirenden Curve gegeben ist, in diesem Puncte die Tangente legen, und wenn eine Tangente gegeben ist, auf dieser Tangente den Berührungspunct bestimmen.

42. Die Coëfficienten von v und w bleiben in der Gleichung (7.) dieselben, wenn die Gleichung (5.) eine Parabel darstellt, mithin $F=0$ ist, und wir diese Parabel mit irgend einer andern vertauschen, welche dieselbe im Anfangspuncte dreipunctig osculirt. Der Punct (7.) rückt aber alsdann auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie fort. Also:

Wenn man von irgend zweien festen Puncten der Tangente im Osculationspuncte mehrerer sich osculirender Parabeln noch zwei Tangenten an jede Parabel legt, so liegt der Durchschnitt solcher zwei Tangenten auf einer festen, der gemeinschaftlichen Tangente parallelen geraden Linie.

43. Hiernach können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Parabel (Fig. 7.) zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Sei MON die gegebene Parabel, die in O osculirt werden soll; SQ die gegebene gerade Linie, die der Tangente in O im Puncte T begegne. Man lege durch T eine zweite Tangente TM an die gegebene Parabel, und an dieselbe noch irgend eine beliebige Tangente $S'N$, die der Tangente TM in S' und der Tangente OT in T' begegne. Man ziehe parallel mit OT durch den Punct S' die gerade Linie $S'S$, die der gegebenen in S begegne, und endlich ST. Diese Linie ist eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

44. Wenn die beiden Puncte T und T' zusammenfallen, so erhalten wir statt S und S' zwei Berührungspuncte auf den beiden Parabeln. Also:

Wenn man von irgend einem festen Puncte der Tangente im Osculationspuncte mehrerer sich osculirender Parabeln noch eine zweite Tangente an jede derselben legt, so liegen die Berührungspuncte auf einer der gemeinschaftlichen Tangente parallelen geraden Linie.

Hiernach können wir in der letzten Aufgabe auf der gegebenen geraden Linie sogleich den Berührungspunct finden und auch eine Parabel

construiren, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt, und überdies durch einen gegebenen Punct geht.

45. Die Coëfficienten von u und w bleiben in der Gleichung (7.) dieselben, wenn die Gleichung (5.) eine Parabel darstellt, wir an die Stelle derselben irgend eine andere Parabel setzen, die mit der gegebenen dieselbe gemeinschaftliche Tangente hat, und parallel mit dieser Tangente die erste Axe legen. Dies ergiebt sich sogleich aus der 38. Nummer, wenn wir überdies berücksichtigen, dafs die vierte gemeinschaftliche Tangente zweier Parabeln unendlich weit liegt. Wenn aber die Coëfficienten von u und w dieselben bleiben, so stellt (7.) einen Punct dar, der auf einer der ersten Axe parallelen geraden Linie bleibt. Hiernach ergeben sich leicht folgende beiden Sätze.

Wenn mehrere Parabeln zwei gegebene gerade Linien berühren und die erste derselben in einem gegebenen Puncte, so schneiden sich diejenigen beiden Tangenten, die von irgend zwei festen Puncten dieser ersten gegebenen geraden Linie an jede Parabel gelegt werden können, in einem solchen Puncte, der auf einer festen, der zweiten gegebenen geraden Linie parallelen Linie bleibt.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der ersten gegebenen geraden Linie noch eine Tangente an jede Parabel legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten in derselben, der zweiten gegebenen geraden Linie parallelen Linie.

Aus diesen Sätzen ergeben sich wiederum lineare Constructionen, die wir hier übergehen.

46. Wir können die Gleichung (7.) auch noch aus einem andern Gesichtspuncte discutiren. Es ändern sich nemlich in dieser Gleichung z. B. die Coëfficienten von u und w nicht, wenn man statt (6.) eine andere Gleichung von derselben Form nimmt, in der man nur dem Coëfficienten D' irgend einen andern Werth beilegt; d. h. wenn man statt der durch (6.) dargestellten beiden Puncte irgend zwei andere Puncte der zweiten Axe nimmt, deren Abstände vom Berührungspuncte, in einander multiplicirt, dasselbe Product geben. Der Durchschnitt der beiden Tangenten, die durch solche zwei Puncte sich noch an die gegebene Curve legen lassen, liegt also auf einer festen, der zweiten Axe parallelen, geraden Linie. Also, auch umgekehrt:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gegebenen geraden Linie zwei Tangenten an eine gegebene Curve zweiter Classe legt, so wird das von diesen beiden Tangenten intercepirte Segment einer dritten Tangente, die der gegebenen geraden Linie parallel ist, im Berührungspuncte so getheilt, dafs das Product der beiden Theile ein constantes ist

Wenn wir insbesondere annehmen, dafs die gegebene gerade Linie unendlich weit liege, so erhalten wir einen bekannten Satz.

47. Den nachstehenden Satz erhalten wir auf eine ganz ähnliche Weise, wie wir den Satz der vorigen Nummer erhalten haben.

Wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist, und man construirt in einem beliebigen Puncte derselben die Tangente, legt durch denselben Punct eine beliebige gerade Linie und durch *irgend* einen Punct dieser geraden Linie zwei neue Tangenten an die Curve, so schneiden diese beiden Tangenten die erstgezogene in solchen zwei Puncten, für welche die Summe der reciproken Werthe der Abstände vom Berührungspuncte constant ist.

Wir brechen hier ab, um sogleich zu einer allgemeinern Verbindung der Gleichungen der Örter zweiter Classe überzugehen, weil hier auf eine ungemein leichte Weise eine Menge von Sätzen und Constructionen sich ergeben.

Bonn, den 11. Sept. 1829.

§. 4.

Verbindung der allgemeinen Gleichung der Örter zweiter Classe vermittelst unbestimmter Coëfficienten.

48. Wenn die beiden Gleichungen

$$1. \quad A = 0, \quad A' = 0$$

irgend zwei Örter zweiter Classe darstellen, so stellt, wenn μ einen unbestimmten Coëfficienten bedeutet, die Gleichung

$$2. \quad A + \mu A' = 0$$

alle möglichen Örter derselben Classe dar, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Wenn der erste Theil der Gleichung (2.) sich in zwei Factoren des ersten Grades auflösen läfst, so stellt dieselbe ein System von zwei Puncten dar. Ein sol-

ches System ist also als ein Ort zweiter Classe anzusehen. (Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dafs die beiden Puncte auf keine Weise als verschwindende Ellipsen zu betrachten sind.) Wenn aber die in Rede stehende Zerlegung Statt finden soll, so erhalten wir eine Bedingungs-Gleichung, die in Beziehung auf μ vom dritten Grade ist. Es reducirt sich diese Gleichung nur dann auf den zweiten Grad, wenn schon eine der beiden Gleichungen (1.) ein System von zwei Puncten darstellt. Wir erhalten also immer, wenn wir die Gleichungen zweier solcher Örter zweiter Classe, die Curven sind, gehörig mit einander verbinden, mindestens die Gleichung eines Systems von zwei Puncten. Nur dürfen wir nicht übersehen, dafs im Allgemeinen solche zwei Puncte auch zusammenfallen und auch imaginär sein können. In diesem letztern Falle erhalten wir eine bestimmte gerade Linie welche durch diese beiden imaginären Puncte geht, statt dieser Puncte: eine gerade Linie, die durch eine Gleichung des zweiten Grades dargestellt wird *). Man kann aber leicht zeigen, dafs immer eine resultirende Gleichung (2). ein System zweier reellen Puncte darstellt. Wenn die Bedingungs-Gleichung in μ nur reelle Wurzeln hat, so erhalten wir drei reelle Gleichungen von der Form der Gleichung (2.). Alsdann haben die beiden Curven entweder vier reelle oder gar keine reelle gemeinschaftliche Tangenten. Im ersten Falle stellen jene drei resultirenden Gleichungen die dreimal zwei gegenüberstehenden Winkelpuncte der von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur dar; im zweiten Falle erhalten wir ein System von zwei reellen Puncten und aufserdem zwei reelle gerade Linien. Wenn die Gleichung in μ zwei imaginäre Wurzeln hat, so erhalten wir durch Verbindung der gegebenen Gleichungen nur eine einzige Gleichung eines Systems von zwei Puncten: die beiden andern Systeme existiren gar nicht. Diesem Falle entspricht, dafs die beiden gegebenen Curven nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben.

Wenn die Bedingungs-Gleichung in μ zwei gleiche Wurzeln hat,

---

*) Dies wird deutlicher, wenn wir die Gleichung

$$v^2 + 2avw + bw^2 = 0$$

betrachten, welche zwei auf der ersten Axe liegende Puncte darstellt. Wenn aber

$$a^2 - b > 0,$$

so giebt diese Gleichung für v und w keine andere reellen Werthe, als

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Es stellt also die vorstehende Gleichung blofs die erste Coordinaten-Axe dar.

so berühren sich die beiden gegebenen Curven. Die drei resultirenden Systeme von zwei Puncten sind in diesem Falle die beiden Durchschnittspuncte der Tangente im Berührungspuncte der Curven mit den beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten derselben (zweimal genommen) und dann das System des Berührungspunctes und des Durchschnittes der letztgenannten beiden Tangenten. Wenn die beiden Curven einen **doppelten Contact** haben, so sind die drei Systeme, der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten als doppelter Punct betrachtet (zweimal genommen) und dann das System der beiden Berührungspuncte.

Wenn die Bedingungs-Gleichung in μ **drei gleiche** Wurzeln hat, so haben die beiden Curven einen **dreipunctigen Contact**. Von den drei resultirenden und alsdann identischen Systemen besteht jedes aus dem Osculationspuncte und dem Durchschnittspuncte der Tangente in diesem Puncte mit der noch übrigen einzigen gemeinschaftlichen Tangente. Für den Fall einer **vierpunctigen** Osculation fallen die beiden Puncte der drei identischen Systeme in den Osculationspunct zusammen.

49. Es tritt uns hier noch folgende Frage entgegen: Giebt es Curven zweiter Classe, die nur zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, oder bestimmter ausgedrückt, von deren vier gemeinschaftlichen Tangenten zwei unendlich weit liegen, so wie es Curven zweiter Ordnung giebt (ähnliche und ähnlich liegende), von deren vier Durchschnitten zwei unendlich weit liegen? Eine gemeinschaftliche Tangente liegt, wie wir schon früher gesehen haben, unendlich weit, wenn die beiden Curven **Parabeln** sind; aber zwei gemeinschaftliche Tangenten können **nicht** unendlich weit liegen.

50. Herr **Poncelet** hat schon bemerkt, daſs wenn zwei Örter zweiter Classe **denselben Brennpunct haben**, dieser Brennpunct als der Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen, imaginären Tangenten anzusehen ist.

Wenn die beiden gegebenen Curven **ähnliche, ähnlich-liegende und concentrische** sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct der Durchschnitt zweier Paare gemeinschaftlicher, imaginärer Tangenten.

Wenn in den vorstehenden Andeutungen irgend etwas dunkel erscheinen sollte, so verweise ich auf die ganz analogen Erörterungen über die Verbindung der Gleichungen von Örtern zweiter Ordnung im ersten Bande meiner „Entwickelungen."

51. Auf dem bisher Entwickelten beruhen Erörterungen, die denen des letzten Paragraphen der eben angeführten Schrift entsprechen. In dem Folgenden will ich einige Momente hervorheben.

Es seien

$$1.\quad A = 0,\quad A' = 0,\quad A'' = 0$$

die Gleichungen dreier solcher Curven zweiter Classe, welche dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, deren Durchschnittspunct durch die Gleichung

$$c = 0$$

dargestellt werde. Alsdann erhalten wir, durch gehörige Verbindung vermittelst unbestimmter Coëfficienten je zweier der drei Gleichungen (1.), folgende Ausdrücke:

$$2.\quad A - \mu'' A' = c\,.\,a'' = 0,\quad A' - \mu' A'' = c\,.\,a' = 0,\quad A' - \mu A'' = c\,.\,a = 0.$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu'' A' - \mu' A'' = c(a' - a'') = 0,$$

eine Gleichung, die, was ihre Form zeigt, mit der dritten der Gleichungen (2.) identisch sein mufs; wonach wir

$$\mu'' a = a' - a''$$

erhalten. Es liegen also die drei, durch folgende drei Gleichungen vom ersten Grade dargestellten Puncte

$$a = 0,\quad a' = 0,\quad a'' = 0$$

in gerader Linie. Hierin ist der nachstehende Satz enthalten:

Wenn irgend drei Örter zweiter Classe dieselben zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten haben, so liegen die Durchschnitte der noch übrigen dreimal zwei gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten in gerader Linie.

52. Wenn drei Curven eine gegebene gerade Linie in demselben Puncte berühren, so haben je zwei derselben einerseits dieselben zwei zusammenfallenden Durchschnittspuncte und andrerseits zwei zusammenfallende gemeinschaftliche Tangenten. Es gehen also nicht allein, wie bekannt, die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier derselben durch denselben Punct, sondern es liegen auch die drei Durchschnitte der drei Paare gemeinschaftlicher Tangenten in gerader Linie.

53. Wir wollen mehrere einzelne Fälle des Satzes der 51. Nummer genauer betrachten. Wenn die drei Örter zweiter Classe **Parabeln**

sind, so liegt eine gemeinschaftliche Tangente je zweier derselben unendlich weit, und den Voraussetzungen des obigen Satzes geschieht Genüge, wenn die Parabeln eine einzige gemeinschaftliche Tangente haben. Also:

Wenn irgend drei Parabeln dieselbe gerade Linie berühren, so liegen die Durchschnitte der übrigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben in gerader Linie.

54. Es ist bekannt, von welchem Vortheile es in der Theorie der Örter zweiter Ordnung ist, dafs man Systeme von zwei geraden Linien mit Curven dieser Ordnung zusammenstellt: ein Verfahren, das man auf die Betrachtung der Gleichungen gründen oder auch durch allgemeine, rein geometrische Betrachtungen rechtfertigen kann. In dem Folgenden werden wir gleichen Vortheil daraus ziehen, dafs wir, was früher noch nicht geschehen zu sein scheint, mit Curven zweiter Classe, oder, was dasselbe heifst, zweiter Ordnung, Systeme von zwei Puncten zusammenstellen: ein Verfahren, gegen welches sich auch nicht der geringste Einwurf machen läfst, sobald wir zu den Gleichungen zurückgehen.

Um die Bedingungen der 51. Nummer zu befriedigen, müssen wir, wenn wir mit zwei Curven A und B (Fig. 8.) ein System von zwei Puncten c, c' zusammenstellen wollen, diese beiden Puncte auf zweien gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven annehmen. Ziehen wir alsdann von solchen zwei Puncten noch zwei Tangenten an jede der beiden Curven, die sich in den beiden Puncten S und S' schneiden, so liegen diese beiden Puncte mit dem Durchschnitte derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen c und c' nicht liegen, mit Φ, in gerader Linie. Also:

Wenn man von irgend zwei Puncten zweier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven zweiter Classe noch vier Tangenten an die beiden Curven legt, so bilden diese Tangenten ein Viereck, dessen eine Diagonale durch einen festen Punct geht, der unveränderlich derselbe bleibt, wie auch jene beiden Puncte auf den gemeinschaftlichen Tangenten fortrücken mögen.

Wir erhalten eine Modification dieses Satzes, wenn wir für die Puncte c, c' zwei Berührungspuncte auf den beiden Tangenten nehmen.

Für den Fall zweier Parabeln erhalten wir eine doppelte Construction; einmal können wir nemlich die beiden Puncte c, c' auf zweien

der drei gemeinschaftlichen Tangenten annehmen: alsdann liegen die beiden Constructionspuncte S und S' auf einer sich immer parallel bleibenden geraden Linie. Oder wir können auch einen Punct c auf einer beliebigen gemeinschaftlichen Tangente und den andern Punct c' auf der unendlich weit entfernt liegenden vierten gemeinschaftlichen Tangente annehmen, d. h. nach beliebiger Richtung zwei parallele Tangenten an die beiden Parabeln ziehen. Der feste Punct ist alsdann der Durchschnitt derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen c nicht angenommen worden ist.

55. Nach der vorigen Nummer ergiebt sich, wenn wir zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier Curven zweiter Classe kennen, eine leichte Construction des Durchschnittspunctes der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten; und also können wir auch diese Tangenten selbst, in dem Falle dafs dieselben reell sind, construiren.

56. Der Satz der 54. Nummer erleidet Modificationen, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven besondere Beziehungen Statt finden. Wir wollen sogleich zwei sich dreipunctig osculirende Curven (Fig. 9.) betrachten. Alsdann fallen drei gemeinschaftliche Tangenten in die Tangente des Osculationspunctes zusammen, und es giebt aufserdem nur noch eine einzige gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir also die beiden Puncte c, c' auf der Tangente im Osculationspuncte an, so ist der feste Punct Φ der Durchschnitt derselben Tangente mit der noch übrigen gemeinschaftlichen Tangente. Also:

Wenn man von irgend zwei beliebigen Puncten der Tangente im Osculationspuncte zweier oder mehrerer sich dreipunctig osculirender und überdies dieselbe gerade Linie berührender Kegelschnitte, an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnitt dieser Tangenten auf derselben geraden Linie, und diese gerade Linie geht durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente mit der Tangente im Osculationspuncte, und dreht sich um diesen Durchschnitt, wenn die beiden beliebigen Puncte auf der letztgenannten Tangente fortrücken.

Nach diesem Satze können wir einen Kegelschnitt beschreiben, der einen gegebenen in einem gegebenen Puncte osculirt und überdies zwei gegebene gerade Linien berührt.

Construction. (Fig. 9.) Es sei O der Punct, in welchem die

gegebene Curve OM osculirt werden soll; die Tangente in diesem Puncte werde von den beiden, sich in S schneidenden, gegebenen geraden Linien in den beiden Puncten c und c' geschnitten; von diesen beiden Puncten lege man an die gegebene Curve die beiden Tangenten cS' und $c'S'$, die sich im Puncte S' schneiden. Zieht man endlich SS', so begegnet diese Linie der Tangente in O in demjenigen Puncte Φ, in welchem dieselbe Tangente von der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und gesuchten Curve getroffen wird.

Wenn die eine gegebene gerade Linie die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven ist, so bietet sich unmittelbar eine ganz einfache Construction beliebig vieler Tangenten der gesuchten Curve dar.

57. Wenn wir annehmen, dafs der Punct c' mit dem Puncte c zusammenfalle, so erhalten wir die Berührungspuncte σ und σ' statt der Puncte S und S'. Also:

Wenn man von irgend einem Puncte der Tangente im Osculationspuncte irgend zweier Kegelschnitte zwei Tangenten an dieselben legt, so liegen die Berührungspuncte auf diesen beiden Tangenten mit dem Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven und jener Tangente im Osculationspuncte in gerader Linie.

Nach diesem Satze können wir in der Aufgabe der vorigen Nummer auf jeder Tangente den Berührungspunct finden. Wir erhalten z. B. den Berührungspunct σ auf cS, wenn wir durch Φ und den Berührungspunct σ' auf der gegebenen Curve die gerade Linie $\Phi\sigma$ legen.

Wir können ferner auch eine Curve beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdies eine von folgenden Bedingungen erfüllt:

1) eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berührt,
2) mit der gegebenen Curve eine gegebene gemeinschaftliche Tangente hat und durch irgend einen gegebenen Punct geht.

Es sei, um nur den zweiten Fall hervorzuheben, $O\sigma'$ die gegebene Curve, O der Osculationspunct, Φ derjenige Punct, in welchem die Tangente in diesem Puncte von der gegebenen gemeinschaftlichen Tangente $T\Phi$ geschnitten wird, und endlich σ der gegebene Punct. Man ziehe die

gerade Linie $\sigma\Phi$, von der die gegebene Curve in σ' und σ_1 geschnitten werde. In diesen beiden Puncten construire man die Tangenten an die gegebene Curve, welche der Tangente in O in zwei Puncten begegnen. Wenn man diese Puncte (von denen c der eine ist) mit dem Puncte σ verbindet, so erhält man zwei Tangenten derjenigen beiden Curven, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen zwei Auflösungen; sie hat nur eine Auflösung, wenn der gegebene Punct auf der gegebenen Curve liegt.

58. Wenn man die beiden Puncte c und c' (Fig. 10.) auf der Tangente im Osculationspuncte und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunctig osculirender Curven annimmt, so erhält man statt des Satzes der 56. Nummer folgenden:

Wenn man von zwei Puncten der Tangente im Osculationspuncte und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunctig osculirender Curven an jede Curve noch zwei Tangenten zieht, so schneiden sich die zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Osculationspuncte in gerader Linie liegen.

Hieraus ergiebt sich eine neue Construction der Aufgabe der 56. Nummer, die auch dann ihre Anwendbarkeit behält, wenn der Durchschnitt der Tangente im Osculationspuncte mit der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und zu construirenden Curve sehr weit liegt. Es sei wiederum OM die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll; Sc und Sc' seien die beiden zu berührenden geraden Linien. Man verbinde den Durchschnitt S dieser beiden geraden Linien mit O; lege von c, dem Durchschnitt einer (beliebigen) dieser beiden Linien mit der Tangente in O, die Tangente cS' an die gegebene Curve, die der OS in S' begegne und endlich durch S' die zweite Tangente $S'c'$ an dieselbe Curve. Diese Tangente begegnet der gegebenen Sc' in einem Puncte c', welcher ein Punct der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und gesuchten Curve ist.

Die Modification dieser Construction für den Fall, daſs statt der beiden Tangenten eine einzige und auf derselben der Berührungspunct gegeben ist, ergiebt sich von selbst, und hiernach ergeben sich endlich auch neue Constructionen für die in der 57. Nummer behandelten Aufgabe.

59. Wenn wir annehmen, daſs alle Curven Parabeln sind, so erhalten wir aus No. 56. und 57. die bereits in der 42., 43. und 44. Nummer

unmittelbar bewiesenen Sätze und Constructionen, und aus No. 58. noch einige neue.

Es kann aber auch die gegebene Curve irgend eine beliebige sein und eine **Parabel** verlangt werden. Dies kommt alsdann darauf hinaus, in den vorstehenden Constructionen statt einer gegebenen zu berührenden geraden Linie eine unendlich weit entfernt liegende zu nehmen. Wir wollen zwei Aufgaben hier hervorheben.

Eine Parabel zu beschreiben, die einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Puncte osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Construction. Es sei OM (Fig. 11.) die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll; cS die gegebene gerade Linie, die der Tangente im Osculationspuncte in c begegnet. Man ziehe die Tangenten cS' und $c'S'$, letztere parallel mit der Tangente im Osculationspuncte, ziehe $S'\Phi$ parallel mit cS, wodurch auf Oc der Punct Φ bestimmt wird. Legt man durch Φ eine zweite Tangente an die gegebene Curve, so berührt dieselbe auch die zu beschreibende Parabel. Den Berührungspunct P auf cS erhält man, indem man N, den Berührungspunct auf cS' mit Φ durch eine gerade Linie verbindet.

Eine Parabel zu beschreiben, die einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Puncte osculirt und überdies durch irgend einen gegebenen Punct geht.

Construction. Es sei O (Fig. 12.) der Osculationspunct und M der gegebene Punct. Man ziehe, parallel mit der Tangente in O und durch M eine gerade Linie, die der gegebenen Curve im Allgemeinen in zwei Puncten begegnen wird; man lege in diesen Puncten zwei Tangenten an die gegebene Curve, und verbinde diejenigen beiden Puncte, in welchen diese beiden Tangenten die Tangente in O schneiden, durch zwei gerade Linien mit dem Puncte M. Diese beiden geraden Linien TM und $T'M$ berühren alsdann diejenigen beiden Parabeln, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, in dem gegebenen Puncte.

60. Wenn wir ein System von zwei Puncten mit zwei sich **doppelt berührenden Curven** zusammenstellen, so erhalten wir folgende beiden Sätze.

Wenn man von irgend zwei Puncten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Ke-

gelschnitte noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie liegen.

Wenn man von irgend zwei Puncten einer der beiden gemeinschaftlichen Tangenten noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Berührungspuncte auf der andern gemeinschaftlichen Tangente in gerader Linie liegen.

Es ergeben sich aus diesen beiden Sätzen und ihren Modificationen eine Reihe von einzelnen Constructionen, die wir übergehen. Wenn die beiden Curven statt des doppelten Contacts einen vierpunctigen haben, so erhalten wir die in der 40. und 41. Nummer unmittelbar bewiesenen Sätze und Constructionen. Als letztes Beispiel wollen wir noch folgende Aufgabe nehmen.

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte vierpunctig berührt.

Construction. (Fig. 13.) Man lege in dem gegebenen Puncte O eine Tangente an die gegebene Curve, und parallel mit ihr eine zweite Tangente; construire ferner irgend eine dritte Tangente, die der ersten in dem Puncte T, der zweiten in dem Puncte S begegne; ziehe OS und parallel hiermit eine gerade Linie durch T. Diese Linie ist alsdann eine Tangente der verlangten Parabel. Man erhält den Berührungspunct P auf dieser Tangente, wenn man den Berührungspunct N auf der obigen dritten Tangente durch eine gerade Linie mit O verbindet.

61. In dieser Nummer wollen wir mit einer Curve zwei Systeme von zwei Puncten zusammenstellen. Nach den Voraussetzungen der 51. Nummer müssen die Puncte der beiden Systeme, etwa wie in der 14. Figur, auf zweien Tangenten bc und $b'c'$ angenommen werden. Die drei Puncte, die in gerader Linie liegen, sind alsdann 1) S der Durchschnitt der neuen von b und b' an die Curve gelegten Tangenten bS und $b'S$; 2) S' der Durchschnitt der neuen von c und c' an die Curve gelegten Tangenten cS' und $c'S'$, und endlich 3) Φ der Durchschnitt von bc' und $b'c$. Der hierin enthaltene Satz ist der bekannte von Brianchon:

Die drei Diagonalen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks gehen durch einen und denselben Punct.

62. Wir können endlich noch drei Systeme von zwei Puncten a und a', b und b', c und c' zusammenstellen, die, etwa wie in der 15. Figur, auf zwei geraden Linien vertheilt liegen. Die drei in gerader Linie liegenden Puncte sind alsdann: $(a, b'; a', b)$, $(a, c'; a', c)$ und $(b, c'; b', c)$ oder S, S' und S''. Da wir beliebig die Puncte jedes Systems mit einander vertauschen können, erhalten wir sechsmal drei solcher Puncte und hiernach folgenden bekannten Satz:

Wenn man auf jeder von zwei gegebenen geraden Linien drei Puncte beliebig annimmt, und diese Puncte durch neue gerade Linien verbindet, so erhält man sechsmal drei Durchschnitte dieser Linien, welche in gerader Linie liegen.

63. Wir gehen zu einem zweiten Schema über. Es sei:

$$A = 0$$

die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der von zweien andern, deren Gleichungen folgende seien:

$$A' = 0, \quad A'' = 0,$$

doppelt berührt wird. Alsdann erhalten wir, bei schicklicher Bestimmung von μ' und μ'', folgende Gleichungen:

$$1. \quad \begin{cases} A - \mu' A' = p^2 = 0, \\ A - \mu'' A'' = q^2 = 0, \end{cases}$$

indem wir durch $p = 0$ und $q = 0$ die Gleichungen des Durchschnittspunctes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und zweiten, und des ersten und dritten Ortes darstellen. Wenn wir die letzten beiden Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$2. \quad \mu' A' - \mu'' A'' = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p) = 0.$$

Da diese Gleichung ein System von zwei Puncten darstellt, so ist sie identisch mit einer Gleichung von folgender Form:

$$a a' = 0,$$

indem $a = 0$ und $a' = 0$ die Durchschnittspuncte der zu zwei und zwei genommenen vier gemeinschaftlichen Tangenten des zweiten und dritten Ortes darstellen. Hiernach müssen die Factoren $(q + p)$ und $(q - p)$ vermittelst gehöriger Coëfficienten den Factoren a und a' des ersten Theiles der letzten Gleichung identisch werden, wonach also die vier durch

$$a = 0, \quad a' = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

dargestellten Puncte in gerader Linie liegen. Also:

Wenn ein Ort zweiter Classe zwei andere, und beide doppelt berührt, so liegen zwei Durchschnitte der vier gemeinschaftlichen Tangenten der letztern und diejenigen beiden Puncte, in welchen die gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jedes der beiden andern Örter sich schneiden, alle vier in gerader Linie.

64. Statt der doppelten Berührung können wir eine **vierpunctige Osculation** nehmen; an die Stelle des Durchschnittspunctes der gemeinschaftlichen Tangenten tritt alsdann der Osculationspunct. Wenn wir mit einer Curve ein **System von zwei Puncten** zusammenstellen, so erhellt unmittelbar aus den Gleichungen, dafs alsdann die beiden Puncte, wenn von einer doppelten Berührung die Rede ist, auf der Curve angenommen werden müssen. Stellt man **zwei Systeme** von zwei Puncten zusammen, so müssen, unter gleicher Voraussetzung, alle vier Puncte in gerader Linie liegen. Hiernach ergeben sich mehrere einzelne Sätze. So erhalten wir z. B., wenn wir als ersten Ort eine Curve und für die beiden andern Örter zwei Puncten-Systeme nehmen, so dafs also eine Curve und auf dem Umfange derselben vier Puncte gegeben sind, folgenden bekannten Satz:

Wenn man in eine Curve zweiter Ordnung ein Viereck beschreibt, dessen Winkelpuncte die Berührungspuncte eines umschriebenen Vierecks sind, so liegen die beiden Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten des erstgenannten und zwei Winkelpuncte des letztgenannten Vierecks in gerader Linie.

65. Wir wollen in dem Folgenden nur noch den einen Fall hervorheben, wo eine gegebene Curve (Fig. 16.) von einer andern doppelt berührt wird, und wir überdies auf dem Umfange derselben zwei Puncte beliebig annehmen. Aus diesem Falle wollen wir mehrere Constructionen herleiten, und zwar zuerst die Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt, und überdies durch irgend zwei gegebene Puncte geht.

Es sei OMN eine Curve, die von OPQ vierpunctig in O osculirt

wird und auf deren Umfange die beiden Puncte M und N liegen. Die von M und N an die zweite Curve gelegten Tangenten bilden eine vierseitige Figur, deren zwei Winkelpuncte S und S' mit dem Osculationspuncte O in gerader Linie liegen (63.). Hiernach ergiebt sich sogleich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn OPQ die gegebene Curve ist und M und N die beiden gegebenen Puncte sind. Man lege von jedem der beiden Puncte M und N zwei Tangenten an die gegebene Curve. Diese beiden Tangenten-Paare schneiden sich in vier Puncten, durch welche sich noch zwei gerade Linien SS' und $S''S'''$ legen lassen. Diese beiden Linien schneiden die gegebene Curve im Allgemeinen in vier Puncten: O, O', O'' und O'''; und diese Puncte sind diejenigen, in welchen die gegebene Curve von denjenigen Curven, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, und deren es also im Allgemeinen vier giebt, osculirt wird.

Nichts hindert uns die vorstehende Construction unmittelbar auch auf den Fall zu übertragen, wo ein gegebener Punct oder auch beide gegebene Puncte unendlich weit liegen; d. h. wo eine Hyperbel verlangt wird und die Richtung einer oder beider Asymptoten derselben gegeben ist.

66. Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene zweimal berührt und überdies durch drei gegebene Puncte geht.

Construction. Indem wir nach einander die gegebene Curve mit zweimal zwei der drei gegebenen Puncte zusammenstellen, erhalten wir wie vorhin zweimal zwei gerade Linien, die sich in vier Puncten schneiden, und diese Puncte sind offenbar diejenigen, in welchen die gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und jeder der vier gesuchten Curven, die im Allgemeinen möglich sind, sich schneiden.

Da drei gegebene Puncte sich auf dreifache Art zu zwei combiniren lassen, so erhalten wir dreimal zwei gerade Linien, die nothwendig durch dieselben vier Puncte gehen müssen. Diese vier Puncte sind diejenigen, in welchen sich die drei Diagonalen von solchen umschriebenen Sechsecken schneiden, die durch die sechs von den drei gegebenen Puncten an die Curve gelegten Tangenten bestimmt werden. Wir haben hiernach auf indirectem Wege den Brianchon'schen Satz vom umschriebenen Sechseck dargethan und zugleich die geometrische Bedeutung

des Durchschnittspunctes der drei Diagonalen nachgewiesen. Es ist nemlich dieser Punct der Durchschnitt der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und einer andern, welche dieselbe doppelt berührt und aufserdem durch die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Sechsecks geht.

67. Damit das Schema der 63. Nummer vollständig werde, müssen wir in den Gleichungen (1.) die Ausdrücke p^2 und q^2, wenigstens einen derselben, mit dem doppelten Vorzeichen nehmen. Statt der Gleichung (2.) erhalten wir alsdann folgende allgemeinere:

$$\mu' A' - \mu'' A'' = \pm(q^2 \pm p^2) = 0.$$

In dem einen bisher unbeachtet gebliebenen Falle, wo in dieser Gleichung p^2 mit dem Zeichen $+$ vorkommt, stellt diese Gleichung nicht mehr zwei Puncte, sondern eine blofse gerade Linie dar. Es sind alsdann die Durchschnitte der (imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven $A' = 0$ und $A'' = 0$ imaginär, liegen aber auf einer reellen geraden Linie (No. 48.), die zugleich die beiden Puncte $p = 0$ und $q = 0$ enthält.

68. Wenn wir zu den beiden Örtern zweiter Classe, die einen gegebenen doppelt berühren, noch einen dritten hinzunehmen, so erhalten wir nach demselben Schema, welches in der 385. Nummer meiner „Entwickelungen" ausgeführt worden ist, folgenden Satz:

Wenn ein gegebener Ort zweiter Classe von dreien andern doppelt berührt wird, so sind diejenigen dreimal zwei Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten je zweier dieser drei letzgenannten Örter, mit denen (nach 63.) die Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jeder der drei übrigen in gerader Linie liegen, die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur.

Diesen Satz ausführlich zu discutiren, verbietet hier der Raum. Nur einige besondere Fälle kann ich nicht ganz unberücksichtigt lassen.

69. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe ein System von zwei Puncten nehmen, und demnach drei Curven erhalten, welche eine gemeinschaftliche, reelle oder ideale Chorde haben, so liegen viermal drei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten dieser drei Curven in gerader Linie. Und endlich auch dann, wenn jene gemeinschaftliche Chorde unendlich weit liegt, d. h. wenn die drei Curven irgend

drei ähnliche und ähnlich liegende, insbesondere also Kreise sind, besteht obiger Satz und erhält alsdann folgende Aussage:

Die Durchschnitte der äufsern und innern (reellen und imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von irgend drei Kreisen sind solche sechs Puncte, von denen viermal drei in gerader Linie liegen.

Wir begegnen also hier einem von jenen beiden Hauptsätzen, die sich auf Zusammenstellungen von Kreisen beziehen. In solchen Verknüpfungen von scheinbar sehr verschiedenen Sätzen liegt der eigenthümliche Character der neuern Geometrie.

70. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe eine Curve nehmen, und für die drei übrigen drei Systeme von zwei Puncten, die alsdann auf dem Umfange der Curve angenommen werden müssen, so erhalten wir wiederum den Pascalschen Satz vom eingeschriebenen Sechseck, der uns eben so oft und ungesucht begegnet, als er eine grofse Rolle in dieser Art von Untersuchungen spielt.

71. Wenn wir für den ersten Ort ein System von zwei Puncten, und für die drei übrigen zwei Curven und ein Puncten-System nehmen, so müssen, den obigen Voraussetzungen gemäfs, diese beiden Curven sich in den beiden Puncten des ersten Systems schneiden, und mit denselben Puncten müssen die Puncte des zweiten Systems in gerader Linie liegen. Hieraach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend zwei Puncten einer gemeinschaftlichen Chorde zweier Curven zweiter Classe vier Tangenten an jede derselben legt, so erhält man zwei vollständige vierseitige Figuren, von denen jede, aufser den beiden Puncten des zweiten Systems, noch zweimal zwei gegenüberliegende Winkelpuncte hat. Zweimal zwei Paare dieser gegenüberliegenden Winkelpuncte bilden mit zwei Durchschnitten der vier gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten der beiden Curven die sechs Winkelpuncte zweier neuen vollständigen vierseitigen Figuren.

Wenn die beiden Puncte des zweiten Puncten-Systems zusammenfallen, so geht der vorstehende Satz in folgenden über:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gemeinschaftlichen (wirklichen oder ideellen) Chorde zweier C...

ven zweiter Classe zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diejenigen vier geraden Linien, welche die Berührungspuncte auf der einen Curve mit den Berührungspuncten auf der andern Curve verbinden, in zwei Durchschnittspuncten der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven.

(Nach der Theorie der Reciprocität erhält man aus diesem Satze dessen Umkehrung; diese findet sich direct bewiesen: Entw. No. 387.).

72. Nach der bisherigen Bezeichnung stellt die Gleichung

$$A'' + \mu' A' + \mu A = 0$$

einen Ort zweiter Classe dar. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$A'' + \mu' A' = 0 \quad \text{und} \quad A = 0,$$
$$A'' + \mu A = 0 \quad - \quad A' = 0$$

setzen. Die beiden Paare der durch die in derselben Zeile befindlichen Gleichungen dargestellten Örter haben also mit dem durch (1.) dargestellten Orte dieselben gemeinschaftlichen Tangenten. Also:

Wenn irgend drei Örter zweiter Classe gegeben sind, so hat jede der beiden ersten mit einem beliebigen Orte, der mit der andern und der dritten dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, vier gemeinschaftliche Tangenten; die acht gemeinschaftlichen Tangenten, die man auf diese Weise erhält, umhüllen denselben Ort zweiter Classe.

73. Aus diesem allgemeinen Satze ergeben sich mehrere zierliche Constructionen. Wir wollen zuerst für die drei gegebenen Örter drei Systeme von zwei Puncten nehmen. Es mögen die Puncte a und a', b und b', c und c' (Fig. 17.) durch die Gleichungen

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0$$

dargestellt werden. Zieht man alsdann:

cb	und	$c'b'$	die sich im	Puncte			m,
cb'	-	$c'b$	-	-	-	-	m',
ca	-	$c'a'$	-	-	-	-	n,
ca'	-	$c'a$	-	-	-	-	n'

schneiden, so können wir die beiden Puncten-Systeme m und m', n und n' durch die beiden Gleichungen

$$A'' + \lambda' A' = 0 \quad - \quad A'' + \lambda A = 0$$

darstellen. Zieht man endlich am, am', $a'm$, $a'm'$, bn, bn', $b'n$ und $b'n'$, so berühren diese **acht** gerade Linien eine und dieselbe Curve zweiter Classe.

Aus diesem Satze lassen sich mehrere einfache, verschieden modificirte Constructionen folgender Aufgabe herleiten:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die fünf gegebene gerade Linien berührt.

Construction. Es seien am, am', $a'm$, $a'm'$ und bn die fünf gegebenen, zu berührenden geraden Linien. Die erste und zweite dieser fünf Linien schneiden sich in a, die dritte und vierte in a', die erste und dritte in m, die zweite und vierte in m'. Auf der fünften geraden Linie nehme man beliebig die beiden Puncte b und n an. Man ziehe:

an	und	bm	die sich im Puncte c,
$a'n$	-	bm'	- - - - c',
cm'	-	$c'm$	- - - - b',
ca'	-	$c'a$	- - - - n'

schneiden. Zieht man endlich bn', $b'n$ und $b'n'$, so berühren diese drei gerade Linien die verlangte Curve.

Aus derselben Figur ergiebt sich sogleich eine zweite Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn man fünf andere gerade Linien als die gegebenen betrachtet. Es seien nemlich am, $a'm$, bn, $b'n$ und $a'm'$ gegeben. Die erste und zweite dieser fünf Linien schneiden sich in m, die dritte und vierte in n, die zweite und fünfte in a'. Man nehme einen Punct c beliebig an, ziehe cm und ca'. Man nehme auf dieser letzten geraden Linie einen Punct c' beliebig an und ziehe

$c'm$	wodurch auf	$b'n$	der Punct b',
cb'	- -	$a'm'$	- - m',
$c'm'$	- -	cm	- - b,
$c'a$	- -	ca'	- - n'

bestimmt wird. Zieht man endlich die drei geraden Linien bn', $b'n'$ und $a'm$, so berühren dieselben die zu bestimmende Curve.

74. Nach der 72. Nummer können wir auch eine Curve zweiter Classe beschreiben, die mit zweien gegebenen dieselben vier imaginären Tangenten hat, und überdies eine gegebene gerade Linie berührt. Als besonderer Fall gehört hierher auch folgende Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die mit einer gegebenen vier imaginäre gemeinschaftliche Tangen-

ten hat, die sich in zwei gegebenen (innerhalb der letztgenannten Curve liegenden) Puncten schneiden, und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Die Curve in der 18. Figur werde durch die Gleichung

$$A = 0,$$

die beiden Puncten-Systeme b und b', c und c' werden durch die beiden Gleichungen

$$A' = 0, \quad A'' = 0$$

dargestellt. Alsdann können wir die beiden Puncten-Systeme m und m' n und n' durch die beiden Gleichungen

$$A'' + \mu' A' = 0, \quad A'' + \mu A = 0$$

darstellen. Und hiernach erhalten wir acht gerade Linien, welche eine und dieselbe Curve berühren, nemlich die vier reellen geraden Linien bn, bn', $b'n$ und $b'n'$ und vier, im Falle der Figur wo die beiden Puncte m und m' innerhalb der gegebenen Curve liegen, imaginäre gerade Linien: die vier imaginären von m und m' an die letztgenannte Curve zu legenden Tangenten. Hiernach ergiebt sich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe, wenn m und m' die beiden gegebenen Puncte sind und bn die gegebene gerade Linie. Man nehme auf dieser Linie zwei Puncte b und n beliebig an, lege durch n zwei Tangenten an die gegebene Curve, ziehe bm welche der einen Tangente in c, und bm' welche der andern Tangente in c' begegne. Durch c und c' lege man noch zwei Tangenten an die gegebene Curve, welche sich in n', und ziehe $c'm$ und cm', welche sich in b' schneiden. Alsdann erhält man drei neue Tangenten der verlangten Curve, wenn man bn', $b'n$ und $b'n'$ zieht.

75. Wenn man annimmt, daſs die beiden gegebenen Puncte m und m' zusammenfallen, so modificirt sich die vorstehende Construction. Man erhält alsdann eine Curve, die mit der gegebenen einen doppelten Contact hat, der imaginär wird, wenn die zusammenfallenden Puncte innerhalb der gegebenen Curve angenommen werden. Werden dieselben auf dem Umfange der Curve angenommen, so erhält man folgende neue Construction einer Curve, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und überdies eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei (Fig. 19.), m der gegebene Osculationspunct auf der gegebenen Curve, nb die gegebene gerade Linie. Von einem beliebigen Puncte derselben, von n, lege man zwei Tagenten an die Curve, die von einer

beliebigen durch m gehenden geraden Linie, die der gegebenen in irgend einem Puncte b begegne, in den Puncten c und c' geschnitten werden. Durch c und c' lege man noch zwei Tangenten an die gegebene Curve, die sich in irgend einem Puncte n' schneiden. Die gerade Linie bn' ist alsdann eine neue Tangente der verlangten Curve.

76. Die Aufgabe, einen Ort zweiter Classe zu beschreiben, der mit zwei gegebenen dieselben vier, reellen oder imaginären, gemeinschaftlichen Tangenten hat und eine gegebene gerade Linie berührt, hat immer eine einzige reelle Auflösung. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie durch zwei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven geht, so ist der verlangte Ort kein anderer, als zwei Puncte dieser Linie oder diese Linie selbst, je nachdem jene beiden Tangenten-Durchschnitte reell oder imaginär sind, und es giebt also keine andere Tangenten des verlangten Ortes als die gegebene Linie selbst. Hiernach ergiebt sich folgende characteristische Eigenschaft einer solchen Linie.

W e n n m a n v o n e i n e m b e l i e b i g e n P u n c t e e i n e r d e r j e n i g e n g e r a d e n L i n i e n, w e l c h e z w e i D u r c h s c h n i t t e d e r v i e r g e m e i n s c h a f t l i c h e n T a n g e n t e n i r g e n d z w e i e r C u r v e n z w e i t e r C l a s s e e n t h a l t e n, z w e i T a n g e n t e n a n d i e e i n e C u r v e l e g t, u n d v o n e i n e m a n d e r n P u n c t e d e r s e l b e n g e r a d e n L i n i e z w e i T a n g e n t e n a n d i e a n d e r e C u r v e; u n d m a n l e g t e n d l i c h v o n z w e i g e g e n ü b e r l i e g e n d e n D u r c h s c h n i t t s p u n c t e n d i e s e r b e i d e n T a n g e n t e n - P a a r e n o c h z w e i T a n g e n t e n a n j e d e d e r b e i d e n C u r v e n; s o s c h n e i d e n s i c h d i e s e z w e i m a l z w e i T a n g e n t e n i n z w e i n e u e n P u n c t e n d e r s e l b e n g e r a d e n L i n i e.

Durch diesen ersten Aufsatz „über eine neue Art Curven durch Gleichungen darzustellen," in welchem ich nicht über gewisse Grenzen hinausgehen wollte, ist der Weg zu allgemeinern Untersuchungen angezeigt.

Bonn, im October 1829 *).

*) Der gegenwärtige Aufsatz enthält Vorbereitungen zu denjenigen Arbeiten über diesen Gegenstand, die der Herr Verfasser in dem unter der Presse befindlichen zweiten Bande seiner „Analytisch-geometrischen Entwickelungen" zu liefern im Begriff ist.
Anm. d. Herausg.

14.

Bemerkungen über höhere Arithmetik.

(Von Herrn Dr. *Stern*, Universitäts-Docenten zu Göttingen.)

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich fast alle auf Untersuchungen, die man in dem berühmten Werke „*Disquisitiones arithmeticae*" von Gaufs findet. Ich werde daher, diese Untersuchungen als bekannt voraussetzend, im Folgenden blofs die Stellen dieses Werkes, auf die ich mich jedesmal beziehe, andeuten.

1.

Es sei g eine Zahl, die zur Potenz d gehört, d. h. deren $d$te Potenz die niedrigste ist, welche für den *mod.* p (unter p verstehe ich immer eine Primzahl) der Einheit congruent ist. Hat die Periode dieser Zahl eine unpaare Anzahl von Gliedern, so kann man diese, wenn man das erste Glied $a^0 = 1$ wegläfst, paarweise so ordnen, dafs das Product eines jeden Paars $\equiv 1$ (*mod.* p) ist. Hat sie aber eine paare Anzahl von Gliedern, so kann man, wenn das erste Glied $a^0 = 1$ und das mittlere $a^{\frac{1}{2}d} \equiv -1$ weggelassen werden, die übrigen wieder auf die angegebene Weise ordnen (vergl. *Disq. arithm. art.* 75.).

Im ersten Falle kann man immer zwei Glieder multipliciren, die die Form a^m, a^{d-m} haben, also ist ihr Product $= a^d \equiv 1$ (*mod.* p). Im zweiten Falle ist, wenn $m = \frac{1}{2}d$ ist, auch $d - m = \frac{1}{2}d$; für alle übrigen Werthe von m ist $d - m \gtrless m$; also entspricht jedem Gliede a^m ein anderes von ihm verschiedenes a^{d-m}, so dafs ihr Product $\equiv 1$ ist.

Für den *mod.* 23 gehört die Zahl 2 zur 11ten Potenz, und ihre Periode besteht aus den Gliedern 1, 2, 4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12. Hier ist: $2.12 \equiv 1$, $4.6 \equiv 1$, $8.3 \equiv 1$, $16.13 \equiv 1$, $9.18 \equiv 1$. Für den *mod.* 41 gehört 2 zur 20sten Potenz, und die Periode besteht, in diesem Falle, aus den Gliedern 1, 2, 4, 8, 16, 32, 23, 5, 10, 20, 40, 39, 37, 33, 25, 9, 18, 36, 31, 21. Hier ist $2.21 \equiv 1$, $4.31 \equiv 1$ u. s. w.

2.

Ist m Primzahl zu d, so ist auch, wie sich leicht beweisen läfst, $d - m$ Primzahl zu d, folglich gehören a^m und a^{d-m} zur Potenz d (*Disq.*

arithm. art. 53.). Hieraus erhält man folgendes Theorem. Das Product aller Zahlen, die für den *mod. p* zur Potenz *d* gehören, ist $\equiv 1$, und zwar kann man diese Zahlen paarweise so ordnen, dafs das Product eines jeden Paars $\equiv 1$ ist. Es versteht sich von selbst, dafs die Fälle $d = 1$, $d = 2$ ausgenommen sind. Einen einzelnen Fall dieses Theorems findet man in *Disq. arithm. art.* 80.

3.

Wenn für den *mod. p* die Zahl x zur Potenz A, die Zahl y zur Potenz B gehört, so gehört die Zahl xy zur Potenz AB, wenn A und B Primzahlen zu einander sind.

Es sei $A = a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots.$, $B = a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.$ und $a, b \ldots., a', b'$ seien unter sich verschiedene Primzahlen. Da $x^{AB} \equiv 1 \ (mod.\ p)$ und $y^{AB} \equiv 1 \ (mod.\ p)$ ist, so ist auch $(xy)^{AB} = (xy)^{a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots} \equiv 1 \ (mod.\ p$ Gehörte xy zu einer Potenz s die kleiner als AB wäre, so müfste nothwendig $s = a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta_{\prime\prime}}\ldots.a'^{\alpha_{\prime\prime\prime}}.b'^{\beta_{\prime\prime\prime}}\ldots.$ und $a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta_{\prime\prime}}\ldots.a'^{\alpha_{\prime\prime\prime}}.b'^{\beta_{\prime\prime\prime}}\ldots.$ ein Factor von $a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots.a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.$ sein, also wenigstens eine der Zahlen $\alpha_{\prime\prime}, \beta_{\prime\prime}, \ldots. \alpha_{\prime\prime\prime}, \beta_{\prime\prime\prime}, \ldots.$ kleiner als $\alpha, \beta \ldots. \alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \ldots.$ resp.; es sei z. B. $\alpha_{\prime\prime} < \alpha$, man erhebe die Zahl $(xy)a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta_{\prime\prime}},\ldots.a'^{\alpha_{\prime\prime\prime}},b'^{\beta_{\prime\prime\prime}}\ldots.$ zur Potenz $b^{\beta-\beta_{\prime\prime}}\ldots.a'^{\alpha_{\prime}-\alpha_{\prime\prime\prime}}.b'^{\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime\prime}}\ldots.$, so ist $(xy)^{a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta}\ldots.a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.} \equiv 1$, folglich auch $x^{a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta}\ldots.a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.} \equiv 1$, weil $y^{a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.} \equiv 1$ ist. Da aber $a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.$ kein Multiplum von $a^{\alpha}.b^{\beta}$ ist, so kann auch $x^{a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots}$ nicht $\equiv 1$ sein, also müfste $x^{a^{\alpha_{\prime\prime}}.b^{\beta}\ldots} \equiv 1$ sein, gegen die Voraussetzung.

Hieraus folgt, dafs, wenn überhaupt n Zahlen zu n verschiedenen Exponenten gehören, die alle unter sich Primzahlen sind, alsdann das Product dieser Zahlen zu einem Exponenten gehört, der dem Producte der n Exponenten gleich ist. Man habe z. B. $x^{a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots} \equiv 1$, $y^{a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots} \equiv 1$, $z^{a''^{\alpha_{\prime\prime}}.b''^{\beta_{\prime\prime}}\ldots} \equiv 1$, so dafs x, y, z resp. zu den Exponenten $a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots.$, $a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.$, $a''^{\alpha_{\prime\prime}}.b''^{\beta_{\prime\prime}}\ldots.$ gehören, und $a, b, \ldots. a', b', \ldots. a'', b'', \ldots.$ unter sich verschiedene Primzahlen bedeuten, so gehört xy zum Exponenten $a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots.a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots.$, folglich xyz zum Exponenten $a^{\alpha}.b^{\beta},\ldots. a'^{\alpha_{\prime}}.b'^{\beta_{\prime}}\ldots. a''^{\alpha_{\prime\prime}}.b''^{\beta_{\prime\prime}}$ u. s. w. Diese Bemerkung führt zu folgendem Theorem:

Die Summe aller Zahlen, die zur Potenz d gehören, ist entweder $\equiv 0 \ (mod.\ p)$ (wenn d durch ein Quadrat dividirbar ist) oder

$\equiv \pm 1$ (*mod. p*) (wenn d ein Product aus unter sich verschiedenen Primzahlen ist), und zwar mufs das positive oder negative Zeichen genommen werden, je nachdem die Anzahl dieser Primzahlen paar oder unpaar ist. Einen einzelnen Fall dieses Theorems findet man in *Disq. arithm. art.* 81. Der dort gegebene Beweis läfst sich ohne Mühe auch auf den allgemeineren Satz ausdehnen, und ich übergehe ihn daher der Kürze halber.

4.

Gehört die Zahl a zu einer unpaaren Potenz d, so kann in ihrer Periode nicht zugleich m und $p-m$ vorkommen, wenn der *mod.* $=p$ ist. Denn es sei $a^l \equiv m$, $a^n \equiv -m$, so wird $a^{2l} \equiv a^{2n} \equiv m^2$, und $a^{2l}(1-a^{2(n-l)}) \equiv 0$, oder $a^{2n}(1-a^{2(l-n)}) \equiv 0$, je nachdem $n >$ oder $< l$ ist, also im ersten Falle $a^{2(n-l)} \equiv 1$, welches unmöglich ist, da $n-l < d$ ist, und also $2(n-l)$ kein Multiplum von d sein kann. Eben so unmöglich ist, im zweiten Falle, die Congruenz $a^{2(l-n)} \equiv 1$. Da 1 in jeder Periode vorkommt, so kann $p-1$ nie in der Periode einer Zahl vorkommen, die zum Exponenten $2n+1$ gehört.

5.

Kommen die Zahlen b, c in der Periode einer Zahl a vor, so kommt auch ihr Product, oder dessen Rest (wenn es $>p$ ist), darin vor. Dies versteht sich von selbst. Kommt b in der Periode der Zahl a vor, und c nicht, so kann auch bc nicht darin vorkommen. Denn es gehöre a zur Potenz d, so ist, nach der Voraussetzung $b^d \equiv 1$, wäre auch $(bc)^d \equiv 1$, so müfste $c^d \equiv 1$ sein, gegen die Voraussetzung. Ist $p = 2n+1$ und a eine Zahl die zur Potenz n gehört, so mufs das Product zweier Zahlen c, d, die nicht in der Periode der Zahl a vorkommen, in dieser Periode vorkommen. Die Zahlen c, d müssen zu Exponenten r, s resp. gehören, die Factoren von $2n$ und nicht Factoren von n sind, da $c^{2n} \equiv 1$, $d^{2n} \equiv 1$ ist (*Disq. arithm. art.* 50.); ist nun $2n = 2^{t+1}.a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots$ und sind a, b unpaare, unter sich verschiedene Primzahlen, so mufs $r = 2^{t+1}.a^{\alpha'}.b^{\beta'}\ldots$, $s = 2^{t+1}.a^{\alpha''}.b^{\beta''}\ldots$ sein, also $c^{2^t.a^{\alpha'}.b^{\beta'}} \equiv -1$, $d^{2^t.a^{\alpha''}.b^{\beta''}} \equiv -1$, und weil $a^{\alpha-\alpha'}.b^{\beta-\beta'}$, $a^{\alpha-\alpha''}.b^{\beta-\beta''}$ unpaare Zahlen sind, auch

$$\left(c^{2^t.a^{\alpha'}.b^{\beta'}\ldots}\right)^{a^{\alpha-\alpha'}.b^{\beta-\beta'}\ldots} \equiv -1, \quad \left(d^{2^t.a^{\alpha''}.b^{\beta''}\ldots}\right)^{a^{\alpha-\alpha''}.b^{\beta-\beta''}\ldots} \equiv -1,$$

folglich $(cd)^{2^t.a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots} = (cd)^n \equiv 1$.

6.

Wenn man alle Zahlen von 1 bis $p-1$ incl. zur $n$ten Potenz erhebt, die dadurch entstehenden Zahlen durch p dividirt und die Reste nimmt, so heifsen diese letzteren, Reste der $n$ten Potenz, die übrigen Zahlen, die $< p$ sind, Nichtreste der $n$ten Potenz. Will man die Anzahl der unter sich verschiedenen Zahlen wissen, die unter den Resten enthalten sind, so mufs man drei Fälle unterscheiden.

I. Ist n Primzahl zu $p-1$, so giebt es $p-1$ verschiedene Reste.

Gäbe es zwei Zahlen a, b, so beschaffen, dafs $a^n \equiv b^n$ wäre, so hätte man auch, wenn die Zahl e zur Potenz $p-1$ gehörte, zwei Zahlen e^m, e^{m+l}, die resp. $\equiv a$, $\equiv b$ wären, also $e^{mn} \equiv e^{n(m+l)}$ und $e^{nl} \equiv 1$; da aber n zu $p-1$ Primzahl ist, so müfste e^n zur $p-1$ten Potenz gehören, und es kann daher nicht $(e^n)^l \equiv 1$ sein, da e immer $< p$ genommen werden kann. Man kann also sagen, dafs, wenn n zu $p-1$ Primzahl ist, die Reste der $n$ten Potenz identisch sind mit den Zahlen, die in der Periode einer Zahl vorkommen, welche zur $p-1$ten Potenz gehört.

II. Ist n ein Factor von $p-1$, so giebt es $\frac{p-1}{n}$ verschiedene Reste, und zwar kommt jeder Rest n mal vor. Sucht man z. B. die Reste der 4ten Potenz für den *mod.* 13, so findet man die Zahlen: 1, 3, 3, 9, 1, 9, 9, 1, 9, 3, 3, 1.

Gehört die Zahl a zur Potenz $\frac{p-1}{n}$, so kann man (nach *Disq. arithm. art.* 71.) immer eine Zahl e finden, die zur Potenz $p-1$ gehört, und deren $n$te Potenz $\equiv a$ ist. Da also $a \equiv e^n$ ist, so sind die in der Periode von a enthaltenen Zahlen, die alle unter sich verschieden sind, und deren Anzahl $= \frac{p-1}{n}$ ist, resp. congruent mit $(e^2)^n$, $(e^3)^n$ u. s. w. Es giebt also in jedem Falle wenigstens $\frac{p-1}{n}$ verschiedene Reste der $n$ten Potenz. Mehr als diese kann es nicht geben. Denn da für jede Zahl r, $r^{p-1} \equiv 1$ (*mod.* p) ist, so ist $(r^n)^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1$, also die $n$te Potenz jeder Zahl, oder deren Rest, in der Periode von a enthalten. Jede der $p-1$ Zahlen, die zur Potenz n erhoben werden sollen, ist congruent mit einer Potenz von e, aber $(e^m)^n \equiv \left(e^{m+\frac{p-1}{n}}\right)^n \equiv \ldots \equiv \left(e^{m+\frac{(n-1)(p-1)}{n}}\right)^n$; also kommt jeder Rest n mal vor. Man kann daher sagen, dafs, wenn n ein Factor von $p-1$ ist, die unter sich verschiedenen Reste der Potenz n identisch sind mit den Zah-

len, die in der Periode einer Zahl vorkommen, welche zur Potenz $\frac{p-1}{n}$ gehört.

III. Ist $n = ab$, $p - 1 = ac$, und sind b, c unter sich Primzahlen, so giebt es c verschiedene Reste der Potenz n, und jeder dieser Reste kommt a mal vor. Ist z. B. $a = 2$, $b = 2$, $c = 5$, so sind die Reste: 1, 5, 4, 3, 9, 9, 3, 4, 5, 1.

Denn, erhebt man zuerst alle Zahlen von 1 bis $p - 1$ incl. zur Potenz a, so erhält man (nach II.) c verschiedene Werthe, die mit den Zahlen identisch sind, welche die Periode einer zur Potenz c gehörenden Zahl A ausmachen; erhebt man alle Zahlen dieser Periode zur Potenz b, so erhält man dieselben Reste, als wenn man alle Zahlen von 1 bis $p - 1$ incl. zur Potenz ab erhöbe; diese Reste müssen aber alle unter sich verschieden und folglich $= c$ sein. Denn da b zu c Primzahl ist, so gehört A^b zur Potenz c, wäre aber die Potenz b zweier Zahlen A^m, A^{m+l}, die in der Periode von A vorkommen, congruent, also $(A^b)^m \equiv (A^b)^{m+l}$, so wäre $(A^b)^l \equiv 1$, welches unmöglich ist, da l immer $< p - 1$ genommen werden kann. Will man daher die Reste der Potenz ab wissen, so braucht man nur die der Potenz a zu suchen, oder die Reste der Potenz ab sind identisch mit den Zahlen, welche die Periode einer zur Potenz c gehörenden Zahl ausmachen, wenn $p - 1 = ac$ ist und b, c unter sich Primzahlen sind.

7.

Aus 5. und 6. folgen mehrere Theoreme.

α) Das Product zweier Reste der Potenz m ist wieder ein Rest dieser Potenz. Das Product eines Restes und eines Nichtrestes der Potenz m ist ein Nichtrest dieser Potenz. Für die zweite Potenz ist das Product zweier Nichtreste ein Rest dieser Potenz.

β) Ist $p = mn + 1$, so mufs, wenn a ein Rest der Potenz n sein soll, $a^m \equiv 1$ sein; ist $n = 2$, so ist in jedem Falle $a^{2m} \equiv 1$, also $a^m \equiv 1$ oder $\equiv -1$, je nachdem g ein Rest oder Nichtrest der 2ten Potenz ist (vergl. *Disq. arithm. art.* 106.).

γ) Es sei n eine unpaare Zahl. Da $p - 1$ immer eine paare Zahl ist, so sind die Reste der Potenz n identisch mit den Gliedern der Periode einer Zahl A, die zu einer paaren Potenz, z. B. zu $2q$, gehört, folglich, da $A^q \equiv -1$ ist, so ist in diesem Falle -1 immer ein Rest der Po-

tenz n. Ist aber n eine paare Zahl $= 2^r.M$, $p-1 = 2^s N$, und M, N sind unpaare Zahlen, so ist -1 ein Rest oder Nichtrest der Potenz n, p, nachdem s gröſser oder nicht gröſser als r ist. Dieses Resultat kann man auch auf folgende Weise aussprechen: Ist n eine unpaare Zahl, so ist die Congruenz $x^n \equiv -1$ (*mod. p*) immer auflösbar, und zwar hat x nur einen Werth der $< p$ ist, wenn n zu $p-1$ Primzahl ist, n Werthe, wenn n ein Factor von $p-1$ ist, und a Werthe, wenn $n = ab$, $p-1 = ac$, und a der gröſste gemeinschaftliche Factor der Zahlen n, $p-1$ ist. Ist aber n eine paare Zahl, so ist die Congruenz $x^n \equiv -1$ nur dann auflösbar, wenn in $p-1$ der Factor 2 zu einer höheren Potenz erhoben vorkommt als in n; im entgegengesetzten Falle ist sie unauflösbar.

8.

Das Product der unter sich verschiedenen Reste der Potenz n ist $\equiv \pm 1$, und zwar immer $\equiv -1$, wenn n eine unpaare Zahl ist; ist aber $n = 2^r.M$, $p-1 = 2^s N$, und sind M, N unpaare Zahlen, so ist das Product $\equiv -1$, oder $\equiv +1$, je nachdem s gröſser oder nicht gröſser als r ist. Dies folgt aus 1 und 6.

9.

Die Summe der Reste der $n$ten Potenz ist $\equiv 0$ (*mod. p*). Ausgenommen ist der Fall $n = p-1$, weil alsdann alle $p-1$ Reste $= 1$ sind. (Nach *Disq. arithm. art.* 79.)

10.

Es ist bekannt, daſs es nur in wenigen Fällen möglich ist, die primitiven Wurzeln direct zu bestimmen (vergl. *Disq. arithm. art.* 73.). Dies ist aber sehr häufig möglich, wenn $p-1 = 2.a.b.c\ldots$ ist, und $a, b, c\ldots$ unter sich verschiedene unpaare Primzahlen bedeuten. Man nehme eine beliebige Zahl, z. B. 2, erhebe diese zur Potenz $2bc\ldots$, und es sei $2^{bc\ldots} \equiv m$ (*mod. p*), eben so sei $2^{\frac{p-1}{b}} \equiv n$ (*mod. p*), $2^{\frac{p-1}{q}} \equiv l$ (*mod. p*), u. s. w. Ist nun keine der Zahlen m, n, $l\ldots \equiv 1$, so ist das Product $(p-1)m.n.l\ldots$, oder dessen Rest nach dem *mod. p* eine primitive Wurzel.

Nach 6. II. kommt m in der Periode einer Zahl d vor, die zur Potenz a gehört, und gehört selbst zur Potenz α da c eine Primzahl ist), wenn nicht $m \equiv d^0$, d. h. $\equiv 1$ ist. Unter derselben Bedingung gehört n zur Potenz q, l zur Potenz r u. s. w.: $p-1$ aber gehört zur zweiten Po-

tenz, folglich $(p-1)m.n.l\ldots.$, oder dessen Rest, zur Potenz $2.a.b.c\ldots.$ $=p-1$ (nach 3.). Sucht man z. B. eine primitive Wurzel für den *mod.* 211, so ist $p-1 = 2.3.5.7$, $2^{70} \equiv 171$, $2^{42} \equiv 184$, $2^{30} \equiv 196$. und $171.184.196.210 \equiv -40.-27.-15.-1 \equiv 164$.

Ist eine der Zahlen $m, n, l, \ldots. \equiv 1$, z. B. die Zahl m, so nehme man nur statt $2^{2bc\ldots}$ eine andere Zahl, z. B. $3^{2bc\ldots}$; ist auch diese $\equiv 1$, so nehme man $5^{2bc\ldots}$ und fahre so fort bis man eine Primzahl A findet, deren $2bc\ldots.$te Potenz nicht $\equiv 1$ ist, und substituire diese oder ihren Rest statt m in das Product.

Ist $p-1 = 2^{\nu}.a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots.$ und sind $a, b, c\ldots.$ unpaare, unter sich verschiedene Primzahlen, so kann man in jedem Falle durch ein dem obigen ähnliches Verfahren eine Zahl finden, die zur Potenz $2.a.b.c\ldots.$ gehört, und auch dies ist beim Aufsuchen der primitiven Wurzeln von Nutzen.

11.

Ist $p = 2q+1$, und q eine unpaare Primzahl, so ist 2 oder -2 eine primitive Wurzel, je nachdem $p = 8n+3$ oder $8n+7$ ist. Denn eine Zahl a kann für den *mod.* p nur zur 1ten, 2ten, $q$ten oder $2q$ten Potenz gehören: nun gehört (nach *Disq. arithm. art.* 112. 113.) für $p = 8n+3$ die Zahl 2, und für $p = 8n+7$ die Zahl -2 nicht zur Potenz q, ferner sind 2^2 und $(-2)^2$ nur für den *mod.* 3, $\equiv 1$, also gehört 2 oder -2 zur Potenz $2q$, je nachdem $p = 8n+3$ oder $8n+7$ ist.

Ist $p = 4q+1$ und q eine Primzahl, so kann eine Zahl a für diesen *mod.* nur zu einer der Potenzen 1, 2, 4, q, $2q$, $4q$ gehören. Nach *Disq. arithm. art.* 112. gehört ± 2 weder zur Potenz q noch zur Potenz $2q$, zur Potenz 2 gehört nur $p-1$, und da $(\pm 2)^4 = 16$ ist, so gehört ± 2 nur für den *mod.* 5 zur Potenz 4, also ist für jeden *mod.* $p = 4q+1$, sowohl $+2$ als -2 eine primitive Wurzel.

Es lassen sich sehr leicht auf diesem Wege noch andere Fälle finden, in welchen man eine primitive Wurzel direct bestimmen kann. So z. B. ist (nach *Disq. arithm. art.* 118.), wenn $p = 12n+5$ ist, ± 3 ein Nichtrest der 2ten Potenz; ist nun $p = 4(3n+1)+1$ und $3n+1$ eine Primzahl $= q$, so kann ± 3 nur zu einer der Potenzen 4, $4q$ gehören; da nun $3^4 = 81$ ist, so ist für alle Zahlen $p = 4q+1$, die > 81 sind, sowohl $+3$ als -3 primitive Wurzel; Zahlen, die < 81 sind, giebt es nur drei der angegebenen Form, 5, 29, 53, und auch für diese gehören ± 3 zur Potenz $4q$.

12.

Will man über die Theorie der cubischen Reste oder der Reste der 3ten Potenz Untersuchungen anstellen, so mufs man (nach 6.) bei den *modd.* zwei Classen unterscheiden; zur ersten Classe gehören die *modd.* $p = 3n + 2$, und für diese ist jede Zahl $< p$ ein Rest, zur anderen Classe gehören die *modd.* $p = 3n + 1$, für welche es immer n unter sich verschiedene Reste der 3ten Potenz giebt. Ich werde im Folgenden unter p immer eine Zahl der zweiten Classe verstehen.

Da in der Form $p = 3n + 1$, n eine paare Zahl ist, so folgt aus 8. dafs

-1 für jeden *mod.* p ein cubischer Rest ist,

und aus 7. a), dafs überhaupt, wenn m ein cubischer Rest ist, auch $-m$ ein solcher ist.

13.

Sucht man die Zahlen p, für welche ± 2 ein cubischer Rest ist, so findet man, dafs unter den Zahlen 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, 103, 109, 127, 139, 151 folgende: 31, 43, 109, 127, diese Eigenschaft haben, und man entdeckt bald durch Induction, wodurch sich letztere Zahlen von den übrigen unterscheiden. Es ist bekannt, dafs jede Primzahl von der Form $3n + 1$ unter die Form $a^2 + 3b^2$ gebracht werden kann, und zwar nur auf Eine Weise (*Disq. arithm. art.* 182.). Wendet man dieses auf die oben angegebenen Zahlen an, so findet man: $7 = 2^2 + 3.1$, $13 = 1 + 3.2^2$, $19 = 4^2 + 3.1$, $31 = 2^2 + 3.3^2$, $37 = 5^2 + 3.2^2$, $43 = 4^2 + 3.3^2$, $61 = 7^2 + 3.2^2$, $67 = 8^2 + 3.1$, $73 = 5^2 + 3.4^2$, $79 = 2^2 + 3.5^2$, $97 = 7^2 + 3.4^2$, $103 = 10^2 + 3.1$, $109 = 1 + 3.6^2$, $127 = 10^2 + 3.3^2$, $139 = 8^2 + 3.5^2$, $151 = 2^2 + 3.7^2$, und man bemerkt sogleich, dafs bei den Zahlen 31, 43, 109, 127, und bei keiner der übrigen Zahlen, $b = 3m$ ist. Ich werde nun beweisen *), dafs **± 2 immer ein cubischer Rest ist, wenn $p = a^2 + 3b^2$, und $b = 3m$ ist**, mit anderen Worten, wenn $p = a^2 + 27m^2$ ist; **im entgegengesetzten Falle kann ± 2 kein cubischer Rest sein.**

Wenn g eine Zahl ist, die zur Potenz $3n$ gehört, so sind die cubischen Reste resp. congruent mit den Zahlen g^0, g^3, g^6, ... g^{3n-3} (nach 6. II.), der Inbegriff dieser Zahlen heifse die **Classe A.** Multi-

---

*) Der folgende Beweis ist eine blofse Anwendung der Principien, die Gaufs in seiner Abhandlung „*De residuis biquadraticis*" (*Comm. soc. Gott. rec. Vol. VI.*) gegeben hat. Man vergleiche auch *Disq. arithm. art.* 358.

plicirt man alle Glieder der Classe A mit g, so erhält man die Zahlen: g, g^4, ... g^{3n-2}; der Inbegriff dieser Zahlen heifse die Classe B. Multiplicirt man alle Glieder der Classe B mit g, so erhält man die Zahlen g^2, g^5, ... g^{3n-1}, deren Inbegriff die Classe C heifsen möge. Bezeichnet man nun unbestimmte Zahlen aus der Classe A, durch α, α', α'' etc., und eben so durch β, β', β'' etc., γ, γ', γ'' etc. unbestimmte Zahlen aus den Classen B, C resp., so ist klar, dafs für den *mod.* p $\alpha.\alpha' = \alpha''$, $\alpha.\beta = \beta'$, $\alpha\gamma = \gamma'$, $\beta\beta' = \gamma$, $\beta\gamma = \alpha$, $\gamma\gamma' = \beta$ ist.

14.

Die Menge der Zahlen aus der Classe A, welchen unmittelbar eine Zahl aus der Classe A, B, C folgt, soll durch (AA), (AB), (AC) resp. bezeichnet werden; eben so soll (BA), (BB), (BC) die Menge der Zahlen aus der Classe B bezeichnen, welchen eine Zahl aus der Classe A, B, C resp. unmittelbar folgt, und man sieht hieraus leicht, was durch (CA), (CB), (CC) ausgedrückt werden soll. Behält man die in 13. angegebene Bezeichnung bei, so bezeichnet (AA) die Menge der Auflösungen, welche die Gleichung $\alpha + 1 = \alpha'$ zuläfst. Da aber α und $p - \alpha$ nach 12. immer zu derselben Classe A gehören, so kann man sagen, AA bezeichne die Menge der Auflösungen, welche die Gleichung $\alpha + 1 = p - \alpha'$ oder die Congruenz $\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$ (*mod.* p) zuläfst. Eben so bezeichnet (AB), (AC) die Menge der Auflösungen, welche die Congruenz $1 + \alpha + \beta \equiv 0$, $1 + \alpha + \gamma \equiv 0$ resp. zuläfst. Sucht man eben so was (BA), (CB), (CA) bezeichnet, so findet man sogleich $(AB) = (BA)$, $(AC) = (CA)$, $(BC) = (CB)$.

(BB) ist die Menge der Auflösungen, welche die Congruenz $1 + \beta + \beta' \equiv 0$ (*mod.* p) zuläfst. Man suche eine Zahl m, welche der Congruenz $\beta m \equiv 1$ (*mod.* p) Genüge leistet (m mufs nach 13. $= \gamma$ sein), und setze $\beta'\gamma = \alpha''$, so hat die Congruenz $1 + \beta + \beta' \equiv 0$ eben so viel Auflösungen wie die Congruenz $\gamma + 1 + \alpha'' \equiv 0$, also ist $(BB) = (AC)$. Eben so findet man $(CC) = (AB)$.

Auf diese Weise sind die neun Gröfsen (AA), (AB), (AC), (BA) etc. auf vier (AA), (AB), (AC), (BC) zurückgeführt.

Auf jede der in der Classe A enthaltenen Zahlen, $p - 1$ ausgenommen, mufs eine Zahl aus einer der Classen A, B, C folgen, also ist

$$(AA) + (AB) + (AC) = n - 1.$$

Eben so ist $(BA)+(BB)+(BC)=(AB)+(AC)+(BC)=n$, und daher $(BC)-(AA)=1$.

15.

Eine andere Gleichung erhält man, wenn man die Menge der Auflösungen sucht, welche die Congruenz $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$ zuläfst (wo α, β, γ dasselbe wie in 13. bezeichnen). $1+\alpha$ ist nothwendig entweder $=\alpha'$, oder $=\beta'$, oder $=\gamma'$. Man mufs daher untersuchen, wie viel Auflösungen die Congruenzen $\alpha'+\beta+\gamma\equiv 0$, $\beta'+\beta+\gamma\equiv 0$, $\gamma'+\beta+\gamma\equiv 0$ zulassen, um die Anzahl der Werthe zu finden, welche der Congruenz $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$ Genüge leisten. Die Congruenz $\alpha'+\beta+\gamma\equiv 0$ kann auf eben so viel Arten aufgelöst werden, wie die Congruenz $1+\beta'+\gamma'\equiv 0$ (wenn $\beta=\alpha'\beta'$, $\gamma=\alpha'\gamma'$ gesetzt wird), d. h. sie hat (BC) verschiedene Auflösungen. Die Congruenz $\beta'+\beta+\gamma\equiv 0$ hat eben so viel Auflösungen wie die Congruenz $1+\alpha+\beta\equiv 0$, d. h. sie hat (AB) verschiedene Auflösungen (wenn $\beta'\alpha=\beta$, $\beta'\beta=\gamma$ gesetzt wird). Eben so findet man, dafs die Congruenz $\gamma'+\beta+\gamma\equiv 0$, (BC) verschiedene Auflösungen hat. Da aber die Congruenzen $\alpha+1=\alpha'$, $\alpha+1=\beta'$, $\alpha+1=\gamma'$, (AA), (AB), (AC) Auflösungen resp. haben, so hat die Congruenz $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$, $(AA)(BC)+(AB)^2+(AC)^2$ verschiedene Auflösungen. Die Anzahl der Auflösungen der Congruenz $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$ kann man aber auch erhalten, wenn man $1+\beta$ successiv $=\alpha'$, $=\beta'$, $=\gamma'$ setzt, und dann untersucht, auf wie viel Arten die Congruenzen $\alpha'+\alpha+\gamma\equiv 0$, $\beta'+\alpha+\gamma\equiv 0$, $\gamma'+\alpha+\gamma\equiv 0$ aufgelöst werden können. Auf diesem Wege findet man, dafs die Congruenz $1+\alpha+\beta+\gamma\equiv 0$, $(AB)(AC)+(AC)(BC)+(AB)(BC)$ Auflösungen hat, folglich ist

$$(AA)(BC)+(AB)^2+(AC)^2=(AC)(BC)+(AB)(BC)+(AB)(AC).$$

Substituirt man für AA seinen Werth $BC-1$, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$(BC)^2+(AB)^2+(AC)^2-(AC)(BC)-(AB)(BC)-(AB)(AC)=BC, \text{ oder}$$

$$12BC+12AC+12AB+4$$
$$=36\{(BC)^2+(AB)^2+(AC)^2-(AC)(BC)-(AB)(AC)-(AB)(BC)\}$$
$$-24BC+12AC+12AB+4,$$

und da $AB+AC+BC=n$ ist,

$$12n+4=(6BC-3AB-3AC-2)^2+27(AB-AC)^2=P^2+27Q^2,$$

wenn man
$$(6BC-3AB-3AC-2)=\pm P,$$
$$(AB-AC)\qquad=\pm Q$$

setzt. Da aber, wie sich leicht beweisen läfst, $12n+4$ nur auf eine Weise unter die Form g^2+27h^2 gebracht werden kann, so sind P^2 und Q^2 bestimmte Zahlen. Nimmt man keine Rücksicht auf die Zeichen von P und Q, so kann man die vier Gröfsen (AA), (AB), (AC), (BC) aus den vier Gleichungen $(AA)+(AB)+(AC)=n-1$, $(BA)+(AC)+(BC)=n$, $6(BC)-3(AB)-3(AC)-2=P$, $(AB)-(AC)=Q$ bestimmen, und zwar ist

$$18(AA)=2P-14+6n,$$
$$18(AB)=6n-2+9Q-P,$$
$$18(AC)=6n-2-9Q-P,$$
$$18(BC)=2P+4+6n.$$

16.

Die Zahlen P und Q sind nothwendig entweder beide paar oder beide unpaar; im ersten Falle kann $p=3n+1$ immer unter die Form a^2+27m^2 gebracht werden (indem man $a=\frac{P}{2}$, $m=\frac{Q}{2}$ setzt), im zweiten Falle niemals (weil sonst $12n+4$ auf zwei Arten durch die Form g^2+27h^2 ausgedrückt werden könnte). Aus der Gleichung $9(AA)=P-7+3n$ folgt, dafs (AA) paar oder unpaar ist, je nachdem P unpaar oder paar ist, da n immer paar ist. Sind aber die Zahlen α und $\alpha+1$ in der Classe A enthalten, so sind auch $p-\alpha$, $p-\alpha-1$ in dieser Classe enthalten, also ist (AA) immer eine paare Zahl, ausgenommen wenn $\alpha=\frac{p-1}{2}$ ist; in diesem letzteren Falle gehört aber nothwendig auch 2 zur Classe A, folglich ist (AA) unpaar oder paar, je nachdem 2 in der Classe A, oder in einer der andern Classen enthalten ist, und umgekehrt; **die Zahl 2 ist also ein cubischer Rest oder Nichtrest, je nachdem p in der Form a^2+27m^2 enthalten oder nicht enthalten ist,** oder: **wenn $4p=g^2+27h^2$, so ist ± 2 ein cubischer Rest oder Nichtrest, je nachdem die Zahlen g, h paar oder unpaar sind.** Da 8 eine Cubikzahl ist, so ist 4 immer zugleich mit 2 ein cubischer Rest oder Nichtrest (nach 7. α.).

17.

Es seien α, β, γ unbestimmte Zahlen aus den Classen A, B, C resp., so ist $\alpha^{\frac{p-1}{3}}\equiv 1 \pmod{p}$; ist ferner $\beta^{\frac{p-1}{3}}\equiv f$, so ist $f^3\equiv 1 \pmod{p}$ und $\gamma^{\frac{p-1}{3}}\equiv f^2$.

Substituirt man in dem Ausdrucke $\Sigma(x^3+1)^{\frac{p-1}{3}}$ für x alle ganze Zah-

len von 1 bis $p-1$ incl., so ist

$$\Sigma(x^3+1)^{\frac{p-1}{3}} \equiv -2 \equiv 3(AA)+3f(AB)+3f^2(AC) \text{ oder}$$
$$-4 \equiv 6(AA)+6f(AB)+6f^2(AC) \ (mod.\ p)\ ^{*}).$$

Es ist aber $1+f+f^2 = \frac{f^3-1}{f-1}$, oder, da f nicht der Einheit gleich sein kann und $f^3 \equiv 1$ ist, $1+f+f^2 \equiv 0$ $(mod.p)$, also $f^2 \equiv -(1+f)$; setzt man daher in die obige Formel $-(1+f)$ für f^2, und substituirt zugleich für (AA), (AB), (AC) die in 15. gefundenen Werthe, so erhält man $-4 \equiv P-4+6fQ+3Q$, also

$$P \equiv -3Q(1+2f).$$

Ferner ist $\Sigma(x^3+1)^{\frac{2(p-1)}{3}} \equiv -2-R$, wo R den Binomial-Coëfficienten des Gliedes bedeutet, in dem x^{p-1} vorkommt. Man hat daher $-2-R \equiv 3(AA)+3f^2(AB)+3f(AC)$, und erhält hieraus durch Substitution, $-4-2R \equiv P-4-3Q-6fQ \equiv P-4+P$, also $P \equiv -R$.

Wahrscheinlich ist es möglich, auf eine ähnliche Weise auch Q auf directem Wege zu bestimmen, jedoch ist es mir noch nicht gelungen, den Ausdruck dafür zu finden.

Aus $\Sigma(x^3+1)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 3(AA)+3f(AB)+3f^2(AC)$ folgt:

$$\Sigma(x^3+1)^{p-1} \equiv 3(AA)+3(AB)+3(AC).$$

Entwickelt man aber $(x^3+1)^{p-1}$ nach der Binomialformel, so haben die zwei Glieder, in welchen x^{p-1} und $x^{2(p-1)}$ vorkommt, gleiche Binomial-Coëfficienten. Setzt man diesen Coëfficienten $= T$, so ist

$$\Sigma(x^3+1)^{p-1} \equiv -2-2T \text{ und}$$
$$-2-2T \equiv 3(AA)+3(AB)+3(AC) \equiv 3n-3 \text{ (nach 14.)},$$

folglich $\quad 2-2T \equiv 0$, und $T \equiv 1$ $(mod.\ p)$.

18.

Wenn $4p = g^2+27h^2$ ist, so sind die Zahlen g, h entweder beide cubische Reste oder beide cubische Nichtreste der Zahl p. Denn es ist

$$g^2 \equiv (-3)^3.h^2, \text{ oder } g^{\frac{p-1}{3}} \equiv (-3)^{\frac{p-1}{2}}.h^{\frac{p-1}{3}} \ (mod.p);$$

aber $(-3)^{\frac{p-1}{2}}$ ist $\equiv 1$ $(mod.\ p)$ (*Disq. arithm. art.* 119.), also $g^{\frac{p-1}{3}} \equiv h^{\frac{p-1}{3}}$. Ist daher eine der Zahlen g, h, z. B. g, ein cubischer Rest der Zahl p, so ist $g^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$, und daher auch $h^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$, oder h ein cubischer Rest der Zahl p.

*) Man vergleiche die oben angeführte Abhandlung *De resid. biq. art.* 19.

15.

Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen.

(Von Herrn Dr. *Minding* zu Berlin.)

Die Gröfse $\frac{\cos i}{R}$, welche im Sinne der in dem Aufsatze 22. des vorigen Bandes gebrauchten Bezeichnung den umgekehrten Werth des Krümmungshalbmessers ϱ einer auf die Ebene abgewickelten Curve bezeichnet, läfst sich auf ähnliche Weise allgemein ausdrücken, wie das Maafs der (*mensura curvaturae*) in den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von Gaufs dargestellt wird. Setzt man nemlich, wie in dieser Abhandlung geschieht:

$$dx = a\,dp + a'\,dq\,.\; dy = b\,dp + b'\,dq\,.\; dz = c\,dp + c'\,dq,$$

indem man die Coordinaten x, y, z als gegebene Functionen zweier Veränderlichen p und q ansieht; ferner:

$$a^2 + b^2 + c^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = F, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$

so hängt ϱ von den Gröfsen E, F, G, und ihren Differentialen, so wie von den Differentialquotienten $\frac{dp}{dq}$, $\frac{d^2p}{dq^2}$ ab, welche durch die Gleichung der Curve bestimmt werden.

Ist die Differentialgleichung der Fläche:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

so erhält man:

$$X : Y : Z = cb' - bc' : ac' - ca' : ba' - ab',$$

mithin für die Tangential-Ebene:

$$(cb' - bc')x + (ac' - ca')y + (ba' - ab')z + \alpha = 0.$$

Für die anschliefsende Ebene hat man:

$$Ax + By + Cz + \beta = 0,$$

wo $A = dz\,d^2y - dy\,d^2z$, $B = dx\,d^2z - dz\,d^2x$, $C = dy\,d^2x - dx\,d^2y$. Drückt man nun die Coordinaten durch p und q aus, so erhält man:

$$A = (c\,db - b\,dc)\,dp^2 + (c'\,db' - b'\,dc')\,dq^2$$
$$+ (c\,db' + c'\,db - b\,dc' - b'\,dc)\,dp\,dq + (cb' - bc')(dp\,d^2q - dq\,d^2p).$$
$$B = (a\,dc - c\,da)\,dp^2 + (a'\,dc' - c'\,da')\,dq^2$$
$$+ (a\,dc' + a'\,dc - c\,da' - c'\,da)\,dp\,dq + (ac' - ca')(dp\,d^2q - dq\,d^2p).$$

$$C = (b\,d\,a - a\,d\,b)\,d\,p^2 + (b'\,d\,a' - a'\,d\,b')\,d\,q^2$$
$$+ (b\,d\,a' + b'\,d\,a - a\,d\,b' - a'\,d\,b)\,d\,p\,d\,q + (b\,a' - a\,b')(d\,p\,d^2 q - d\,q\,d^2 p).$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke erhält man den Zähler Z von $\cos i$:

$$Z = (c\,b' - b\,c')A + (a\,c' - c\,a')B + (b\,a' - a\,b')C =$$
$$\{(E\,a' - F\,a)\,d\,a + (E\,b' - F\,b)\,d\,b + (E\,c' - F\,c)\,d\,c\}\,d\,p^2$$
$$+ \{(F\,a' - G\,a)\,d\,a' + (F\,b' - G\,b)\,d\,b' + (F\,c' - G\,c)\,d\,c'\}\,d\,q^2$$
$$+ \left\{\begin{array}{l} + (E\,a' - F\,a)\,d\,a' + (F\,a' - G\,a)\,d\,a \\ + (E\,b' - F\,b)\,d\,b' + (F\,b' - G\,b)\,d\,b \\ + (E\,c' - F\,c)\,d\,c' + (F\,c' - G\,c)\,d\,c \end{array}\right\} d\,p\,d\,q$$
$$+ (EG - FF)(d\,p\,d^2 q - d\,q\,d^2 p).$$

Nun hat man, vermöge der Bedeutung der Gröfsen a, b, c, a', b', c':

$$\frac{d\,a}{d\,q} = \frac{d\,a'}{d\,p}, \quad \frac{d\,b}{d\,q} = \frac{d\,b'}{d\,p}, \quad \frac{d\,c}{d\,q} = \frac{d\,c'}{d\,p},$$

woraus sich ergiebt:

$$a\,d\,a' + b\,d\,b' + c\,d\,c' = \tfrac{1}{2}\frac{d\,E}{d\,q}\,d\,p + \left(\frac{d\,F}{d\,q} - \tfrac{1}{2}\frac{d\,G}{d\,p}\right)d\,q,$$
$$a'\,d\,a + b'\,d\,b + c'\,d\,c = \tfrac{1}{2}\frac{d\,G}{d\,p}\,d\,q + \left(\frac{d\,F}{d\,p} - \tfrac{1}{2}\frac{d\,E}{d\,q}\right)d\,p.$$

Daher erhält man endlich für Z folgenden Werth:

$$\left\{F\left(\tfrac{1}{2}\frac{d\,G}{d\,p}\,d\,q + \frac{d\,F}{d\,p}\,d\,p - \tfrac{1}{2}\frac{d\,E}{d\,q}\,d\,p\right) - \tfrac{1}{2}F\,d\,E\right\}d\,p^2$$
$$+ \left\{\tfrac{1}{2}F\,d\,G - G\left(\tfrac{1}{2}\frac{d\,E}{d\,q}\,d\,p + \frac{d\,F}{d\,q}\,d\,q - \tfrac{1}{2}\frac{d\,G}{d\,p}\,d\,q\right)\right\}d\,q^2$$
$$+ \left\{\tfrac{1}{2}E\,d\,G - \tfrac{1}{2}G\,d\,E + F\left(\frac{d\,F}{d\,p}\,d\,p - \frac{d\,F}{d\,q}\,d\,q + \frac{d\,G}{d\,p}\,d\,q - \frac{d\,E}{d\,q}\,d\,q\right)\right\}d\,p\,d\,q$$
$$+ (EG - FF)(d\,p\,d^2 q - d\,q\,d^2 p).$$

Man hat nun
$$\cos i = \frac{Z}{\sqrt{(EG - FF)}\,.\,\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Ferner hat man für den Krümmungshalbmesser R:

$$R = \frac{d\,P^3}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},$$

wo

$$d\,P^2 = E\,d\,p^2 + 2F\,d\,p\,d\,q + G\,d\,q^2 = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2.$$

Also:
$$\frac{\cos i}{R} = \frac{1}{\varrho} = \frac{Z}{\sqrt{EG - FF)}\,d\,P^3}.$$

Läfst man p und q Polarcoordinaten auf der Fläche bedeuten, d. h. setzt man nach den frühern Bezeichnungen $p = s$, $q = \psi$, so erhält man:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2, \quad d\,P^2 = d\,s^2 + \varphi^2 d\,\psi^2.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{dP^3}{\varrho} + \varphi\, d\psi\, d^2 s - 2\frac{d\varphi}{ds} d\psi\, ds^2 - \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi^2 ds - \varphi^2 \frac{d\varphi}{ds} d\psi^3 = 0,$$

wenn man $d^2\psi = 0$ setzt. Ferner hat man:

$$\frac{d\frac{dy}{dP} + q\, d\frac{dz}{dP}}{dx\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = \frac{1}{\varrho}.$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Formen für $\frac{1}{\varrho}$ geht hervor, dafs man für eine Curve, deren Gleichung in dem Ausdrucke: $s = \text{const.}$ enthalten ist, auch die folgende Relation hat:

$$(A.) \quad d\frac{dy}{dP} + q\, d\frac{dz}{dP} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{1}{\varphi}.$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck enthält im Allgemeinen, aufser der veränderlichen Gröfse ψ, auch noch die Coordinaten des Mittelpuncts der Curve, welche noch vermittelst der Gleichungen $s = \text{const.}$ und $ds = 0$ eliminirt werden müfsten, wenn (*A.*) die allgemeine Differentialgleichung für eine Curve von constantem Radius auf der Fläche sein sollte. Die Gröfsen α, β, ψ fallen aber aus demselben von selbst hinweg auf denjenigen Flächen, auf welchen das Maafs der Krümmung constant ist.

Bezeichnet man dasselbe mit k, so lehrt der 19te §. der erwähnten Abhandlung von **Gaufs**, dafs allgemein:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + k\varphi = 0.$$

Die Function φ (welche dort mit m bezeichnet wird) mufs so beschaffen sein, dafs für $s = 0$, $\varphi = 0$ und $\frac{d\varphi}{ds} = 1$. Hieraus folgt, wenn k constant ist, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin s\sqrt{k}$. In diesem Falle geht also die Gleichung (*A.*) über in:

$$\frac{d\frac{dy}{dP} + q\, d\frac{dz}{dP}}{dx\sqrt{1+p^2+q^2}} = \sqrt{k} \cot s\sqrt{k}.$$

Daher gilt auf diesen Flächen der Satz, welchen allgemein aufzustellen ich durch seine Voraussetzung verleitet ward, deren Grund man Seite 303. des vorigen Bandes kurz angedeutet findet.

Berlin, im Mai 1830.

16.

Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen.

(Von Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im vorigen Hefte.)

Neunter Abschnitt.

Vermittelung zwischen den hyperbolischen und cyklischen Functionen durch Longitudinalfunctionen.

§. 35.

Die Beziehungen unter den hyperbolischen Functionen eines und desselben Arcus lassen sich in ähnlicher Weise, wie die Beziehungen unter den cyklischen Functionen eines Arcus an einem ebenen Dreiecke nachweisen. Es sei ABC (Taf. II. Fig. 20.) ein ebenes Dreieck, dessen Winkel durch A, B, C bezeichnet sein mögen; die Seiten heißen a, b, c, und zwar in der Ordnung, in welcher sie den ähnlich benannten Winkeln gegenüberliegen

Wäre nun etwa der Winkel C ein rechter, so wäre

$$\sin A = \frac{a}{c};\quad \cos A = \frac{b}{c}\quad \text{und}\quad \operatorname{tang} A = \frac{a}{b}.$$

Die drei cyklischen Functionen $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tang} A$ wären also auf den Winkel A, oder richtiger auf eine unbenannte Zahl als ihren gemeinschaftlichen Arcus bezogen, welche durch $\frac{A.\pi}{180}$ ausgedrückt wird, wenn A in Graden der alten Eintheilung angegeben wird, und durch $\frac{A\pi}{200}$, wenn der Winkel A in Graden der neuen Eintheilung gegeben ist.

Man lasse nun aber einmal den Winkel C unbestimmt, damit er nicht gerade ein rechter sei, und denke sich einen von dem Winkel A in anderer Weise ebenfalls abhängenden Arcus x, auf welchen die hyperbolischen Functionen bezogen werden sollen. Setzt man dann wieder:

$$1.\quad \mathfrak{Sin}\, x = \frac{a}{c},\quad \mathfrak{Cos}\, x = \frac{b}{c}\quad \text{und}\quad \mathfrak{Tang}\, x = \frac{a}{b},$$

und wird die Abhängigkeit des Arcus x vom Winkel A oder vom vorigen Arcus etwa durch $x = \varphi A$ vorgestellt, so müssen den Beziehungen unter diesen drei hyperbolischen Functionen die Beziehungen unter den Seiten und Winkeln des Dreiecks angemessen sein.

Nun ist aber, wenn der Winkel C ein unbestimmter ist:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C};\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}\quad\text{und}\quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin(A+C)};$$

also hat man auch, wenn diese Werthe substituirt werden:

$$2.\quad \mathfrak{Sin}\,x=\frac{\sin A}{\sin C};\quad \mathfrak{Cos}\,x=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}\quad\text{und}\quad \mathfrak{Tang}\,x=\frac{\sin A}{\sin(A+C)}.$$

Die eine zwischen den hyperbolischen Functionen Statt findende Beziehung, $\mathfrak{Tang}\,x=\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cos}\,x}$, ist wie man sieht erfüllt, und es kommt also nur noch darauf an, dafs auch der Gleichung $\mathfrak{Cos}\,x^2-\mathfrak{Sin}\,x^2=1$ ein Genüge geschehe, und hiernach mufs also die Gröfse des vorhin unbestimmten Winkels C bestimmt werden. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe (2.), so erhält man:

$$\sin(A+C)^2-\sin A^2=\sin C^2.$$

Da nun aber $\sin w^2-\sin v^2=\sin(w+v).\sin(w-v)$ ist, so verwandelt sich die gefundene Gleichung offenbar in $\sin(2A+C).\sin C=\sin C^2$ oder

$$[\sin(2A+C)-\sin C].\sin C=0.$$

Es ist daher entweder $\sin C=0$ oder auch $\sin(2A+C)-\sin C=0$; die erste Voraussetzung giebt $C=0$ oder $C=\pi$ und ist nicht zu gebrauchen, weil in jedem der beiden Fälle das Dreieck ABC in eine gerade Linie zusammenfallen würde. Die zweite Bestimmung $\sin(2A+C)=\sin C$ ist gleichgeltend mit $2A+C=\pi-C$, woraus $A+C=\frac{\pi}{2}$, d. h. $B=\frac{\pi}{2}$ folgt.

Die Seite BC des Dreiecks ABC, welche bei der früheren Anwendung der cyklischen Functionen auf AC senkrecht sein mufste, mufs also, wenn nun die hyperbolischen Functionen auf den Winkel A in der durch die Gleichung $x=\varphi A$ bestimmten Weise bezogen werden sollen, auf AB senkrecht sein.

Wird weiter der Werth $C=\frac{\pi}{2}-A$ in den Ausdrücken (2.) substituirt, so erhält man:

$$\mathfrak{Sin}\,x=\frac{\sin A}{\sin C}=\tang A,$$

$$\mathfrak{Cos}\,x=\frac{\sin(A+C)}{\sin C}=\frac{1}{\cos A},$$

$$\mathfrak{Tang}\,x=\frac{\sin A}{\sin(A+C)}=\sin A.$$

Die hyperbolischen Functionen eines Arcus sind also der Reihe nach gleich gewissen cyklischen Functionen eines Winkels A, und es bleibt der Zusammenhang zwischen dem Arcus x und dem Arcus $\frac{A\pi}{180}$, welcher durch die Gleichung $x=\varphi A$ angedeutet wurde, nur noch allein zu erforschen übrig.

§. 36.

Zu denselben Resultaten führen auch rein arithmetische Betrachtungen. Die Function $\sin y$ ist $= 0$ für $y = 0$ und nähert sich wachsend der Grenze Eins, wenn der Arcus y zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ wächst; für $y = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin y = +1$. Die hyperbolische Function $\mathfrak{Tang}\, x$ ist auch Null für $x = 0$ und nähert sich wachsend ebenfalls der Grenze Eins, nur dafs der Arcus x dabei ins Unendliche wächst. Geht man vom positiven Arcus zum negativen über, so werden beide Functionen negativ, ohne ihre absolute Gröfse zu ändern. Daher wird es für jeden willkürlich gewählten (möglichen) Werth von x allemal einen zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ befindlichen Werth von y geben, der so beschaffen ist, dafs er der Gleichung $\mathfrak{Tang}\, x = \sin y$ Genüge leistet.

Unter der Voraussetzung aber, dafs x und y solche zwei zusammengehörige Arcus sind, lassen sich auch die übrigen hyperbolischen Functionen des Arcus x durch cyklische Functionen des Arcus y ausdrücken. Da, um zu dem Cosinus überzugehen, $1 - \mathfrak{Tang}\, x^2 = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, x^2}$ ist, so hat man $\frac{1}{\mathfrak{Cos}\, x^2} = 1 - \sin y^2 = \cos y^2$ und also $\mathfrak{Cos}\, x = \frac{1}{\cos y}$. Da weiter $\mathfrak{Cos}\, x \,.\, \mathfrak{Tang}\, x = \mathfrak{Sin}\, x$, so hat man $\mathfrak{Sin}\, x = \frac{1}{\cos y} \cdot \sin y = \operatorname{tang} y$.

Wenn man weiter die abgeleiteten Formeln, aus deren einer man immer die übrigen wird finden können, etwa in folgender Anordnung zusammenstellt:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{Sin}\, x = \operatorname{tang} y & & \sin y = \mathfrak{Tang}\, x, \\ \mathfrak{Cos}\, x = \frac{1}{\cos y} & \text{und} & \cos y = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, x}, \\ \mathfrak{Tang}\, x = \sin y & & \operatorname{tang} y = \mathfrak{Sin}\, x, \end{array}$$

so sieht man, dafs der Übergang von den Functionen des Arcus x zu denen des Arcus y ähnlich ist dem Rückgange von diesen zu jenen; es kommen nemlich dabei immer dieselben Benennungen in Anwendung, nur dafs die Bezeichnung im einen Falle da durch deutsche Buchstaben ausgedrückt wird, wo sie im anderen Falle gleichlautende lateinische Buchstaben enthält und durch sie auf die cyklischen Functionen hinweiset. Wegen dieser Wechselbeziehung, welche dem Gedächtnisse nicht wenig zu Hülfe kommt, empfehlen sich die aufgestellten Formeln als eben so viele Grundformeln. Da sie ferner sämmtlich aus einer hergeleitet sind,

so drücken sie auch alle denselben Zusammenhang zwischen den beiden Arcus x und y aus. Was noch mehr ist: wenn man eine einzige Zahlencolumne anfertigte, aus der man für jeden willkürlich gewählten Werth von x den zugehörigen Werth von y entnehmen könnte, dann wären die sämmtlichen hyperbolischen Functionen auf cyklische und umgekehrt diese auf jene in ganz einfacher Weise zurückgebracht.

§. 37.

Da die Zahlen oder Arcus x und y so von einander abhängen, dafs man die eine aus der anderen wird berechnen können, so erscheint x als eine Function von y und umgekehrt y als eine Function von x. Obgleich man diese Functionen noch nicht in der zu ihrer Berechnung geeigneten Gestalt kennt, so wird es dennoch gestattet sein, für die unmittelbare Beziehung zwischen x und y in ihren beiden Wechselformen schon jetzt eine einfache Bezeichnung festzusetzen, welche später unverändert beibehalten werden soll.

Da x und y Arcus bezeichnen, so mögen die Anfangsbuchstaben der Wörter „Länge" und „*longitudo*" allein jene Beziehungen ausdrücken, und zwar sei:

$$x = \mathfrak{L}y \quad \text{und} \quad y = lx.$$

In Anwendung dieser Bezeichnungsart erscheinen die obigen Formeln in folgender Gestalt:

$$\begin{array}{llll}
1) & \mathfrak{Sin}\,k = \operatorname{tang} lk, & 5) & \sin k = \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}k, \\
2) & \mathfrak{Cos}\,k = \dfrac{1}{\cos lk}, & 6) & \cos k = \dfrac{1}{\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}k}, \\
3) & \mathfrak{Tang}\,k = \sin lk, & 7) & \operatorname{tang} k = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}k, \\
4) & \mathfrak{Cot}\,k = \dfrac{1}{\sin lk}, & 8) & \cot k = \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}k}.
\end{array}$$

Man wird aber nicht vergessen, dafs diese acht Formeln erst dann bei Rechnungen in bestimmten Zahlen nützen können, wenn man die Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk, deren erste man die dem Arcus k zugehörige **Längezahl**, und deren zweite man die dem Arcus k zugehörige **Longitudinalzahl** nennen wird, so kennt, dafs man ihre Werthe für die einzelnen Werthe von k anzugeben vermag. Die Charactere $\mathfrak{L}$ und l können auch als Zeichen oder Andeutungen gewisser Operationen angesehen werden, durch welche man aus einem Arcus k die Arcus $\mathfrak{L}k$ und lk finden kann. Später wird bewiesen werden, dafs das Zeichen $\mathfrak{L}k$ eine Vergröfserung, und dafs hingegen das Zeichen lk eine Verkleinerung des Arcus k verlangt.

Wenn man die Logarithmen durch die Vorsylbe log bezeichnet, so können die Functionen lk und $\mathfrak{L}k$ mit $\log k$ nicht verwechselt werden.

Man übersieht auch schon jetzt leicht, dafs die so eben genannten beiden Operationen einander dergestalt entgegengesetzt sind, dafs sie bei ihrem Zusammenkommen gegenseitig ihren Einfluſs auf eine Zahl k ganz zernichten. Es ist immer:

$$\mathfrak{L}lk = l\mathfrak{L}k = k.$$

Denn da nach den Fundamentalformeln $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \operatorname{tang} l\varphi$ ist, so setze man $\mathfrak{L}k$ für φ, und man erhält $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}k = \operatorname{tang} l\mathfrak{L}k$; da aber $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}k = \operatorname{tang} k$ ist, so ist auch $\operatorname{tang} k = \operatorname{tang} l\mathfrak{L}k$, oder einfacher $l\mathfrak{L}k = k$. Eben so wird bewiesen, dafs $\mathfrak{L}lk = k$ sei. In ähnlicher Art beweiset man auch die beiden Formeln:

$$\mathfrak{L}(-k) = -\mathfrak{L}k \quad \text{und} \quad l(-k) = -lk,$$

woraus man sieht, dafs man nur die Länge- oder Longitudinalzahlen der positiven Arcus zu berechnen hat.

§. 38.

Nehmen wir die Gleichung $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}k = \sin k$ vor, so ziehen wir daraus durch Umkehrung:

$$\mathfrak{L}k = \mathfrak{Arc}\,(\mathfrak{Tang} = \sin k).$$

Nun ist aber immer $\mathfrak{Arc}\,(\mathfrak{Tang} = z) = \log \sqrt{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$ (nach §. 5.), also hat man auch:

$$\mathfrak{L}k = \log \sqrt{\left(\frac{1+\sin k}{1-\sin k}\right)}.$$

Dieser Ausdruck kann aber mehrfach umgeformt werden, nemlich:

$$\mathfrak{L}k = \log \frac{1+\operatorname{tang}\frac{k}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{k}{2}} = \log \frac{1+\sin k}{\cos k} = \log \frac{\cos k}{1-\sin k}.$$

In der einfachsten Gestalt ist aber der Ausdruck $\mathfrak{L}k$ der folgende:

$$\mathfrak{L}k = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+k\right).$$

Wären also in den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln neben den briggischen Logarithmen der Tangenten und Cotangenten die natürlichen Logarithmen dieser cyklischen Functionen enthalten, so könnte man für jeden willkürlich gewählten Werth von k zwischen den Grenzen $k = 0$ und $k = \frac{\pi}{2}$ den zugehörigen Werth der Function $\mathfrak{L}k$ aus einer solchen Tabelle fast ohne alle Rechnung, etwa eine unbedeutende Interpolation zur Correction der letzten Ziffern der Decimalbrüche abgerechnet, entnehmen.

Da man die letzte Formel auch also ausdrücken kann:

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + lk\right) = k,$$

so würde die so eingerichtete Tabelle auch dazu dienen, die einem gegebenen Arcus k zugehörige Longitudinalzahl lk mit gleicher Leichtigkeit zu finden. Es belohnt daher die Mühe, den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln noch die zweckmäfsige Abänderung oder Erweiterung zu geben, dafs in ihnen noch eine Zahlencolumne fortgeführt wird, welche für die einzelnen von Minute zu Minute wachsenden Werthe des Arcus oder Winkels k die zugehörigen Werthe der Function $\mathfrak{L}k$, und zwar den Werthen von k, log brigg. sin k, log brigg. tang k und log brigg. cot k gerade gegenüber, und also in einer und derselben Horizontalreihe mit ihnen befindlich enthält. Eine also eingerichtete Tabelle hat einen doppelt so grofsen Werth als vorhin, indem sie nun auch zur bequemen Realisirung der Werthe der hyperbolischen Functionen dient, statt dafs ihr Gebrauch früher blofs auf die Realisirung der cyklischen Functionen beschränkt war. Wird nun z. B. die hyperbolische Function $\mathfrak{Tang}\, k$, oder vielmehr ihr briggischer Logarithme für einen gegebenen Werth von k gefordert, so wird man die Zahl k in der so eben beschriebenen Columne aufsuchen; ihr zur Seite steht dann der Winkel lk in Graden und Minuten angegeben, und in derselben Horizontalreihe steht nun zugleich log brigg. sin lk als Werth von log brigg. $\mathfrak{Tang}\, k$.

§. 39.

Eine solche Abänderung der trigonometrischen Tafeln würde eine neue Ausgabe derselben nothwendig machen, statt dessen ist aber in den von dem Verfasser entworfenen cyklisch-hyberbolischen Tafeln eine Tabelle enthalten, welche für beide Kreis-Eintheilungen zu gebrauchen ist, und worin man für alle um eine Centesimal-Minute wachsende Werthe des Winkels k zwischen den Grenzen $k = 0^g$ und $k = 100^g$ (der neuen Eintheilung) die zugehörigen Werthe der Function $\mathfrak{L}k$ findet, und welche, da die Differenzen dieser Function bei einem Wachsen des Winkels k um eine Centesimal-Secunde, oder auch um eine Sexagesimal-Secunde darin ebenfalls durchweg angegeben sind, in ähnlicher Art die Einschaltungen erleichtert, wie die gemeinen trigonometrischen Tafeln.

Wollte man z. B. die Werthe der hyperbolischen Functionen des Arcus 1,9736427 berechnen, so würde man $\mathfrak{L}k = 1,9736427$ setzen, und

$k = 82^0\,42'\,09'', 214$ nach der neuen, oder auch $k = 74^0\,10'\,43'', 785$ nach der alten Eintheilung finden. Die beiden Rechnungen sind nemlich:

Mit der Zahl $\mathfrak{L}\,k = 1,9736427$ stimmt der genannten Tabelle gemäfs am nächsten überein d. Zahl $= 1,9735896$.

Die Differenz ist . . . . . 531.

Zu der Zahl 1,9735896 gehört aber als Winkel $82^0\,42'$ nach der neuen, oder $74^0\,10'\,40'', 80$ nach der alten Eintheilung. Zugleich werden die entsprechenden Differenzen aus der Tabelle für ein Wachsen des Winkels um eine Secunde abgelesen. Diese sind:

57,63 für die neue, oder 177,87 für die alte Eintheilung.

Die noch hinzukommenden Secunden werden durch Division gefunden, nemlich $\frac{531}{57,63} = 9,214$ und $\frac{531}{177,87} = 2,985$. Also ist $k = 82^0\,42' + 9'', 214 = 82^0\,42'\,09'', 214$ nach der neuen, oder $74^0\,10'\,40'', 80 + 2'', 985 = 74^0\,10'\,43'', 785$ nach der alten Eintheilung, und also weiter:

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\,k = \frac{1}{\cos k}; \quad \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\,k = \operatorname{tang} k; \text{ u. s. w.}$$

Eben so findet man umgekehrt, wenn der Werth einer hyperbolischen Function gegeben ist, den ihr zugehörigen Arcus mittelst der genannten Tabelle. Denn wäre z. B. $\mathfrak{Cos}\,k = a$ gegeben, so würde man aus der Gleichung $\cos\varphi = \frac{1}{a}$ mittelst der trigonometrischen Tafeln zuerst den Winkel φ suchen, und aus ihm findet man dann leicht durch ein dem vorigen entgegengesetztes Verfahren den Arcus $k = \mathfrak{L}\,\varphi$.

Die mehrgedachte Tabelle für die Werthe der Functionen $\mathfrak{L}\,k$ eignet sich aber nicht mehr zu einem schnellen Gebrauche, wenn der Arcus der hyperbolischen Functionen > 4 ist, oder die zugehörige Longitudinalzahl der Arcus eines Winkels ist, welchem nur noch zwei Centesimal-Grade an einem rechten Winkel fehlen. In diesem Falle aber wird die Rechnung durch den Gebrauch anderer ebenfalls von dem Verfasser berechneter Tafeln noch leichter als selbst vorhin, weil dann der Gebrauch der vermittelnden Function ganz vermieden wird. Diese Tafeln haben eben deswegen einen ungleich gröfseren Umfang erhalten, indem sie die gemeinen Logarithmen der hyperbolischen Functionen selbst für alle Arcus, welche > 2 sind, und anfänglich um 0,001, später aber um 0,01 wachsen, anfänglich mit neun, später aber mit zehn Decimalstellen enthalten und so weit fortgeführt sind, dafs die Differenzen der Logarithmen der hyperbolischen Functionen den Differenzen ihrer Arcus hinlänglich genau proportional sind,

selbst dann, wenn der die Grenzen der Tafeln überschreitende Arcus um ein Beliebiges gröfser ist, als der letzte darin vorkommende Arcus 12.

§. 40.

Aus den in §. 37. enthaltenen Grundformeln fliefsen andere als fernere Folgerungen. Da nemlich $\mathrm{Cos}\,k = \frac{1}{\cos lk}$, so ist $\mathrm{Cos}\,k - 1 = \frac{1-\cos lk}{\cos lk}$ und $\mathrm{Cos}\,k + 1 = \frac{1+\cos lk}{\cos lk}$. Nun ist aber $\mathrm{Cos}\,k - 1 = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}k^2$; $\mathrm{Cos}\,k + 1 = 2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}k^2$; $1-\cos lk = 2\sin\tfrac{1}{2}lk^2$ und $1+\cos lk = 2\cos\tfrac{1}{2}lk^2$; also hat man:

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}k = \frac{\sin\tfrac{1}{2}lk}{\sqrt{(\cos lk)}};\quad \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}k = \frac{\cos\tfrac{1}{2}lk}{\sqrt{(\cos lk)}};\quad \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}k = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}lk.$$

In umgekehrter Beziehung erhält man drei ähnliche Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}k = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}k)}};\quad \cos\tfrac{1}{2}k = \frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}k)}};\quad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}k = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k.$$

Da $\mathrm{Cos}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = \mathrm{Cos}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2} + \mathrm{Sin}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}$ und $\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}$ ist, so erhält man, wenn die vorausgeschickten Formeln benutzt werden:

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}la - \tfrac{1}{2}lb)}{\sqrt{(\cos la \cos lb)}} \quad\text{und}\quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}a - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}b)}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}a\,\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}b)}}.$$

In ähnlicher Art erhält man für die Sinus von $\frac{a+b}{2}$ die beiden Formeln:

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}la + \tfrac{1}{2}lb)}{\sqrt{(\cos la \cos lb)}} \quad\text{und}\quad \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}a + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}b)}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}a\,\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}b)}}.$$

Werden diese Formeln durch die vorigen dividirt, so bekommt man

$$\mathrm{Tang}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}la + \tfrac{1}{2}lb)}{\cos(\tfrac{1}{2}la - \tfrac{1}{2}lb)} \quad\text{und}\quad \mathrm{tang}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}a + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}b)}{\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}a - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}b)}.$$

Da endlich $\mathrm{Sin}\,2k = 2\,\mathrm{Sin}\,k.\mathrm{Cos}\,k$, und $\mathrm{Sin}\,k = \mathrm{tang}\,lk$, $\mathrm{Cos}\,k = \frac{1}{\cos lk}$ ist, so findet man

$$\mathrm{Sin}\,2k = \frac{2\sin lk}{(\cos lk)^2},\quad\text{und auch}\quad \sin 2k = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{L}k}{(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{L}k)^2}.$$

Zusatz. Da nach diesem §. $\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}k = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k$ und nach §. 37 auch $\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}k = \mathrm{Sin}\,\mathfrak{L}\,\tfrac{1}{2}k$ ist, so hat man offenbar $\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k = \mathrm{Sin}\,\mathfrak{L}\frac{k}{2}$; in ähnlicher Art findet man die Formel: $\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}lk = \sin l\frac{k}{2}$, und durch diese Formeln sind die Tangenten auf die Sinus und umgekehrt die Sinus auf die Tangenten zurückgebracht, so dafs man in den Gleichungen $\sin x = \mathrm{tang}\,y$ und $\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Tang}\,y$ aus dem gegebenen Arcus x immer den Arcus y und umgekehrt aus diesem jenen in Anwendung der vorigen For-

mein berechnen kann. Ist z. B. in der Gleichung $\sin x = \operatorname{tang} y$ der Arcus x gegeben, so setze man $x = l\frac{k}{2}$ und $y = \frac{1}{2} l k$. Rückwärts hat man dann $\frac{k}{2} = \mathfrak{L}x$, also $k = 2\mathfrak{L}x$ und demnach $y = \frac{1}{2} l(2\mathfrak{L}x)$; umgekehrt findet man $x = l(\frac{1}{2}\mathfrak{L}2y)$. In ähnlicher Art findet man für die Beziehung zwischen x und y in der Gleichung $\mathfrak{Sin}\, x = \mathfrak{Tang}\, y$ die beiden Formeln: $y = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2lx)$ und $x = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}l2y)$.

Zehnter Abschnitt.

Reihen für die Potenzial-Functionen eines Arcus, für die Logarithmen derselben und für die Längezahl dieses Arcus.

§. 41.

Um die Potenzial-Functionen eines Arcus in Reihen zu entwickeln, welche nach Potenzen desselben fortschreiten, wird man mit den Sinus und Cosinus beginnen. Die im §. 2. und §. 6. bereits hergeleiteten Reihen:

$$\mathfrak{Cos}\, x = S\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}, \qquad \cos x = S(-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'},$$

und

$$\mathfrak{Sin}\, x = S\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}, \qquad \sin x = S(-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}$$

für die Sinus und Cosinus des Arcus x schreiten schon nach Potenzen des Arcus x fort, und gehören also hierher. Vergebens sieht man sich aber nach Reihen um, welche in fallender Anordnung ihrer Glieder fortschreiten.

Die Quotienten $\frac{1}{\cos x}$ und $\frac{1}{\sin x}$ heifsen Secante und Cosecante des Arcus x, und man könnte diese Benennungen auch auf die hyperbolischen Functionen übertragen. Obgleich wir nun von diesen Benennungen keinen Gebrauch machen werden, so sollen doch für diese Quotienten Reihen hergeleitet werden, weil sie später angewandt werden müssen; mit der Herleitung der Reihe für die Function $\frac{1}{\cos x}$ werden wir den Anfang machen.

§. 42.

Man übersieht sogleich, dafs die Reihe für $\frac{1}{\cos x}$ die folgende Form haben werde

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \overset{1}{U}.\frac{x^2}{2'} + \overset{2}{U}.\frac{x^4}{4'} + \overset{3}{U}.\frac{x^6}{6'} \ldots + \overset{\alpha}{U}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} + \ldots$$

In Anwendung der schon früher benutzten Bezeichnungsart hat man also den Ausdruck:

$$\frac{1}{\cos x} = S\,\frac{\overset{\alpha}{U}}{(2\alpha)'}\cdot x^{2\alpha},$$

und es müssen nur noch die Vorzahlen $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, u. s. w. berechnet werden, denn bekannt ist schon für $\alpha = 0$ das Glied $\overset{0}{U} = 1$.

Da die Reihe $\cos x = S(-1)^{\alpha}\cdot\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$ mit der für $\frac{1}{\cos x}$ multiplicirt ein Product $= 1$ geben mufs, und das allgemeine Glied des entwickelten Productes zum Coëfficienten hat:

$$S(-1)^{\alpha}\cdot\frac{1}{(2\alpha)'}\cdot\frac{\overset{\beta}{U}}{(2\beta)'} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

so mufs dieser Coëfficient $= 0$ sein für jedes r, welches > 0 ist. Die also gebildete Gleichung wird aber einfacher, wenn man sie mit $(2r)' = (2\alpha+2\beta)'$ multiplicirt, und beachtet, dafs $\frac{(2r)'}{(2\alpha)'(2\beta)'} = [2r]^{2\alpha}_{(2\alpha)'} = [2r]^{2\beta}_{(2\beta)'}$ ist. Bringt man weiter das Glied für $\alpha = 0$ auf die eine Seite der Gleichung allein, so hat man die allgemeine Recursionsformel

$$\overset{r}{U} = S(-1)^{\alpha-1}[2r]^{2\alpha}_{(2\alpha)'}\cdot\overset{\beta}{U} \quad \text{cond. } \binom{\alpha+\beta=r}{\alpha>0}.$$

Die ersten Specialfälle dieser allgemeinen Formel sind zur deutlicheren Auffassung des Gesetzes hierher gestellt:

$$\overset{1}{U} = [2]^{2}_{2'},$$

$$\overset{2}{U} = [4]^{2}_{2'}\overset{1}{U} - [4]^{4}_{4'},$$

$$\overset{3}{U} = [6]^{2}_{2'}\overset{2}{U} - [6]^{4}_{4'}\overset{1}{U} + [6]^{6}_{6'},$$

$$\overset{4}{U} = [8]^{2}_{2'}\overset{3}{U} - [8]^{4}_{4'}\overset{2}{U} + [8]^{6}_{6'}\overset{1}{U} - [8]^{8}_{8'},$$

u. s. w.

Zieht man beim Gebrauche dieser Formeln vollends eine Tabelle der figurirten Zahlen zu Hülfe, so ist die Rechnung sehr einfach und man findet:

$\overset{1}{U} = 1$ $\qquad$ $\overset{6}{U} = 2702765$,

$\overset{2}{U} = 5$, $\qquad$ $\overset{7}{U} = 199360981$,

$\overset{3}{U} = 61$, $\qquad$ $\overset{8}{U} = 19391512145$,

$\overset{4}{U} = 1385$, $\qquad$ $\overset{9}{U} = 2404879661671$,

$\overset{5}{U} = 50521$, $\qquad$ u. s. w.

Für diese Werthe der Coëfficienten hat man dann $\frac{1}{\cos x} = S\frac{V}{(2\alpha)'}.x^{2\alpha}$. Setzt man $x\sqrt{-1}$ für x, so findet man dadurch noch die folgende Reihe:

$$\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x} = S(-1)^{\alpha}.\frac{\overset{\alpha}{U}}{(2\alpha)'}.x^{2\alpha}.$$

Von der vorigen Reihe unterscheidet sich diese nur darin, daſs die Vorzeichen der Glieder abwechseln.

§. 43.

Die Quadrate der so eben abgeleiteten Reihen geben entwickelt Reihen von ähnlicher Form, aus denen mehrere andere Reihen hergeleitet werden. Man gelangt zur Entwickelung dieser Quadrate auf mehr als eine Weise. Wir benutzen zur Herleitung die Bemerkung, daſs

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{2}{1+\cos 2x} \text{ ist.}$$

Wird also $\frac{1}{\cos x^2} = 1 + \overset{1}{w}\frac{x^2}{2'} + \overset{2}{w}\frac{x^4}{4'} + \overset{3}{w}\frac{x^6}{6'} + \text{etc.} = S\frac{\overset{\alpha}{w}x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$ gesetzt, so muſs

$$2 = \left(S\frac{\overset{\beta}{w}x^{2\beta}}{(2\beta)'}\right).\left(1 + S(-1)^{\alpha}2^{2\alpha}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}\right) \text{ sein.}$$

Der Coëfficient des allgemeinen Gliedes im entwickelten Producte ist offenbar:

$$\frac{\overset{r}{w}}{(2r)'} + S(-1)^{\alpha}\frac{2^{2\alpha}}{(2\alpha)'}.\frac{\overset{\beta}{w}}{(2\beta)'} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Da derselbe gleich Null sein muſs, sobald $r > 0$ ist, so hat man eine Recursionsformel:

$$\overset{r}{w} = 2.S(-1)^{\alpha-1}.2^{2\alpha-2}.[2r]^{2\alpha}_{(2\alpha)'}.\overset{\beta}{w} \quad \text{cond.} \begin{pmatrix}\alpha+\beta=r\\ \alpha>0\end{pmatrix}$$

Da nach dieser Formel jeder Coëfficient den Factor 2 beim Aufsteigen erhält, so folgt daraus, daſs im Allgemeinen der Coëfficient w durch die Potenz 2^r theilbar sei. In der Regel sind aber die Coëfficienten durch noch höhere Potenzen von 2 theilbar. Die wirkliche Rechnung giebt:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{w} &= 2 &&= 2^1.1,\\
\overset{2}{w} &= 16 &&= 2^2.4 &&= 2^4,\\
\overset{3}{w} &= 272 &&= 2^3.34 &&= 2^4.17,\\
\overset{4}{w} &= 7936 &&= 2^4.496 &&= 2^8.31,\\
\overset{5}{w} &= 353792 &&= 2^5.11056 &&= 2^9.691,\\
\overset{6}{w} &= 22368256 &&= 2^6.349504 &&= 2^{12}.5461,
\end{aligned}$$

Die Rechnung ist sehr bequem, wenn man eine Tabelle der figurirten Zahlen dabei zur Hand nimmt. Für diese Werthe hat man dann die beiden Reihen:

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = 1 + \overset{1}{w}.\frac{x^2}{2'} + \overset{2}{w}.\frac{x^4}{4'} + \overset{3}{w}.\frac{x^6}{6'} + \text{etc.} = S\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$$

und

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x}\right)^2 = 1 - \overset{1}{w}.\frac{x^2}{2'} + \overset{2}{w}.\frac{x^4}{4'} - \overset{3}{w}.\frac{x^6}{6'} + \text{etc.} = S(-1)^\alpha\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'}.$$

§. 44.

Werden die so eben erhaltenen Reihen mit ∂x multiplicirt und wird darauf integrirt, so erhält man dadurch zwei neue Reihen:

$$\operatorname{tang} x = x + \overset{1}{w}.\frac{x^3}{3'} + \overset{2}{w}.\frac{x^5}{5'} + \overset{3}{w}.\frac{x^7}{7'} + \text{etc.} = S\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'},$$

$$\mathfrak{Tang}\,x = x - \overset{1}{w}.\frac{x^3}{3'} + \overset{2}{w}.\frac{x^5}{5'} - \overset{3}{w}.\frac{x^7}{7'} + \text{etc.} = S(-1)^\alpha\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}.$$

Aus diesen Reihen leitet man die Reihen für die Cotangenten her in Benutzung der Formel:

$$\cot\frac{x}{2} - 2\cot x = \operatorname{tang}\frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2\,\mathfrak{Cot}\,x - \mathfrak{Cot}\frac{x}{2} = \mathfrak{Tang}\frac{x}{2}.$$

Man schliefst nemlich aus der Form der Reihe für Tangenten auf die Form der Reihen für die Cotangenten, da $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$ ist. Setzt man hiernach

$$\cot x = \frac{1}{x} + S\overset{\alpha}{a}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'},$$

so findet man $\frac{\overset{r}{w}}{2^{2r+1}} = \overset{r}{a}.\left(\frac{1}{2^{2r+1}} - 2\right)$, und also rückwärts $\overset{r}{a} = -\frac{\overset{r}{w}}{4^{r+1}-1}$.

Man hat also die beiden Reihen:

$$\cot x = \frac{1}{x} - S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^\alpha-1}.\frac{x^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)'} \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

$$\mathfrak{Cot}\,x = \frac{1}{x} + S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^\alpha-1}.\frac{x^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)'} \quad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

Aus diesen und den vorigen Reihen gelangt man zu neuen Reihen für die Functionen $\frac{1}{\sin x}$ und $\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}$ unter Benutzung der Formeln:

$$\tfrac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Cot}\frac{x}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Tang}\frac{x}{2} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,x}.$$

Man erhält nemlich:

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{1}{x} + S\frac{4^\alpha-2}{4^\alpha-1}.\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)'} \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

$$\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,2x} = \frac{1}{x} + S(-1)^\alpha.\frac{4^\alpha-2}{4^\alpha-1}.\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)'} \quad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

§. 45.

Werden die so eben gefundenen 6 Formeln mit ∂x multiplicirt, und integrirt man, so gelangt man zu eben so vielen Reihen für die natürlichen Logarithmen der Potenzialfunctionen, nemlich:

$$\log\cos x = -S\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0,$$

$$\log\mathfrak{Cos}\,x = -S(-1)^{\alpha}.\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0.$$

Aus den Reihen für die Cotangenten erhält man in ähnlicher Art:

$$\log\sin x = \log x - S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^{\alpha}-1}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0,$$

$$\log\mathfrak{Sin}\,x = \log x + S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^{\alpha}-1}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0.$$

Endlich erhält man noch die beiden Reihen:

$$\log\operatorname{tang} x = \log x + S\frac{4^{\alpha}-2}{4^{\alpha}-1}.\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0,$$

$$\log\mathfrak{Tang}\,x = \log x + S(-1)^{\alpha}.\frac{4^{\alpha}-2}{4^{\alpha}-1}.\overset{\alpha-1}{w}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0.$$

Die Coëfficienten $\overset{1}{w}$, $\overset{2}{w}$, $\overset{3}{w}$, etc. kommen noch in den Entwickelungen anderer Functionen vor, und daher rührt es, daſs man zu ihrer Berechnung mehrere, dem Anscheine nach gänzlich verschiedene Formeln, und nicht nur Recursionsformeln, sondern auch solche, welche zur independenten Berechnung dienen, abzuleiten vermag, worauf man hier und da ein gröſseres Gewicht legt, als sie verdienen. Später werden auch Formeln, welche zur independenten Berechnung dienen, mitgetheilt werden. Es ist nicht nöthig, die Reihe der Zahlen $\overset{1}{w}$, $\overset{2}{w}$, $\overset{3}{w}$, etc. weithin zu berechnen, weil sie mit den sogenannten Bernoullischen Zahlen auf eine einfache Weise zusammenhängen und diese bereits bis zu ansehnlicher Weite berechnet worden sind. Bezeichnet man nemlich die Bernoullischen Zahlen, wie folgt: $\overset{1}{B} = \frac{1}{6}$; $\overset{2}{B} = \frac{1}{30}$; $\overset{3}{B} = \frac{1}{42}$; $\overset{4}{B} = \frac{1}{30}$; $\overset{5}{B} = \frac{5}{66}$; $\overset{6}{B} = \frac{691}{\ldots}$ [illegible] u. s. w., so ist allgemein:

$$\overset{r}{B} = \frac{2r.\overset{r-1}{w}}{4^r(4^r-1)}, \text{ also rückwärts } \overset{r-1}{w} = \frac{4^r(4^r-1)}{2r}.\overset{r}{B}.$$

Man hätte auch wohl gethan, statt der Bernoullischen Zahlen, welche Brüche sind, gewisse ganze Zahlen, welche mit ihnen eng verbunden sind, wie etwa die Zahlen $\overset{1}{w}$, $\overset{2}{w}$, $\overset{3}{w}$, $\overset{4}{w}$, etc. zu berechnen und statt der Bernoullischen Zahlen in Anwendung zu bringen.

§. 46.

Um nun auch noch die einem gegebenen Arcus zugehörige Längezahl und auch Longitudinalzahl, welche als neuer Arcus zu dienen bestimmt ist, in eine nach Potenzen jenes Arcus fortschreitende Reihe zu entwickeln, ist es erforderlich, die Gleichung $y = \mathfrak{L}x$ oder auch die umgekehrte $x = ly$ differentiiren zu können. Da $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}x \,.\, \cos x = 1$ ist, so erhält man

$$\log \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}x + \log \cos x = 0,$$

und wenn man differentiirt: $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}x\,\partial\mathfrak{L}x = \operatorname{tang} x\,\partial x$; da aber $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}x = \sin x$ ist, so hat man einfacher:

$$\partial\mathfrak{L}x = \frac{\partial x}{\cos x}.$$

Eben so findet man umgekehrt: $\partial lx = \frac{\partial x}{\mathfrak{Cos}\,x}$. Hierauf gründen sich also die beiden folgenden Integralformeln:

$$\int \frac{\partial k}{\cos k} = \mathfrak{L}k + \text{const.},$$

$$\int \frac{\partial k}{\mathfrak{Cos}\,k} = lk + \text{const.}$$

Zusatz. Es können die Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk selbst schon in einem vorgelegten Differentiale enthalten sein. Differentiirt man nemlich die Gleichung $y = \sin(a+k).\mathfrak{L}k$, so erhält man $\partial y = \partial k \cos(a+k)\mathfrak{L}k + \frac{\sin(a+k)}{\cos k}\partial k$; es ist also umgekehrt $\int \partial k \cos(a+k).\mathfrak{L}k = \sin(a+k)\mathfrak{L}k - \int \frac{\sin(a+k)}{\cos k}\partial k = \sin(a+k).\mathfrak{L}k - k\sin a + \cos a \log \cos k + \text{const.}$ Auf ähnliche Art findet man das Integral $\int \partial k \sin(a+k).\mathfrak{L}k$.

§. 47.

Die Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk können auf mannigfaltige Weise aus Functionen des Arcus k berechnet werden. Jede Reihe, nach welcher man aus der Potenzialfunction eines Arcus den Arcus selbst findet, dient auch zur Berechnung der Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk. So ist z. B. $\frac{1}{2}k = \mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}k + \frac{1}{3}\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{5}\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}k^5 + \text{etc.}$ Setzt man also $\mathfrak{L}k$ für k, und bemerkt, dafs $\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}\mathfrak{L}k = \operatorname{tang}\frac{1}{2}k$ ist, so erhält man auf der Stelle:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}k = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k^5 + \tfrac{1}{7}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k^7 + \text{etc.}$$

In ähnlicher Art erhält man die Reihe:

$$\mathfrak{L}k = \operatorname{tang} k - \frac{1}{2}.\frac{\operatorname{tang} k^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\operatorname{tang} k^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\operatorname{tang} k^7}{7} + \text{etc.}$$

Wenn der Arcus k grofs wird, oder $\frac{\pi}{2} - k$ gering ist, dann dienen zwei Reihen, welche man leicht aus denen des §. 21. herleitet:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)=\log\frac{2}{\operatorname{tang}k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tang}k^2}{2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\operatorname{tang}k^4}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\operatorname{tang}k^6}{6}-\text{etc.}$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)=\log\frac{2}{\sin k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin k^2}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin k^4}{4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\sin k^6}{6}+\text{etc.}$$

Sie convergiren beide offenbar desto mehr, je kleiner der Unterschied $\frac{\pi}{2}-k$ wird. Es belohnt aber die Mühe nicht, die Anzahl dieser Formeln noch zu vermehren und die ähnlichen für die Function lk ihnen gegenüber zu stellen, wo es angeht.

§. 48.

Wichtiger ist die Angabe solcher Reihen für die Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk, welche nach den Potenzen des Arcus k fortschreiten. Werden die im §. 42. für $\frac{1}{\cos k}$ und $\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,k}$ hergeleiteten Reihen mit ∂x multiplicirt, so giebt die darauf folgende Integration nach §. 46. auf der Stelle die beiden Reihen:

$$\mathfrak{L}k=k+\overset{1}{U}\cdot\frac{k^3}{3'}+\overset{2}{U}\cdot\frac{k^5}{5'}+\overset{3}{U}\cdot\frac{k^7}{7'}+\overset{4}{U}\cdot\frac{k^9}{9'}+\text{etc.},$$

$$lk=k-\overset{1}{U}\cdot\frac{k^3}{3'}+\overset{2}{U}\cdot\frac{k^5}{5'}-\overset{3}{U}\cdot\frac{k^7}{7'}+\overset{4}{U}\cdot\frac{k^9}{9'}-\text{etc.}$$

Die in diesen Reihen vorkommenden Zahlen $\overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{3}{U}$, etc. sind ganze Zahlen, und im §. 42. sind sie bis zu einer ziemlichen Weite hin angegeben worden.

Man kann aber für die Function $\mathfrak{L}k$ noch eine Reihe angeben, welche desto brauchbarer wird, je mehr der Arcus k sich vergrößert oder der ihm zugehörige Winkel einem rechten Winkel nahe kommt. Da nemlich nach §. 38. $\mathfrak{L}k=\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+k\right)$, also $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k}{2}\right)$ $=\log\cot\frac{k}{2}=\log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{k}{2}}$ ist, so hat man nach §. 45.:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)=\log\frac{2}{k}-S\frac{4^a-2}{4^a-1}\cdot\overset{a-1}{\omega}\cdot\frac{(\frac{1}{2}k)^{2a}}{(2a)'}\quad\text{für } a>0.$$

Diese Reihe fällt nun gleichsam in die Mitte zwischen die im §. 47. für die Function $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)$ angegebenen beiden Reihen, indem $\operatorname{tang}k>k$ und $\sin k<k$ ist.

Zusatz. Setzt man in den für $\mathfrak{L}k$ und lk angegebenen Reihen $k\sqrt{-1}$ für k, so erhält man noch $\mathfrak{L}(k\sqrt{-1})=(lk).\sqrt{-1}$, und umgekehrt $l(k\sqrt{-1})=(\mathfrak{L}k)\sqrt{-1}$. Es braucht wohl kaum angemerkt zu

werden, dafs man dieselben Resultate auch aus den Fundamentalformeln des §. 37. unmittelbar hätte schliefsen können. Die eben genannten Reihen geben auch zu erkennen, was schon früher behauptet worden ist, dafs $\mathfrak{L}k > k$ sei. Daher ist auch $l\mathfrak{L}k > lk$, oder, was dasselbe ist, $lk < k$.

Auch haben die für $\mathfrak{L}k$ und lk angegebenen Reihen die Eigenschaft, dafs man durch die Umkehrung der einen die andere erhält, welche Eigenschaft um so interessanter ist, als die beiden Reihen fast völlig übereinstimmen, nur dafs die Reihe für lk abwechselnde Vorzeichen vor ihren Gliedern hat und die Vorzeichen vor den Gliedern der ersten Reihe durchgehends $+$ sind.

§. 49.

Die vorgehenden Reihen setzen also immer in den Stand, die Werthe der Function $\mathfrak{L}k$ für beliebige Werthe von k zu berechnen. Schon die Formel $\mathfrak{L}k = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2} + k\right)$ eignet sich zu einem bequemen Gebrauche, da die briggischen Logarithmen der cyklischen Tangenten bereits berechnet und in Tafeln niedergelegt sind. Da diese Formel aber nicht briggische, sondern natürliche Logarithmen verlangt, so kommt man bei ihrem Gebrauche immer in den Fall, den aus den trigonometrischen Tafeln entnommenen briggischen Logarithmen der cyklischen Tangente mit dem Modul des natürlichen Logarithmensystems, d. h. mit der Zahl 2,3025 8509 2994 0456 8401 ...., zu multipliciren, wenn der Werth von $\mathfrak{L}k$ aus dem gegebenen Werthe von k berechnet werden soll. Will man aber aus dem gegebenen Werthe von $\mathfrak{L}k$ den zugehörigen Werth von $l\mathfrak{L}k$ oder k finden, so hat man bei Anwendung der Formel den gegebenen Werth $\mathfrak{L}k$ mit der Zahl 0,4342 9448 1903 2518 2765 .... zu multipliciren, um in den trigonometrischen Tafeln dann einen diesem Producte möglichst nahe kommenden briggischen Logarithmen einer cyklischen Tangente aufzusuchen und den ihr zugehörigen Arcus oder Winkel zu finden, welcher verdoppelt und dann um einen rechten Winkel vermindert werden mufs, um den gesuchten Winkel k zu ermitteln. Man wird diese Rechnungsweisen aber auch nur dann anwenden, wenn ein besonders hoher Grad von Genauigkeit erzielt wird, so dafs eine Rechnung mit sieben Decimalziffern nicht mehr genügt, und man also die von dem Verfasser berechnete Tabelle, welche nur sieben Decimalziffern hat, nicht gebrauchen kann, deren Benutzung sonst für beide Winkel-Eintheilungen un-

gleich rascher zum Ziele führt. In einem solchen Falle muſs man aber auch zu trigonometrischen Tafeln greifen, welche wegen des ungewöhnlich gröſseren Umfanges, den die mehren Decimalziffern veranlassen, kostspieliger und unbequemer sind.

So mannigfaltig aber auch die Mittel sein mögen, welche zu Gebote stehen, um in einem vorgelegten besonderen Falle aus dem Werthe von k den von $\mathfrak{L}k$ oder umgekehrt aus diesem jenen zu finden, so kann jedoch die Veranlassung zu solchen Rechnungen wegfallen, weil der Gebrauch der vermittelnden Function Behufs der Realisirung der Werthe der hyperbolischen Functionen nicht mehr zusagt, d. h. weil wegen allzu raschen Wachsens oder Abnehmens die Einschaltung nicht mehr bequem und sicher angeht. Dieses ereignet sich, wie es fast die bloſse Ansicht der im §. 47. und §. 48 mitgetheilten Formeln zu erkennen giebt, dann, wenn der Arcus $\mathfrak{L}k$ zu groſs und etwa > 4 wird, oder also dem Winkel k nur noch ungefähr zwei Grade an einem rechten Winkel fehlen, denn dann beschleunigt sich das Wachsen von $\mathfrak{L}k$ bei einer auch geringen Zunahme von k zu sehr. Deutlicher noch als die Ansicht der genannten Formeln zeigt dieses der Blick in die berechneten Tafeln. Es ist daher nothwendig, die hyperbolischen Functionen oder doch ihre Logarithmen selbst zu berechnen und ihre Werthe in Tafeln niederzulegen, so daſs man also von ihrer Zurückführung auf die cyklischen Functionen, welche unter anderen Umständen nützlich ist, nun absteht.

§. 50.

Es ändern sich zwar die Werthe der hyperbolischen Functionen bei der Zunahme ihres Arcus desto rascher, je gröſser der Arcus wird, glücklicherweise aber verhält es sich in Hinsicht auf ihre Logarithmen gerade umgekehrt, ihre zweiten und mehr noch ihre höheren Differenzen sind gering, und desto geringer, je gröſser der Arcus der hyperbolischen Functionen wird. Diese Logarithmen eignen sich also zur Construction einer Tabelle aus ihnen, welche, ohne einen sehr groſsen Umfang zu haben, weit hin reicht, so daſs der Arcus vom Werthe 2,000.... an bis zu einem beliebig groſsen Werthe wachsen darf und kann, und diese Tabelle wegen ihrer Brauchbarkeit selbst zwischen den Grenzen 2 und 4 des Arcus benutzt werden kann, obgleich für diese Strecke schon durch die früher genannte Tabelle gesorgt war. Die Construction dieser zweiten Tabelle gründet sich auf folgende Entwickelungen. Da

$$\mathfrak{Cos}\,k = \frac{e^k + e^{-k}}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\,k = \frac{e^k - e^{-k}}{2}$$

ist, so findet man in Anwendung der bekannten logarithmischen Reihe:

$$\log(a+b) = \log a + \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \text{etc.}$$

auf der Stelle die gesuchten beiden Reihen:

$$\log \mathfrak{Cos}\,k = k - \log 2 + e^{-2k} - \tfrac{1}{2}e^{-4k} + \tfrac{1}{3}e^{-6k} - \tfrac{1}{4}e^{-8k} + \text{etc.},$$

$$\log \mathfrak{Sin}\,k = k - \log 2 - e^{-2k} - \tfrac{1}{2}e^{-4k} - \tfrac{1}{3}e^{-6k} - \tfrac{1}{4}e^{-8k} - \text{etc.}$$

für die natürlichen Logarithmen der Functionen $\mathfrak{Cos}\,k$ und $\mathfrak{Sin}\,k$. Den natürlichen Logarithmen der Function $\mathfrak{Tang}\,k$ findet man, wenn man die erste Reihe von der zweiten subtrahirt, wodurch die folgende Reihe entsteht:

$$\log \mathfrak{Tang}\,k = -2(e^{-2k} + \tfrac{1}{3}e^{-6k} + \tfrac{1}{5}e^{-10k} + \text{etc.}).$$

Da nun die Werthe der Exponentialfunctionen e^{-2k}, e^{-4k}, e^{-6k} etc., welche in den Gliedern der drei Reihen vorkommen, geringe Werthe haben, wenn $k=2$ oder $k>2$ ist und diese Gröfsen überhaupt bequem zu berechnen sind, so hat der Verfasser sie zur Anfertigung der genannten zweiten Tabelle benutzt, und so die briggischen Logarithmen der hyperbolischen Functionen für alle Arcus, welche >2 sind und um 0,001 zunehmen, in neun Decimalstellen berechnet. Es schien aber unzweckmäfsig, die Arbeit ganz so durchzuführen, denn von $k=5$ an reichte es vollkommen hin, den Arcus um 0,01 wachsen zu lassen; dafür sind aber von dieser Grenze an die briggischen Logarithmen der Potenzialfunctionen in zehn Decimalstellen angegeben worden, und zwar bis zu so grofser Weite hin, dafs keine Tabelle mehr nöthig ist. Für $k=12$ ist nemlich $\mathfrak{Cos}\,k = \mathfrak{Sin}\,k$, also $\mathfrak{Tang}\,k = 1$ oder $\log \mathfrak{Tang}\,k = 0$, wenigstens so genau, dafs der Unterschied zwischen $\mathfrak{Cos}\,k$ und $\mathfrak{Sin}\,k < 0,000\,000\,000\,01$ ist.

Die in dieser Tabelle enthaltenen Logarithmen der Tangenten sind sämmtlich jeder um 10 zu grofs und also negativ, in ähnlicher Art wie die Logarithmen der Sinus und Cosinus in den trigonometrischen Tafeln.

§. 51.

Die nach den angegebenen drei Reihen berechneten Logarithmen mufsten, damit sie briggische würden, mit dem bekannten Modul $\mu = 0,4342\,9448\,1903\,2518\ldots$ multiplicirt werden. So genau die Einschaltung in die Reihe der Sinus und Cosinus dieser Tabelle sein mag, da man in Hinsicht auf die Bestimmung des Arcus bei sonst richtiger Rechnung kaum einen (unvermeidlichen) Fehler von der Gröfse 0,000 000 001

begehen wird, so ungenau wird die Bestimmung des Arcus, wenn die hyperbolische Tangente gegeben ist, in den Grenzen dieser Tabelle, und zwar immer mehr, je größer der Arcus wird. Gegen das Ende der Tabelle ist der unvermeidliche Fehler fast $=1$, wie es die Ansicht der Tabelle lehrt. Man hätte, um diese Fehler geringer zu machen, noch ungleich mehr als zehn Decimalziffern nehmen müssen. Die trigonometrischen Tafeln der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten sind in gewissen Gegenden ihres Umfanges einem ähnlichen Übelstande unterworfen. Glücklicher Weise kann man aber im vorliegenden Falle durch geringe Mühe die höhere Genauigkeit in der Bestimmung des Arcus erreichen, da nach §. 50. gerade in diesem Falle überflüssig genau:

$$\log \mathfrak{Tang}\, k = -2\mu \,.\, e^{-2k} \quad \text{oder} \quad \log \mathfrak{Cot}\, k = 2\mu e^{-2k}$$

ist, wenn briggische Logarithmen verstanden werden. Man hat also, wenn man zum zweiten Male auf beiden Seiten zu den briggischen Logarithmen übergeht, die Formel

$$\log\log \mathfrak{Cot}\, k = \log(2\mu) - 2k\mu.$$

Hiernach kann der Arcus k mit höherer Genauigkeit leicht gefunden werden, vorausgesetzt, daſs auch die hyperbolische Tangente oder eigentlich ihr Logarithme in mehr als zehn Decimalstellen gegeben ist. Eben so kann man nach dieser Formel auch umgekehrt, wenn ein Arcus gegeben ist, welcher beträchtlich >2 ist, den Logarithmen seiner hyperbolischen Tangente in mehr als zehn Decimalziffern genau angeben. Der bei diesen Rechnungen zu gebrauchende beständige Logarithme ist:

$$\log(2\mu) = 9{,}9388143070 - 10.$$

So ist z. B. für $k=12$ das Glied $2k\mu = 10{,}4230675657$.

$$\text{Also } \log(2\mu) - 2k\mu = 0{,}5157467413 - 11 = \log\log \mathfrak{Cot}\, k.$$

$$\text{Also } \log \mathfrak{Cot}\, k = 0{,}000\,000\,000\,032\,7904 \ldots$$

$$\text{und } \log \mathfrak{Tang}\, k = 9{,}999\,999\,999\,967\,2096 \ldots$$

Da ferner der briggische Logarithme $\log(1 \pm \delta) = \pm \mu.\delta$ ist, wenn δ gering ist, wie im vorliegenden Falle, so wird man $\log \mathfrak{Cot}\, k$ mit $\frac{1}{\mu}$ multipliciren und zum Producte Eins addiren, um $\mathfrak{Cot}\, k$ selbst zu erhalten, oder das Product von Eins subtrahiren, um $\mathfrak{Tang}\, k$ zu erhalten.

Die angestellte Rechnung giebt:

$$\mathfrak{Cot}\, k = 1{,}0000\,0000\,0014\,2407 \ldots \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Tang}\, k = 0{,}9999\,9999\,9985\,7593 \ldots$$

Man hätte im vorliegenden Falle selbst noch ungleich genauer rechnen oder noch ungleich mehr Decimalziffern für $\mathfrak{Cot}\,k$ und $\mathfrak{Tang}\,k$ finden können. Wie grofs aber der erreichbare Grad der Genauigkeit sei, mufs aus dem Gliede $-\frac{2}{3}e^{-6k}$, welches bei diesen Rechnungen aufser Acht bleibt, beurtheilt werden. Im vorliegenden Falle, wo $k = 12$ ist, hat das Glied den Werth:

$$\tfrac{2}{3}e^{-6k} = 0,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0003\,5868,$$

und man hätte also $\mathfrak{Tang}\,k$ oder auch $\mathfrak{Cot}\,k$ bis auf einen unvermeidlichen Fehler von der Kleinheit

$$0,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0001,$$

d. h. in 31 Decimalstellen genau angeben können. Zu einem so geringen Fehler in der Bestimmung des Werthes der Tangente oder auch Cotangente gehört aber ein nicht ganz so geringer Fehler in der Bestimmung des Arcus, wenn die Tangente oder auch Cotangente gegeben sind.

Eilfter Abschnitt.

Bemerkenswerthe Reihen, welche nach Potenzial-Functionen äquidifferenter Arcus fortgehen; Folgerungen daraus.

§. 52.

Wenn man die bekannte logarithmische Entwickelungs-Formel $\log z = S(-1)^\alpha \dfrac{z^{\alpha+1} - z^{-(\alpha+1)}}{2}$ auf die Function $z = \mathfrak{Cos}\,k + \mathfrak{Sin}\,k = e^k$ anwendet, so hat man:

$z^{\alpha+1} = \mathfrak{Cos}(\alpha+1)k + \mathfrak{Sin}(\alpha+1)k$ und $z^{-(\alpha+1)} = \mathfrak{Cos}(\alpha+1)k - \mathfrak{Sin}(\alpha+1)k$. Daraus folgt $z^{\alpha+1} - z^{-(\alpha+1)} = 2\,\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k$, und weil $\log z = \log e^k = k$ ist, so hat man offenbar:

$$\tfrac{1}{2}k = S(-1)^\alpha \frac{\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k}{\alpha+1}.$$

Differentiirt man auf beiden Seiten, so hat man:

$$\tfrac{1}{2} = S(-1)^\alpha \mathfrak{Cos}(\alpha+1)k.$$

Diese Gleichung aufs Neue $2r$ mal nach einander differentiirt, so ist:

$$S(-1)^\alpha(\alpha+1)^{2r}.\,\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k = 0.$$

Wird diese Gleichung noch einmal differentiirt, so hat man:

$$S(-1)^\alpha(\alpha+1)^{2r+1}.\,\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k = 0.$$

Setzt man in der vorigen Reihe den Arcus $k = 0$, so ist allgemein $\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k = 1$, und also:

$$S(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2r} = 0,$$

oder auch

$$(1^{2r} - 2^{2r} + 3^{2r} - 4^{2r} + 5^{2r} - 6^{2r} + - \text{etc.}) = 0,$$

welches ein bekanntes Resultat ist.

§. 53.

Wenn man die beiden Factoren $1+zv$ und $1+\frac{v}{z}$ multiplicirt und unter z den Ausdruck $z = \mathfrak{Cos}\, k + \mathfrak{Sin}\, k$ versteht, so ist das Product $= 1 + (z+z^{-1}).v + v^2$ oder $1 + 2v\,\mathfrak{Cos}\, k + v^2$.

Also hat man $\log(1+2v\,\mathfrak{Cos}\, k + v^2) = \log(1+zv) + \log\left(1+\frac{v}{z}\right)$. Entwickelt man $\log(1+zv)$ und $\log\left(1+\frac{v}{z}\right)$ nach Potenzen von v, und addirt man die Entwickelungen, so ist:

$$\log(1+2v\,\mathfrak{Cos}\, k + v^2) = S(-1)^{\alpha}.\frac{z^{\alpha+1} + z^{-(\alpha+1)}}{\alpha+1}.v^{\alpha+1},$$

oder einfacher:

$$\log\sqrt{(1+2v\,\mathfrak{Cos}\, k + v^2)} = S(-1)^{\alpha}.\frac{v^{\alpha+1}}{\alpha+1}.\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k.$$

Setzt man $v=1$, so hat man $1+2v\,\mathfrak{Cos}\, k) + v^2 = 2(1+\mathfrak{Cos}\, k = (2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}k)^2$, und also:

$$\log(2\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}k) = S(-1)^{\alpha}.\frac{\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k}{\alpha+1}.$$

Wird auf beiden Seiten differentiirt, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2} = S(-1)^{\alpha}\,\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k.$$

Wird diese Gleichung $2r+1$ mal nach einander differentiirt, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^{2r+1}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2}}{\partial k^{2r+1}} = S(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2r+1}.\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\partial^{2r}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2}}{\partial k^{2r}} = S(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2r}.\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k.$$

Obgleich nun die Werthe oder Summen dieser Reihen nicht so einfach sind, wie bei den sehr ähnlichen Reihen im §. 52., so können sie dennoch durch ein fortgesetztes Differentiiren immer gefunden werden. Zu ähnlichen Ausdrücken gelangt man für $v = -1$.

Setzt man $k=0$, so hat man $S(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2r+1} = \frac{1}{2}.\frac{\partial^{2r+1}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2}}{\partial k^{2r+1}}$ für $k=0$.

Da aber nach §. 44. $\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}k = S(-1)^{\alpha}.\overset{\alpha}{w}.\frac{(\frac{1}{2}k)^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)}$, ist, so hat man $\frac{\partial^{2r+1}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}k}{\partial k^{2r+1}}$ (für $k=0$) offenbar $=(-1)^r.\overset{r}{w}.(\frac{1}{2})^{2r+1}$, und es ist also die Reihe:

$$1^{2r+1}-2^{2r+1}+3^{2r+1}-4^{2r+1}+5^{2r+1}-6^{2r+1}+7^{2r+1}-\text{etc.} = (-1)^r.\frac{\overset{r}{w}}{4^{r+1}}.$$

§. 54.

Wenn man die Reihe für $\frac{1}{2}k$ im §. 52. statt zu differentiiren mit ∂x mehrere Male nach einander multiplicirt, und darauf jedesmal integrirt, so erhält man Reihen von der Form:

$$1.\quad \varphi(r,k) = S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r+1}.\,\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k.$$

Entwickelt man $\mathfrak{Sin}(\alpha+1)k$ in eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe, so erhält man:

$$\varphi(r,k) = S(-1)^{\alpha}(\alpha+1)^{2(\beta-r)}.\frac{k^{2\beta+1}}{(2\beta+1)'}.$$

Diese Reihe hat einen zweifachen Fortschritt: den einen hat sie wegen der Veränderlichkeit von α, den zweiten hat sie durch die Veränderlichkeit von β; sie läfst sich aber noch sehr zusammenziehen, da nach §. 52. immer $S(-1)^{\alpha}.(\alpha+1)^{2n}=0$ ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet und >0 ist. Denn nun darf man sogleich $r-\beta$ für β setzen und erhält dadurch:

$$\varphi(r,k) = S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2\beta}.\frac{k^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}\quad \text{cond. } (\gamma+\beta=r).$$

Dieser Ausdruck hat nur $(r+1)$ Glieder, und es ist also die unendliche Reihe (1.) summirt worden; aber die Coëfficienten in diesem Ausdrucke sind nun ungeschlossene Reihen von der Form:

$$2.\quad [r] = S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r}.$$

Werden daher diese Coëfficienten ein für allemal berechnet, so hat man:

$$3.\quad \varphi(r,k) = S[\beta].\frac{k^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}\quad \text{cond. } (\gamma+\beta=r),$$

und durch diese Formel ist dann die vorgelegte Summations-Aufgabe gelöset. Durch einmaliges Differentiiren erhält man nun noch:

$$S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r}.\,\mathfrak{Cos}(\alpha+1)k = S[\beta].\frac{k^{2\gamma}}{(2\gamma)'}\quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Beide Formeln können sammt den vorigen leicht auf cyklische Functionen übertragen werden, wenn man nur $k\sqrt{-1}$ für k setzt.

§. 55.

Die in §. 54. vorkommende Reihe $[r]$ kann man, da sie convergirt, nach ihrem Werthe finden, wenn man die einzelnen Glieder derselben in Decimalbrüche verwandelt, und diese dann abwechselnd addirt und subtrahirt. Man kann jedoch auch noch auf andere Art die Summe dieser Reihe finden. Man gelangt dazu durch die Bemerkung, dafs die im §. 54. ebenfalls vorkommende Reihe $\varphi(r, k)$ für gewisse Werthe des Arcus k, welche nicht Null sind, den Werth Null annimmt. Ein solcher Werth ist z. B.

$$k = \pi.\sqrt{-1}.$$

Für ihn hat man $\frac{\varphi(r, \pi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r+1}.\sin(\alpha+1).\pi$, und da $\sin\pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = \text{etc.} = 0$ ist, so ist jedes Glied der Reihe und mithin sie selbst Null. Also:

$$\frac{\varphi(r, \pi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = 0.$$

Da der im §. 54. vorkommende geschlossene Ausdruck denselben Werth geben mufs, so hat man die Gleichung:

$$S(-1)^{\gamma}[\beta].\frac{\pi^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)^{\cdot}} = 0, \quad \text{cond.}\ (\beta+\gamma = r),$$

und vermöge derselben können die Werthe der Reihen $[1]$, $[2]$, $[3]$, u. s. w. recurrirend berechnet werden, obgleich sie für $r = 0$ versagt.

Will man aber eine Formel zur independenten Berechnung dieser Werthe ableiten, so multiplicire man nur die so eben gefundene Recursionsformel mit $v^{2r+1} = v^{2\beta}.v^{2\gamma+1}$, setze darauf, um auch r als veränderlich anzusehen, etwa λ für r, und man hat:

$$S(-1)^{\gamma}[\beta].\frac{\pi^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)^{\cdot}}.v^{2\lambda+1} = \text{const.}, \quad \text{cond.}\ (\beta+\gamma = \lambda).$$

Die Constante rührt daher, weil die Recursionsformel für $r = 0$ nicht anzuwenden war; sie kann aber leicht bestimmt werden, indem man nur $\lambda = 0$ setzt, wodurch man $\beta = \gamma = 0$ und also:

$$[0].\pi v = \text{const.}$$

erhält. Nun ist aber $[0] = S(-1)^{\alpha} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, also hat man:

$$\tfrac{1}{2}\pi v = S(-1)^{\gamma}[\beta].\frac{\pi^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)^{\cdot}}.v^{2\lambda+1}, \quad \text{cond.}\ (\beta+\gamma = \lambda).$$

Diese Reihe ist aber das Product der beiden Reihen $S(-1)^{\gamma}\frac{(v\pi)^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)^{\cdot}}$ und $S[\beta].v^{2\beta}$, wovon man sich durch die Multiplication überzeugt, und die

erste derselben ist der Ausdruck für $\sin(v\pi)$. Daher hat man rückwärts:

$$S[\beta].v^{2\beta} = \frac{\frac{1}{2}\pi v}{\sin v\pi},$$

und wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite nach Potenzen von v entwickelt:

$$S[\beta].v^{2\beta} = \tfrac{1}{2}\left(1 + S\frac{4^\beta-2}{4^\beta-1}.\overset{\beta-1}{w}.\frac{(\frac{1}{2}v\pi)^{2\beta}}{(2\beta)^\prime}\right).$$

Weil endlich die beiden Reihen identisch sein müssen, so hat man:

$$[0] = \tfrac{1}{2},$$

$$[r] = \tfrac{1}{2}.\frac{4^r-2}{4^r-1}.\overset{r-1}{w}.\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}}{(2r-1)^\prime},$$

wenn die Zahl $r > 0$ ist. Nach dieser Formel können nun die Werthe der Reihen [1], [2], [3], [4], etc. unabhängig von den Werthen der vorhergehenden und nachfolgenden berechnet werden.

§. 56.

Den Beschlufs dieses Abschnittes mag noch eine ziemlich allgemeine Summation mit einigen Anwendungen derselben machen. Kennt man eine Function φx und ihre nach (steigenden) Potenzen von x fortgehende Entwickelung, etwa:

$$\varphi x = \overset{0}{a}.x^0 + \overset{1}{a}.x^1 + \overset{2}{a}.x^2 + \overset{3}{a}.x^3 + \text{etc.} = S\overset{\alpha}{a}.x^\alpha,$$

so ist man auch immer im Stande, die beiden folgenden Reihen:

$$P = \overset{0}{a}\,\mathrm{Cos}\,v + \overset{1}{a}x\,\mathrm{Cos}(v+w) + \overset{2}{a}x^2\,\mathrm{Cos}(v+2w)\ldots = S\overset{\alpha}{a}x^\alpha.\,\mathrm{Cos}(v+\alpha w),$$

$$Q = \overset{0}{a}\,\mathrm{Sin}\,v + \overset{1}{a}x\,\mathrm{Sin}(v+w) + \overset{2}{a}x^2\,\mathrm{Sin}(v+2w)\ldots = S\overset{\alpha}{a}x^\alpha.\,\mathrm{Sin}(v+\alpha w)$$

zu summiren, oder zwei Functionen in geschlossener Form nachzuweisen, durch deren gehörige Entwickelung die Reihen P und Q entstehen.

Die Addition und Subtraction giebt nemlich sogleich:

$$P + Q = S\overset{\alpha}{a}x^\alpha.e^{v+\alpha w} = e^v.S\overset{\alpha}{a}.(xe^w)^\alpha = e^v.\varphi(x.e^w),$$

$$P - Q = S\overset{\alpha}{a}x^\alpha.e^{-v-\alpha w} = e^{-v}.S\overset{\alpha}{a}.(xe^{-w})^\alpha = e^{-v}.\varphi(x.e^{-w}).$$

Die wiederholte Addition und auch Subtraction giebt dann die beiden gesuchten Ausdrücke:

$$P = \frac{e^v.\varphi(x.e^w) + e^{-v}.\varphi(x.e^{-w})}{2},$$

$$Q = \frac{e^v.\varphi(x.e^w) - e^{-v}.\varphi(x.e^{-w})}{2}.$$

Sie lassen sich bei der gegenwärtigen Allgemeinheit nicht weiter zusam-

menziehen, in jedem einzelnen Falle kann man sie aber so umformen, dafs die Exponentialgröfsen verschwinden und dafür Sinus und Cosinus in ihnen vorkommen.

§. 57.

Ist z. B. $\varphi x = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^{r-1} = \frac{x^r - 1}{x - 1}$, so hat man auf der Stelle:

$$2P = \frac{x^r . e^{v+rw} - e^v}{x e^w - 1} + \frac{x^r . e^{-v-rw} - e^{-v}}{x e^{-w} - 1}.$$

Werden die beiden Ausdrücke unter gleiche Benennung gebracht, so erhält man für die beiden Reihen:

$$P = \text{Cos}\, v + x\, \text{Cos}(v+w) + x^2 . \text{Cos}(v+2w) \ldots + x^{r-1} . \text{Cos}(v+rw-w),$$

$$Q = \text{Sin}\, v + x\, \text{Sin}(v+w) + x^2 . \text{Sin}(v+2w) \ldots + x^{r-1} . \text{Sin}(v+rw-w)$$

die einfacheren Ausdrücke:

$$P = \frac{x^{r+1} \text{Cos}(v+rw-w) - x^r \text{Cos}(v+rw) - x\, \text{Cos}(v-w) + \text{Cos}\, v}{x^2 - 2x\, \text{Cos}\, w + 1} \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{x^{r+1} \text{Sin}(v+rw-w) - x^r \text{Sin}(v+rw) - x\, \text{Sin}(v-w) + \text{Sin}\, v}{x^2 - 2x\, \text{Cos}\, w + 1}.$$

Nimmt man die ungeschlossenen beiden folgenden Reihen vor:

$$P = S x^\alpha . \text{Cos}(v + \alpha w),$$

$$Q = S x^\alpha . \text{Sin}(v + \alpha w),$$

so ist die Rechnung noch einfacher. Man hat nun $\varphi x = S x^\alpha =$ und findet:

$$P = \frac{\text{Cos}\, v - x\, \text{Cos}(v-w)}{1 - 2x\, \text{Cos}\, w + x^2},$$

$$Q = \frac{\text{Sin}\, v - x\, \text{Sin}(v-w)}{1 - 2x\, \text{Cos}\, w + x^2}.$$

Zusatz 1. Setzt man im Ausdrucke Q einmal $v = 0$ und dann $v = w$, so hat man:

$$S x^\alpha\, \text{Sin}\, \alpha w = \frac{x\, \text{Sin}\, w}{1 - 2x\, \text{Cos}\, w + x}$$

$$S x^\alpha\, \text{Sin}(\alpha+1, w = \frac{\text{Sin}\, w}{1 - 2x\, \text{Cos}\, w + x^2}.$$

Wird nun die erste Reihe mit B und die zweite mit A multiplicirt, so giebt die nachherige Addition:

$$\frac{A + Bx}{1 - 2x\, \text{Cos}\, w + x^2} = S \frac{A\, \text{Sin}(\alpha+1)\, w + B\, \text{Sin}\, \alpha w}{\text{Sin}\, w} . x^\alpha.$$

Zusatz 2. Setzt man in den beiden Ausdrücken für P den Arcus $v = k$, $w = 2k$ und $x = -1$, so erhält man:

$$S(-1)^\alpha\, \text{Cos}(2\alpha + 1)k = \frac{2\, \text{Cos}\, k}{2(1 + \text{Cos}\, 2k} = \frac{1}{2\, \text{Cos}\, k}.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit ∂k und integrirt, so erhält man:

$$lk = 2.S(-1)^{\alpha}\frac{\mathfrak{Sin}(2\alpha+1)k}{2\alpha+1}.$$

Wird hierin $k\sqrt{-1}$ für k gesetzt, so erhält man noch:

$$\mathfrak{L}k = 2.S(-1)^{\alpha}\frac{\sin(2\alpha+1)k}{2\alpha+1}.$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen sind:

$$lk = 2(\mathfrak{Sin}\,k - \tfrac{1}{3}\mathfrak{Sin}\,3k + \tfrac{1}{5}\mathfrak{Sin}\,5k - \tfrac{1}{7}\mathfrak{Sin}\,7k + \text{etc.}) \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{L}k = 2(\sin k - \tfrac{1}{3}\sin 3k + \tfrac{1}{5}\sin 5k - \tfrac{1}{7}\sin 7k + \text{etc.}).$$

§. 58.

Endlich sei $P = S\frac{x^{\alpha}}{\alpha'}\mathfrak{Cos}(v+\alpha w)$, und $Q = S\frac{x^{\alpha}}{\alpha'}\mathfrak{Sin}(v+\alpha w)$, so dafs die Function $\varphi x = e^{x} = S\frac{x^{\alpha}}{\alpha'}$ ist. Für diese Reihen hat man dann:

$$P = \frac{e^{v+xe^{w}} + e^{-v+xe^{-w}}}{2},$$
$$Q = \frac{e^{v+xe^{w}} - e^{-v+xe^{-w}}}{2},$$

oder $2P = \mathfrak{Cos}(v+xe^{w}) + \mathfrak{Sin}(v+xe^{w}) + \mathfrak{Cos}(-v+xe^{-w}) + \mathfrak{Sin}(-v+xe^{-w})$
und $2Q = \mathfrak{Cos}(v+xe^{w}) + \mathfrak{Sin}(v+xe^{w}) - \mathfrak{Cos}(-v+xe^{-w}) - \mathfrak{Sin}(-v+xe^{-w})$,
oder einfacher:

$$P = \mathfrak{Cos}(v+x\,\mathfrak{Sin}\,w).[\mathfrak{Cos}(x\,\mathfrak{Cos}\,w) + \mathfrak{Sin}(x\,\mathfrak{Cos}\,w)] \quad \text{und}$$
$$Q = \mathfrak{Sin}(v+x\,\mathfrak{Sin}\,w).[\mathfrak{Cos}(x\,\mathfrak{Cos}\,w) + \mathfrak{Sin}(x\,\mathfrak{Cos}\,w)].$$

Will man also die Form der Exponentialgröfse nicht durchaus meiden, so hat man endlich:

$$P = e^{x\,\mathfrak{Cos}\,w}.\mathfrak{Cos}(v+x\,\mathfrak{Sin}\,w),$$
$$Q = e^{x\,\mathfrak{Cos}\,w}.\mathfrak{Sin}(v+x\,\mathfrak{Sin}\,w).$$

Diese und alle vorhergehenden Formeln dieses Abschnittes lassen sich ohne alle weitere Rechnung auf cyklische Functionen übertragen.

Zwölfter Abschnitt.

Die Potenzialfunctionen als Producte unendlich vieler Factoren. Folgerungen daraus.

Wenn man die Vorstellung von Reihen zuläfst, welche ins Unendliche auslaufen, so ist auch die Darstellung einer Gröfse als ein Product unendlich vieler Factoren eben dadurch erlaubt. Die logarithmischen Entwickelungen bestehen in der That sämmtlich gerade in der Auffindung

oder Angabe solcher Producte. Wenn z. B. die Reihe: $\log \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = S\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$ gefunden ist, so hat man auf der Stelle umgekehrt:

$$\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^x.\sqrt[3]{e^{x^3}}.\sqrt[5]{e^{x^5}}.\sqrt[7]{e^{x^7}}.\sqrt[9]{e^{x^9}}\ldots$$

Der allgemeine Factor dieses Productes ist offenbar: $e^{\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}}$. Ein dem allgemeinen Factor eines Productes vorgesetztes Zeichen P kann und soll die Bedeutung haben, daſs aus diesem Factor eine Reihe besonderer Factoren hergeleitet werden soll, damit aus ihnen ein Product gebildet werde. Soll der Fortschritt nicht ins Unendliche fortgehen, so kann er durch hinzugefügte Bedingungen eingeschränkt werden. Dieses Zeichen bezieht sich dann, wie das Summezeichen S, auf gewisse veränderliche positive ganze Zahlen, welche durch die ersten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabetes bezeichnet werden. In Anwendung dieser Bezeichnung hat man dann z. B.

$$\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = P\left(e^{\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}}\right),$$

und es bedeutet also diese Darstellung nur in anderer Form, was auch durch die Bezeichnung $\log \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = S\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$, obgleich im vorliegenden Falle bequemer, ausgedrückt wird.

§. 60.

Die Function $\sin(v\pi)$ ist allemal Null, wenn unter v eine ganze Zahl verstanden wird, und also aus der Zahlenreihe:

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, \mp 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

welche nach beide Seiten ins Unendliche ausläuft, ein Glied als Werth für v genommen wird. Die Gröſse $1+\frac{v}{\alpha+1}$ und auch $1-\frac{v}{\alpha+1}$ wird Null, die erste für $v = -(\alpha+1)$ und die zweite für $v = +(\alpha+1)$.

Das Product: $P\left(1+\frac{v}{\alpha+1}\right)$ ist also $=0$ für jeden negativen Werth von v, welcher >0 und eine ganze Zahl ist, und eben so wird das Product $P\left(1-\frac{v}{\alpha+1}\right) = 0$ für jeden positiven Werth von v, welcher >0 und eine ganze Zahl ist. Daher ist das Product:

$$v.P\left(1+\frac{v}{\alpha+1}\right).P\left(1-\frac{v}{\alpha+1}\right) = 0.$$

für jeden Werth von v, welcher in der vorhin aufgestellten Zahlenreihe enthalten ist, und es hat in sofern dieselbe Eigenschaft, als die Function $\sin(v\pi)$.

Es steht daher zu erwarten, dafs jenes Product mit dieser Potenzialfunction entweder gleichbedeutend ist, oder doch in einer einfachen Beziehung zu ihr stehen wird.

Da nun $P\left(1+\frac{v}{\alpha+1}\right).P\left(1-\frac{v}{\alpha+1}\right)=P\left[\left(1+\frac{v}{\alpha+1}\right)\left(1-\frac{v}{\alpha+1}\right)\right]$, oder auch endlich $=P\left(1-\frac{v^2}{(\alpha+1)^2}\right)$ ist, so wird man untersuchen, ob man diesem Producte nicht eine Form geben kann, welche vergleichbar ist mit einer ähnlichen Form, unter der auch die Function $\sin(v\pi)$ dargestellt werden kann. Deuten wir dieses Product mit Q an, also: $Q=P\left(1-\frac{v^2}{(\alpha+1)^2}\right)$, so wird man von dem Versuche, Q nach Potenzen von v zu entwickeln, abstehen und lieber den natürlichen Logarithmen von Q also entwickeln, um die entstehende Reihe dann mit der für $\log\sin(v\pi)$ zu vergleichen. Man hat nemlich sogleich:

$$\log Q = S\log\left(1-\frac{v^2}{(\alpha+1)^2}\right) = -S\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2\beta}.\frac{v^{2\beta}}{\beta} \text{ für } \beta>0.$$

Die Reihe hat einen doppelten Fortschritt, und erscheint einfacher, wenn man allgemein setzt:

$$\overset{r}{a} = S\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r},$$

denn nun kann sie also dargestellt werden: $\log Q = -S\frac{\overset{\beta}{a}}{\beta}.v^{2\beta}$ für $\beta>0$.

Die fernere Untersuchung mufs natürlich zunächst die durch $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$, etc. bezeichneten Reihen betreffen.

§. 61.

Die Reihe $\overset{r}{a}=S\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r}=\frac{1}{1^{2r}}+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+$ etc. hat Ähnlichkeit mit der im §. 55. vorgekommenen Reihe:

$$[r] = S(-1)^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r}.$$

Wird diese Reihe, da ihr Werth der geringere ist, von der vorigen subtrahirt, so erhält man:

$$\overset{r}{a}-[r] = 2.S\left(\frac{1}{2\alpha+2}\right)^{2r} = \frac{2}{4^r}.S\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{2r} = \frac{2}{4^r}.\overset{r}{a}.$$

Rückwärts hat man also $\overset{r}{a} = \frac{4^r}{4^r-2}.[r]$, und wird für $[r]$ der im §. 55 gefundene Werth substituirt, so hat man:

$$\overset{r}{a} = \tfrac{1}{2}.\frac{4^r}{4^r-1}.\overset{r-1}{w}.\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}}{(2r-1)'} = r.\frac{\overset{r-1}{w}}{4^r-1}.\frac{\pi^{2r}}{(2r)'}.$$

Wird dieser Werth weiter in die für $\log Q$ im §. 60. gefundene Reihe gebracht, so hat man:

$$\log Q = -S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^\alpha-1}.\frac{(\pi v)^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \text{ für } \alpha > 0.$$

Da nun aber $\log\sin(v\pi) = \log(v\pi) - S\frac{\overset{\alpha-1}{w}}{4^\alpha-1}.\frac{(v\pi)^{2\alpha}}{(2\alpha)'}$ für $\alpha>0$ nach §. 45. ist, so hat man offenbar: $\log\sin(v\pi) = \log(v\pi) + \log Q = \log(v\pi Q)$, und also:

$$\sin(v\pi) = v\pi Q = v\pi.P\left[\left(1+\frac{v}{\alpha+1}\right)\left(1-\frac{v}{\alpha+1}\right)\right].$$

Setzt man, um zu den hyperbolischen Sinus überzugehen: $v\sqrt{-1}$ für v, so erhält man:

$$\mathfrak{Sin}(v\pi) = v\pi.P\left(1+\frac{v^2}{(\alpha+1)^2}\right).$$

§. 62.

Die Cosinus lassen sich ebenfalls in der Form von Producten unendlich vieler Factoren darstellen. Man gelangt auch zu dieser Form auf eine ähnliche Art, wie bei den Sinus; indessen wird es gerathener sein, diese Form aus der vorigen herzuleiten, weil dadurch zugleich der Zusammenhang beider aufgehellet wird. Da nemlich $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{1-v}{2}\right)\pi = \cos\frac{\pi v}{2}$ ist, so braucht man nur in der für $\sin v\pi$ gefundenen Formel des §. 61. an die Stelle von v zu setzen $\frac{1-v}{2}$. Das giebt:

$$\cos\frac{v\pi}{2} = \frac{1-v}{2}\pi.P\left[\left(1+\frac{1-v}{2(\alpha+1)}\right)\left(1-\frac{1-v}{2(\alpha+1)}\right)\right].$$

Nun ist aber $1+\frac{1-v}{2(\alpha+1)} = \frac{2\alpha+3-v}{2\alpha+2}$, und $1-\frac{1-v}{2(\alpha+1)} = \frac{2\alpha+1+v}{2\alpha+2}$; daher hat man:

$$1. \quad \cos\frac{v\pi}{2} = \frac{\pi}{2}P\left(\frac{(2\alpha+1-v)(2\alpha+1+v)}{(2\alpha+2)(2\alpha+2)}\right).$$

Setzt man hierin $v=0$, so hat man, weil $\cos 0 = 1$ ist:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot P\left[\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\right)^2\right],$$

woraus $\frac{\pi}{2} = P\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^2$ folgt. Dieser Ausdruck soll von **Wallisius** herrühren: er ist ohne die abkürzende Bezeichnung:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4.6.8.10.12\ldots.}{1.3.5.7.\ 9.11\ldots.}.$$

Wird der für $\frac{\pi}{2}$ gefundene Ausdruck im Ausdrucke von $\cos\frac{v\pi}{2}$ substituirt, so erhält man für $\cos\frac{v\pi}{2}$ den neuen Ausdruck:

$$\cos\frac{v\pi}{2} = P\left[\left(1+\frac{v}{2\alpha+1}\right)\left(1-\frac{v}{2\alpha+1}\right)\right].$$

Wird endlich noch $v\sqrt{-1}$ für v gesetzt, so entsteht für den hyperbolischen Cosinus der Ausdruck:

$$\mathfrak{Cos}\frac{v\pi}{2} = P\left(1+\frac{v^2}{(2\alpha+1)^2}\right).$$

Da nun $\sin\frac{v\pi}{2} = \frac{v\pi}{2} P\left(\frac{2\alpha+2+v}{2\alpha+2}\cdot\frac{2\alpha+2-v}{2\alpha+2}\right)$, so giebt die Division durch den ersten Ausdruck von $\cos\frac{v\pi}{2}$ die neue Formel:

$$\tang\frac{v\pi}{2} = v \cdot P\left(\frac{(2\alpha+2+v)(2\alpha+2-v)}{(2\alpha+1+v)(2\alpha+1-v)}\right) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Tang}\frac{v\pi}{2} = v \cdot P\left(\frac{(2\alpha+2)^2+v^2}{(2\alpha+1)^2+v^2}\right).$$

§. 63.

Hiermit ist man im Stande, einen für die genauere Kenntniſs der Function $\mathfrak{L}k$ wichtigen Ausdruck herzuleiten. Da nemlich $\mathfrak{L}k = \log\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+k\right)$ ist, so erhält man, wenn $v\frac{\pi}{2}$ für k gesetzt wird:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \log\tang\frac{1+v}{4}\pi = \log\tang\left(\frac{1+v}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man daher im Ausdrucke für $\tang\frac{v\pi}{2}$ für v an die Stelle $\frac{1+v}{2}$, so erhält man:

$$\tang\frac{1+v}{4}\pi = \frac{1+v}{2}\cdot P\left(\frac{4\alpha+5+v}{2}\right)\cdot P\left(\frac{4\alpha+3-v}{2}\right)\cdot P\left(\frac{2}{4\alpha+3+v}\right)\cdot P\left(\frac{2}{4\alpha+1-v}\right).$$

Nun ist aber $\frac{1+v}{2}\cdot P\left(\frac{4\alpha+5+v}{2}\right) = P\left(\frac{4\alpha+1+v}{2}\right)$, also hat man:

$$\tang\frac{1+v}{4}\pi = P\left(\frac{(4\alpha+1+v)(4\alpha+3-v)}{(4\alpha+1-v)(4\alpha+3+v)}\right).$$

Daher ist $\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = S\log\frac{4\alpha+1+v}{4\alpha+1-v} - S\log\frac{4\alpha+3+v}{4\alpha+3-v}$.

Die ersten Glieder dieser Reihe sind offenbar:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \log\frac{1+v}{1-v} - \log\frac{3+v}{3-v} + \log\frac{5+v}{5-v} - \log\frac{7+v}{7-v} + \log\frac{9+v}{9-v} - \text{etc}$$

und man kann sie kurz so ausdrücken:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = S(-1)^\alpha.\log\frac{2\alpha+1+v}{2\alpha+1-v}.$$

Zusatz 1. Setzt man weiter allgemein $\varphi(r) = \mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang} = \frac{v}{2r+1}\right)$, so ist bekanntlich:

$$\varphi(r) = \log\sqrt{\left(\frac{2r+1+v}{2r+1-v}\right)} = \tfrac{1}{2}\log\frac{2r+1+v}{2r+1-v},$$

und also offenbar auch:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = 2.S(-1)^\alpha.\varphi(\alpha),$$

Setzt man $v\sqrt{-1}$ für v, so erhält man noch die Reihe:

$$l\left(\frac{v\pi}{2}\right) = 2.S(-1)^\alpha.\varphi(\alpha) \quad \text{für} \quad \varphi(r) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{v}{2r+1}\right).$$

Dieselben Resultate erhält man auch aus dem Ausdrucke für $\sin v\pi$ im

§. 61., da $\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \log\dfrac{\sin\frac{1+v}{4}\pi}{\sin\frac{1-v}{4}\pi}$.

Zusatz 2. Wenn man den Ausdruck $\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = S(-1)^\alpha\log\frac{2\alpha+1+v}{2\alpha+1-v}$ differentiirt und dann k setzt für $\frac{v\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{1}{\cos k} = S(-1)^\alpha\frac{(2\alpha+1)\pi}{(\alpha+\frac{1}{2})^2\pi^2 - k^2}$$

und also auch:

$$\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,k} = S(-1)^\alpha\frac{(2\alpha+1)\pi}{(\alpha+\frac{1}{2})^2\pi^2 + k^2}.$$

§. 64.

Man kann die im §. 63. für $\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right)$ gefundene Reihe leicht nach Potenzen von v entwickeln, und erhält dann eine Reihe mit doppeltem Fortschritte:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right) = {} & \frac{2v}{1}.\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{2v^3}{3}.\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{2v^5}{5}.\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.}\right)\\ & + \frac{2v^7}{7}.\left(1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.}\right)\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Wählt man für die Reihen in den Klammern die folgende Bezeichnung:

$$\psi n = S(-1)^{a}.\left(\frac{1}{2\alpha+1}\right)^{2n+1},$$

so ist offenbar:

$$\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right) = 2.S\psi\alpha.\frac{v^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}.$$

Da nun aber:

$$\mathfrak{L}\left(u.\frac{\pi}{2}\right) = S\overset{\alpha}{u}.\frac{\left(\frac{v\pi}{2}\right)^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}$$

nach §. 48. gefunden wird, so giebt die Identificirung der beiden Reihen:

$$\frac{2\psi n}{2n+1} = \frac{\overset{n}{u}.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)'}, \quad \text{oder} \quad \psi n = \tfrac{1}{2}.\frac{\overset{n}{u}}{(2n)'}.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}.$$

Da nun zur Berechnung der Vorzahlen $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$, etc. in der Reihe des §. 48. für $\mathfrak{L}k$ eine ziemlich einfache Recursionsformel nachgewiesen ist, so können also auch die Summen der Reihen $\psi 1$, $\psi 2$, $\psi 3$, etc. berechnet werden, ohne die einzelnen Glieder dieser Reihen in Decimalbrüche zu verwandeln.

Aus der bloſsen Ansicht der Reihe ψn erhellet, daſs ihr Werth sich bei wachsendem n der Grenze Eins nähert. Daher nähert sich aber der Ausdruck $\frac{\overset{n}{u}}{(2n+1)'}.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$, welcher der Coëfficient des allgemeinen Gliedes in der Reihe für $\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right)$ ist, der Grenze $\frac{2}{2n+1}$, woraus erhellet, daſs diese Reihe nur bei einem geringen Werthe von v rasch convergirt, da v immer < 1 ist.

§. 65.

Werden die einzelnen Glieder oder wenigstens ihre Coëfficienten in Decimalbrüche verwandelt, so hat man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right) = {} & v.1,57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13216\ 916 \\
& + v^{3}.0,64596\ 40975\ 06246\ 25365\ 57565\ 636 \\
& + v^{5}.0,39846\ 31312\ 30835\ 22560\ 25277\ 44 \\
& + v^{7}.0,28558\ 70022\ 54439\ 97414\ 18132\ 55 \\
& + v^{9}.0,22221\ 10409\ 30493\ 35329\ 36348 \\
& + v^{11}.0,18181\ 71590\ 86149\ 76348\ 5278 \\
& + v^{13}.0,15384\ 60574\ 74429\ 43709\ 25 \\
& + v^{15}.0,13333\ 33240\ 45445\ 68308 \\
& + v^{17}.0,11764\ 70579\ 12680\ 234 \\
& + v^{19}.0,10526\ 31572\ 01451\ 8 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Läfst man aber in der Reihe des §. 63. das erste Glied $\log \frac{1+v}{1-v}$ unentwickelt, so findet man:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(v.\frac{\pi}{2}\right) = \log \frac{1+v}{1-v} & - v\ .\ 0,42920\ 36732\ 05103\ 38076\ 86783 \\
& - v^3 .\ 0,02070\ 25691\ 60420\ 41301\ 09101 \\
& - v^5 .\ 0,00153\ 68687\ 69164\ 77439\ 74722 \\
& - v^7 .\ 0,00012\ 72834\ 59845\ 74014\ 39010 \\
& - v^9 .\ 0,00001\ 11812\ 91728\ 86892\ 85874 \\
& - v^{11} .\ 0,00000\ 10227\ 32032\ 05469\ 6540 \\
& - v^{13} .\ 0,00000\ 00963\ 71727\ 40906\ 13 \\
& - v^{15} .\ 0,00000\ 00092\ 87887\ 65025 \\
& - v^{17} .\ 0,00000\ 00009\ 10849\ 178 \\
& - v^{19} .\ 0,00000\ 00000\ 10057\ 6 \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Diese Reihe convergirt nun ungleich rascher als die vorige; wenn man zwei oder noch mehrere erste Glieder der Reihe des §. 63. unentwickelt läfst, so gelangt man zu Reihen, welche noch rascher convergiren, als die vorstehenden. Wenn $v > \frac{1}{2}$ wird, so kann man auch die folgende Reihe mit Vortheil gebrauchen, worin dann $v < \frac{1}{2}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - v.\pi\right) = \log \frac{1}{v} - & \quad\ 0,45158\ 27052\ 89454\ 86473 \\
& - v^2 .\ 0,82246\ 69334\ 24113\ 21823 \\
& - v^4 .\ 0,47351\ 64147\ 48617\ 95879 \\
& - v^6 .\ 0,32851\ 70304\ 32478\ 36803 \\
& - v^8 .\ 0,24905\ 82504\ 63161\ 97481 \\
& - v^{10} .\ 0,19980\ 79015\ 19654\ 32313 \\
& - v^{12} .\ 0,16662\ 62808\ 57309\ 69848 \\
& - v^{14} .\ 0,14284\ 84529\ 06568\ 53116 \\
& - v^{16} .\ 0,12499\ 80955\ 26863\ 26330 \\
& - v^{18} .\ 0,11111\ 06875\ 41067\ 79039 \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Es ist somit für eine bequeme Berechnung der Function $\mathfrak{L}k$ zwischen den Grenzen $k=0$ und $k=\frac{\pi}{2}$ behufs der Anfertigung einer Tabelle für die Werthe dieser Function gesorgt.

(Die Fortsetzung im nächsten Hefte.)

17.

Remarques sur une certaine transformation des fonctions, fondée sur les relations des racines de l'unité.

(Par Mr. *C. Jürgensen* de Copenhague.)

Dans le troisième cahier du second volume de ce journal Mr. L. Olivier a considéré une espèce particulière de fonctions, qui jouissent des propriétés semblables à celles des fonctions connues sous le nom de Cosinus et Sinus.

Le procédé fort élégant, dont il a fait usage, appliqué à une fonction quelconque, m'a conduit à quelque chose de plus général; aussi suis je parvenu à démontrer, que les fonctions, trouvées par Mr. Olivier, peuvent en effet s'exprimer au moyen de Sinus et Cosinus.

Peut-être les résultats, auxquels je suis parvenu, pourront ils intéresser quelques-uns des lecteurs de ce journal.

Lorsqu'on désigne par

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

une équation d'un dégré quelconque, et par

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ S_k \text{ etc.}$$

les sommes des puissances 0, 1, 2, 3, ... k etc. des racines, on aura, comme on sait:

$$S_k + p_1 S_{k-1} + p_2 S_{k-2} + \ldots + p_{k-1} S_1 + p_k k = 0.$$

Supposant maintenant

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ \ldots\ p_{n-1} = 0,\ p_n = -1,\ p_{n+1} = 0 \text{ etc.},$$

on aura,

lorsque $k < n$, $S_k = 0$,

lorsque $k = n$, $S_k - n = 0$ ou $S_k = n$,

enfin, lorsque $k > n$, $S_k - S_{k-n} = 0$ ou $S_k = S_{k-n}$,

d'où on conclura, que S_k sera toujours $= 0$ pour l'équation $x^n - 1 = 0$, lorsque k n'est pas multiple de n, mais $= n$ dans le cas contraire.

Désignant donc par

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ \alpha^n$$

les n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

on aura $$\alpha^m + \alpha^{2m} + \alpha^{3m} + \alpha^{4m} + \dots + \alpha^{nm} = n \quad \text{ou} \quad = 0.$$
selon que m est ou n'est pas multiple de n.

Soit maintenant fx une fonction quelconque de x, qui peut se développer suivant les puissances entières et positives de x, et
$$f_0, \; f_1, \; f_2, \; f_3, \; \dots f_m \dots$$
les valeurs de la fonction elle-même et des coefficiens différentiels du premier, second, m^{me} ordre, lorsque $x = 0$. Cela posé, on a, par le théorème connu:

$$1. \quad fx = f_0 + xf_1 + \frac{x^2}{2}f_2 + \frac{x^3}{2.3}f_3 + \dots + \frac{x^m}{2.3\dots m}f_m + \dots$$

Substituant au lieu de x respectivement les valeurs
$$\alpha x, \; \alpha^2 x, \; \alpha^3 x, \; \dots \; \alpha^n x,$$
on trouve:

$$2. \begin{cases} f\alpha x = f_0 + \alpha x f_1 + \dfrac{\alpha^2 x^2}{2}f_2 + \dfrac{\alpha^3 x^3}{2.3}f_3 + \dots + \dfrac{\alpha^m x^m}{2.3\dots m}f_m + \dots \\ f\alpha^2 x = f_0 + \alpha^2 x f_1 + \dfrac{\alpha^4 x^2}{2}f_2 + \dfrac{\alpha^6 x^3}{2.3}f_3 + \dots + \dfrac{\alpha^{2m} x^m}{2.3\dots m}f_m + \dots \\ f\alpha^3 x = f_0 + \alpha^3 x f_1 + \dfrac{\alpha^6 x^2}{2}f_2 + \dfrac{\alpha^9 x^3}{2.3}f_3 + \dots + \dfrac{\alpha^{3m} x^m}{2.3\dots m}f_m + \dots \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ f\alpha^n x = f_0 + \alpha^n x f_1 + \dfrac{\alpha^{2n} x^2}{2}f_2 + \dfrac{\alpha^{3n} x^3}{2.3}f_3 + \dots + \dfrac{\alpha^{nm} x^m}{2.3\dots m}f_m + \dots \end{cases}$$

Ajoutant ces équations, on trouve:

$$3. \quad f\alpha x + f\alpha^2 x + f\alpha^3 x + \dots + f\alpha^n x$$
$$= n\left(f_0 + \frac{x^n}{2.3\dots n}f_n + \frac{x^{2n}}{2.3\dots 2n}f_{2n} + \frac{x^{3n}}{2.3\dots 3n}f_{3n} + \dots\right).$$

Multipliant maintenant la première des équations (2.) par α^{n-1}, la seconde par α^{n-2}, la troisième par α^{n-3} et ainsi de suite, et ajoutant les produits, on obtient:

$$4. \quad \alpha^{n-1}f\alpha x + \alpha^{n-2}f\alpha^2 x + \alpha^{n-3}f\alpha^3 x + \dots + f\alpha^n x$$
$$= n\left(xf_1 + \frac{x^{n+1}}{2.3\dots n+1}f_{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2.3\dots 2n+1}f_{2n+1} + \dots\right).$$

Multipliant de même par
$$\alpha^{2(n-1)}, \quad \alpha^{2(n-2)}, \quad \alpha^{2(n-3)}, \quad \dots \text{ etc.}$$
respectivement et ajoutant les produits on obtient:

$$5. \quad \alpha^{2(n-1)}f\alpha x + \alpha^{2(n-2)}f\alpha^2 x + \dots + f\alpha^n x$$
$$= n\left(\frac{x^2}{2}f_2 + \frac{x^{n+2}}{2.3\dots n+2}f_{n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\dots 2n+2}f_{2n+2} + \dots\right).$$

Continuant ainsi on trouve en général:

$$6. \quad \alpha^{m(n-1)} f\alpha x + \alpha^{m(n-2)} f\alpha^2 x + \ldots + f\alpha^n x$$
$$= n\left(\frac{x^m}{2.3\ldots m} f_m + \frac{x^{n+m}}{2.3\ldots n+m} f_{n+m} + \frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots 2n+m} f_{2n+m} + \ldots\right)$$

et en mettant $\beta.x$ au lieu de x, β étant une quantité arbitraire:

$$7. \quad \alpha^{m(n-1)} f\alpha\beta x + \alpha^{m(n-2)} f\alpha^2\beta x + \ldots + f\alpha^n\beta x$$
$$= n\beta^m\left(\frac{x^m}{2.3\ldots m} f_m + \frac{x^{n+m}\beta^n}{2.3\ldots n+m} f_{n+m} + \frac{x^{2n+m}\beta^{2n}}{2.3\ldots 2n+m} f_{2n+m} + \frac{x^{3n+m}\beta^{3n}}{2.3\ldots 3n+m} + \ldots\right).$$

Cependant si l'on choisit la quantité β de manière à satisfaire à l'équation:

$$y^n + 1 = 0,$$

on aura:

$$\beta^n = -1, \quad \beta^{2n} = +1, \quad \beta^{3n} = -1, \quad \beta^{4n} = +1 \text{ etc.}$$

et on changera seulement les signes des termes, affectés de β^n, β^{3n} etc. (Voy. le mémoire cité pag. 244.)

Les formules générales 6. et 7. pourront maintenant s'appliquer à plusieurs classes des fonctions. Par l'application aux fonctions algébriques je ne suis parvenu qu'à des choses connues; cependant, pour commencer par les cas les plus simples, je vais en présenter quelques exemples.

Soit la fonction

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$

on aura:

$$f_0 = a, \quad f_1 = b, \quad f_2 = 2c, \quad f_3 = 0 \text{ etc.}$$

Supposant $n = 1$, et par conséquent $\alpha = 1$, et m (qu'on pourra toujours choisir $> n$) $= 0$, on trouve

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$

comme précédemment.

Posant ensuite $n = 2$, $\alpha = -1$, on aura:

$$\text{lorsque } m = 0, \quad f(-x) + f(x) = 2[a + cx^2],$$
$$m = 1, \quad -f(-x) + f(x) = 2bx.$$

Enfin lorsque $n = 3$, donc $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, on a pour

$$m = 0, \quad f\alpha x + f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3a,$$
$$m = 1, \quad \alpha^2 f\alpha x + \alpha f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3bx,$$
$$m = 2, \quad \alpha f\alpha x + \alpha^2 f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3cx^2.$$

Considérant en général une fonction rationnelle et entière quelconque

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + l x^r,$$

il est aisé de parvenir aux équations suivantes:

$$f\alpha x + \quad f\alpha^2 x + \quad f\alpha^3 x + \ldots + fx = (r+1)a,$$
$$\alpha^r f\alpha x + \alpha^{r-1} f\alpha^2 x + \alpha^{r-2} f\alpha^3 x + \ldots + fx = (r+1) bx,$$
$$\alpha^{2r} f\alpha x + \alpha^{2(r-1)} f\alpha^2 x + \alpha^{2(r-2)} f\alpha^3 x + \ldots + fx = (r+1) cx^2,$$
etc. etc.
$$\alpha^{r.r} f\alpha x + \alpha^{r(r-1)} f\alpha^2 x + \alpha^{r(r-2)} f\alpha^3 x + \ldots + fx = (r+1) px^r,$$
de sorte, qu'on pourra exprimer tous les termes d'une fonction rationnelle et entière par la même fonction des quantités

$$x, \ \alpha x, \ \alpha^2 x, \ \alpha^3 x, \ \ldots \ \alpha^r x.$$

Prenant ensuite une fonction fractionnaire, p. ex.

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

on aura, comme $f_0 = 1$, $f_1 = -1$, $f_2 = 2$, $f_3 = -2.3$, ... $f_m = \pm 2.3 \ldots m$, lorsque $n = 3$ p. ex.:

$$f\alpha x + \quad f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3[\quad 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots],$$
$$\alpha^2 f\alpha x + \alpha f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3[-x + x^4 - x^7 + x^{10} - \ldots],$$
$$\alpha f\alpha x + \alpha^2 f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = 3[\quad x^2 - x^5 + x^8 - x^{11} + \ldots].$$

La dernière de ces équations donne:

$$\alpha f\alpha x + \alpha^2 f\alpha^2 x + f\alpha^3 x = \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{1+x} = 3x^2 - 3x^5 + 3x^8 - 3x^{11} + \ldots,$$

expression, aisée à vérifier.

Il sera facile de multiplier les exemples en appliquant les formules 6. et 7. aux fonctions fractionnaires quelconques, qu'on peut développer suivant les puissances entières et positives de x, ainsi qu'aux fonctions irrationnelles.

Considérons maintenant les fonctions transcendentes et en particulier les fonctions exponentielles et circulaires, et comparons ensuite les résultats que nous allons trouver.

Comme la considération des deux cas où n est un nombre pair et impair, mène à des conséquences différentes, nous allons d'abord nous occuper du premier.

Supposant donc $fx = \sin x$, on a

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -1, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 1 \quad \text{etc.}$$

et en général

$$f_{2n} = 0, \quad f_{2(2n+1)+1} = -1, \quad f_{4(2n+1)+1} = +1,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Nous aurons aussi les équations suivantes, savoir:

pour $n = 2$, donc $\alpha = -1$:

$$8.\ \begin{cases} m=0, & \sin(-x)+\sin x=0, \text{ donc } \sin(-x)=-\sin x, \text{ comme l'on sait,}\\ m=1, & -\sin(-x)+\sin x=2\left(x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\ldots\right)\\ & =2\sin x. \end{cases}$$

Pour $n=4$:

$$9.\ \begin{cases} m=0, & \sin\alpha x+\sin\alpha^2x+\sin\alpha^3x+\sin\alpha^4x=0,\\ m=1, & \alpha^3\sin\alpha x+\alpha^2\sin\alpha^2x+\alpha\sin\alpha^3x+\sin\alpha^4x=\\ & \qquad 4\left(x+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\ldots\right),\\ m=2, & \alpha^6\sin\alpha x+\alpha^4\sin\alpha^2x+\alpha^2\sin\alpha^3x+\sin\alpha^4x=0,\\ m=3, & \alpha^9\sin\alpha x+\alpha^6\sin\alpha^2x+\alpha^3\sin\alpha^3x+\sin\alpha^4x=\\ & \qquad -4\left(\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\ldots\right), \end{cases}$$

pour $n=6$:

$$10.\ \begin{cases} m=0, & \sin\alpha x+\sin\alpha^2x+\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=0\\ m=1, & \alpha^5\sin\alpha x+\alpha^4\sin\alpha^2x+\alpha^3\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=\\ & \qquad 6\left(x-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}-\ldots\right),\\ m=2, & \alpha^{10}\sin\alpha x+\alpha^8\sin\alpha^2x+\alpha^6\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=0\\ m=3, & \alpha^{15}\sin\alpha x+\alpha^{12}\sin\alpha^2x+\alpha^9\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=\\ & \qquad 6\left(-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}-\frac{x^{15}}{2.3\ldots15}+\ldots\right),\\ m=4, & \alpha^{20}\sin\alpha x+\alpha^{16}\sin\alpha^2x+\alpha^{12}\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=0\\ m=5, & \alpha^{25}\sin\alpha x+\alpha^{20}\sin\alpha^2x+\alpha^{15}\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^6x=\\ & \qquad 6\left(\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\frac{x^{17}}{2.3\ldots17}-\ldots\right). \end{cases}$$

La loi de ces valeurs est évidente, de sorte que des équations qui répondent à des valeurs paires de m, on peut tirer en général:

$$11.\ \begin{cases} \sin\alpha x+\sin\alpha^2x+\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^nx=0,\\ \alpha^{2(n-1)}\sin\alpha x+\alpha^{2(n-2)}\sin\alpha^2x+\alpha^{2(n-3)}\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^nx=0,\\ \alpha^{4(n-1)}\sin\alpha x+\alpha^{4(n-2)}\sin\alpha^2x+\alpha^{4(n-3)}\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^nx=0,\\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ \alpha^{(n-2)(n-1)}\sin\alpha x+\alpha^{(n-2)(n-2)}\sin\alpha^2x+\alpha^{(n-2)(n-3)}\sin\alpha^3x+\ldots+\sin\alpha^nx=0, \end{cases}$$

n étant toujours un nombre pair et α une des racines imaginaires de l'équation

$$x^n-1=0.$$

Quant aux équations, pour lesquelles on a supposé m un nombre impair, nous allons montrer, que les expressions en sinus, qui répondent à ces valeurs de m, s'expriment par des fonctions exponentielles correspondan-

tes. Pour cela nous formons le tableau suivant:

Pour $n=4$ on a, en posant $\beta=\sqrt{-1}=i$ dans (7.):

$$
12. \left\{
\begin{aligned}
& m=0, \quad e^{\alpha ix}+e^{\alpha^2 ix}+e^{\alpha^3 ix}+e^{\alpha^4 ix} \\
& \qquad = 4\left(1+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^8}{2.3\ldots8}+\frac{x^{12}}{2.3\ldots12}+\ldots\right), \\
& m=1, \quad \alpha^3 e^{\alpha ix}+\alpha^2 e^{\alpha^2 ix}+\alpha\, e^{\alpha^3 ix}+e^{\alpha^4 ix} \\
& \qquad = 4i\left(x+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}+\ldots\right), \\
& m=2, \quad \alpha^6 e^{\alpha ix}+\alpha^4 e^{\alpha^2 ix}+\alpha^2 e^{\alpha^3 ix}+e^{\alpha^4 ix} \\
& \qquad = -4\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^6}{2.3\ldots6}+\frac{x^{10}}{2.3\ldots10}+\frac{x^{14}}{2.3\ldots14}+\ldots\right), \\
& m=3, \quad \alpha^9 e^{\alpha ix}+\alpha^6 e^{\alpha^2 ix}+\alpha^3 e^{\alpha^3 ix}+e^{\alpha^4 ix} \\
& \qquad = -4i\left(\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\frac{x^{15}}{2.3\ldots15}+\ldots\right),
\end{aligned}
\right.
$$

pour $n=6$:

$$
13. \left\{
\begin{aligned}
& m=0, \quad e^{\alpha ix}+e^{\alpha^2 ix}+e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = 6\left(1-\frac{x^6}{2.3\ldots6}+\frac{x^{12}}{2.3\ldots12}-\frac{x^{18}}{2.3\ldots18}+\ldots\right), \\
& m=1, \quad \alpha^5 e^{\alpha ix}+\alpha^4 e^{\alpha^2 ix}+\alpha^3 e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = 6i\left(x-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}-\frac{x^{19}}{2.3\ldots19}+\ldots\right), \\
& m=2, \quad \alpha^{10} e^{\alpha ix}+\alpha^8 e^{\alpha^2 ix}+\alpha^6 e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = -6\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^8}{2.3\ldots8}+\frac{x^{14}}{2.3\ldots14}-\frac{x^{20}}{2.3\ldots20}+\ldots\right), \\
& m=3, \quad \alpha^{15} e^{\alpha ix}+\alpha^{12} e^{\alpha^2 ix}+\alpha^9 e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = -6i\left(\frac{x^3}{2.3}-\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{15}}{2.3\ldots15}-\frac{x^{21}}{2.3\ldots21}+\ldots\right), \\
& m=4. \quad \alpha^{20} e^{\alpha ix}+\alpha^{16} e^{\alpha^2 ix}+\alpha^{12} e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = 6\left(\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^{10}}{2.3\ldots10}+\frac{x^{16}}{2.3\ldots16}-\frac{x^{22}}{2.3\ldots22}+\ldots\right), \\
& m=5, \quad \alpha^{25} e^{\alpha ix}+\alpha^{20} e^{\alpha^2 ix}+\alpha^{15} e^{\alpha^3 ix}+\ldots+e^{\alpha^6 ix} \\
& \qquad = 6i\left(\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\frac{x^{17}}{2.3\ldots17}-\frac{x^{23}}{2.3\ldots23}+\ldots\right),
\end{aligned}
\right.
$$

Faisons maintenant pour abréger:

$$-e^{-ix}+e^{ix}=E_1,$$

et désignons de même les valeurs exponentielles ci-dessus, qui répondent à des valeurs impairs de m, respectivement par:

$$E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5 \text{ et } E_6$$

et les valeurs en sinus correspondantes par:

$$S_1, \; S_2, \; S_3, \; S_4, \; S_5, \; S_6.$$

Cela posé il est aisé de voir que

14. $$\frac{E_1}{i} = S_1, \; \frac{E_2}{i} = S_2, \; \frac{E_3}{i} = S_3, \; \frac{E_4}{i} = S_4, \; \frac{E_5}{i} = S_5, \; \frac{E_6}{i} = S_6.$$

Comme la loi de ces valeurs est évidente, il est aisé de les généraliser, de sorte qu'on trouve en général, lorsque n est pair et m impair:

15. $$\frac{\alpha^{m(n-1)}e^{\alpha ix} + \alpha^{m(n-2)}e^{\alpha^2 ix} + \alpha^{m(n-3)}e^{\alpha^3 ix} + \ldots + e^{\alpha^n ix}}{i}$$
$$= \alpha^{m(n-1)}\sin\alpha x + \alpha^{m(n-2)}\sin\alpha^2 x + \alpha^{m(n-3)}\sin\alpha^3 x + \ldots + \sin\alpha^n x.$$

L'expression exponentielle connue de $\sin x$ est un cas particulier de cette formule. En effet, faisant $n = 2$ et par conséquent $\alpha = -1$, $\alpha^2 = +1$, $m = 1$, on a:

$$\frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{i} = -\sin(-x) + \sin x = 2\sin x,$$

ou bien:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x.$$

Corrollaire. Comparant les deux dernières équations (22. et 23.) du mémoire cité de Mr. **Olivier**, à l'équation (9.) ci-dessus, on trouve sans peine:

$$-e^{-x} + e^{+x} + \frac{-e^{-ix} + e^{+ix}}{i} = S_2,$$
$$e^{-x} - e^{x} + \frac{-e^{-ix} + e^{ix}}{i} = S_3.$$

Mais ces valeurs ne sont autre chose que celles que nous venons de trouver, savoir

$$\frac{E_2}{i} \text{ et } \frac{E_3}{i},$$

ce qu'il est aisé de voir, puisque α dans E_2 et E_3 doit satisfaire à l'équation

$$y^4 - 1 = 0.$$

Posons maintenant $f(x) = \cos x$, d'où:

$$f_0 = 1, \; f_1 = 0, \; f_2 = -1, \; f_3 = 0, \; f_4 = 1, \; f_5 = 0 \text{ etc.}$$

et en général

$$f_{2\nu+1} = 0, \; f_{2(2\nu+1)} = -1, \; f_{4(2\nu+1)} = +1.$$

Il est maintenant aisé de former le tableau suivant pour $n = 6$ p. ex.:

$$16.\quad \begin{cases} m=0, & \cos\alpha x + \cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = \\ & \qquad 6\left(1 - \frac{x^6}{2.3\ldots 6} + \frac{x^{12}}{2.3\ldots 12} - \ldots\right), \\ m=1, & \alpha^5\cos\alpha x + \alpha^4\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \\ m=2, & \alpha^{10}\cos\alpha x + \alpha^8\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = \\ & \qquad 6\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^8}{2.3\ldots 8} - \frac{x^{14}}{2.3\ldots 14} + \ldots\right), \\ m=3, & \alpha^{15}\cos\alpha x + \alpha^{12}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \\ m=4, & \alpha^{20}\cos\alpha x + \alpha^{16}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = \\ & \qquad 6\left(\frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^{10}}{2.3\ldots 10} + \frac{x^{16}}{2.3\ldots 16} - \ldots\right), \\ m=5, & \alpha^{25}\cos\alpha x + \alpha^{20}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \end{cases}$$

ce qui suffit pour conclure en général, lorsque n est pair:

$$17.\quad \begin{cases} \alpha^{n-1}\cos\alpha x + \alpha^{n-2}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \\ \alpha^{3(n-1)}\cos\alpha x + \alpha^{3(n-2)}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \\ \alpha^{5(n-1)}\cos\alpha x + \alpha^{5(n-2)}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ \alpha^{(n-1)(n-1)}\cos\alpha x + \alpha^{(n-1)(n-2)}\cos\alpha^2 x + \ldots + \cos\alpha^n x = 0, \end{cases}$$

et de même, en comparant les équations (16. et 13.), on verra qu'on aura en général, lorsque n et m sont paires:

$$18.\quad \alpha^{m(n-1)}e^{i\alpha x} + \alpha^{m(n-2)}e^{i\alpha^2 x} + \alpha^{m(n-3)}e^{i\alpha^3 x} + \ldots + e^{i\alpha^n x}$$
$$= \alpha^{m(n-1)}\cos\alpha x + \alpha^{m(n-2)}\cos\alpha^2 x + \alpha^{m(n-3)}\cos\alpha^3 x + \ldots + \cos\alpha^n x.$$

Supposant $n=2$, $\alpha=-1$, $\alpha^2=+1$ et $m=0$, on a:

$$e^{-ix} + e^{ix} = \cos(-x) + \cos x = 2\cos x,$$

ou bien:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x,$$

formule connue.

Nous ferons maintenant quelques remarques sur les formules (15. et 18.), que nous venons de trouver.

1. En mettant $-ix$ pour x dans les deux formules et multipliant dans la première haut et bas par i, on aura sur le champ:

$$19.\quad i(\alpha^{m(n-1)}e^{\alpha x} + \alpha^{m(n-2)}e^{\alpha^2 x} + \ldots + e^{\alpha^n x})$$
$$= \alpha^{m(n-1)}\sin\alpha ix + \alpha^{m(n-2)}\sin\alpha^2 ix + \ldots + \sin\alpha^n ix,$$

lorsque m est impair:

$$20.\quad \alpha^{m(n-1)}e^{\alpha x} + \alpha^{m(n-2)}e^{\alpha^2 x} + \ldots + e^{\alpha^n x}$$
$$= \alpha^{m(n-1)}\cos\alpha ix + \alpha^{m(n-2)}\cos\alpha^2 ix + \ldots + \cos\alpha^n ix.$$

2. Comme la dépendance entre les fonctions exponentielles et circu-

laires est entièrement exprimée par les deux équations connues:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\cos x,\quad \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x,$$

qui ne forment d'ailleurs qu'une équation distincte; il s'en suit que toute autre relation entre les mêmes quantités doit rentrer dans les deux formules. Nous allons montrer, que les deux expressions (15. 18.) que nous avons trouvées, ne sont au fond que des transformations de ces formules.

Pour cela nous ferons observer que les racines de l'équation

$$y^n-1$$

lorsque n est pair, sont comprises dans la formule

$$y=\cos\frac{k\pi}{n}+\sin\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1},$$

où l'on doit prendre pour k tous les nombres pairs depuis 0 jusqu'à $2(n-1)$ inclusivement. De plus, lorsqu'on prend $k=\frac{1}{2}n+i$, i étant pair ou impair suivant que $\frac{1}{2}n$ est pair ou impair, on a:

$$\cos\frac{(\frac{1}{2}n+i)\pi}{n}=-\cos\frac{(\frac{1}{2}n-i)\pi}{n},\ \text{et}$$
$$\sin\frac{(\frac{1}{2}n+i)\pi}{n}=\quad\sin\frac{(\frac{1}{2}n-i)\pi}{n}.$$

Au contraire, en prenant $k=n+i$, i étant pair, on a:

$$\cos\frac{(n+i)\pi}{n}=\quad\cos\frac{(n-i)\pi}{n},\ \text{et}$$
$$\sin\frac{(n+i)\pi}{n}=-\sin\frac{(n-i)\pi}{n}.$$

Cela posé, il est aisé de voir que les valeurs

$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots.,\ \alpha^{\frac{1}{2}n},\ \alpha^{\frac{1}{2}n+1},\ \alpha^{\frac{1}{2}n+2},\ \ldots.,\ \alpha^n$ équivalent à

$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots.,\ -1,\ -\alpha,\ -\alpha^2,\ \ldots.,\ +1,$

n étant toujours pair.

En mettant ces valeurs dans les formules (15. 18.) elles deviendront:

21. $$-\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}e^{\alpha ix}-\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}e^{\alpha^2ix}-\ldots.-e^{-ix}+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}e^{-\alpha ix}+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}e^{-\alpha^2ix}+\ldots.+e^{ix}$$
$$=-\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}\sin\alpha x-\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}\sin\alpha^2x-\ldots.$$
$$\ldots.-\sin(-x)+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}\sin(-\alpha x)+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}\sin(-\alpha^2x)+\ldots.+\sin x,$$

m étant impair, et

22. $$\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}e^{\alpha ix}+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}e^{\alpha^2ix}+\ldots.+e^{-ix}+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}e^{-\alpha ix}+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}e^{-\alpha^2ix}+\ldots.+e^{ix}$$
$$=\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}\cos\alpha x+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}\cos\alpha^2x+\ldots.+\cos(-x)+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}\cos(-\alpha x)+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)},$$

lorsque m est pair.

Maintenant, en écrivant ces formules comme il suit:

$$23.\quad \alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{e^{\alpha ix}-e^{-\alpha ix}}{i}\right)+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}\left(\frac{e^{\alpha^2 ix}-e^{-\alpha^2 ix}}{i}\right)+\ldots-\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i}\right)$$
$$=\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}2\sin\alpha x+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}2\sin\alpha^2 x+\ldots-2\sin x,$$
$$24.\quad \alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}(e^{\alpha ix}+e^{-\alpha ix})+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}(e^{\alpha^2 ix}+e^{-\alpha^2 ix})+\ldots+(e^{ix}+e^{-ix})$$
$$=\alpha^{m(\frac{1}{2}n-1)}2\cos\alpha x+\alpha^{m(\frac{1}{2}n-2)}2\cos\alpha^2 x+\ldots+2\cos x,$$

on reconnait qu'elles rentrent dans les formules connues.

Il est aisé de vérifier les formules (11. et 17.), trouvees plus haut, par des considérations semblables à celles-ci.

Passons à la considération du cas, où n est un nombre impair. Faisons pour abréger, lorsque $n=3$:

$$\sin\alpha ix+\sin\alpha^2 ix+\sin\alpha^3 ix=S_1 x,$$
$$\alpha^2\sin\alpha ix+\alpha\sin\alpha^2 ix+\sin\alpha^3 ix=S_2 x,$$
$$\alpha^4\sin\alpha x+\alpha^2\sin\alpha^2 ix+\sin\alpha^3 ix=S_3 x$$

et désignons de même les valeurs correspondantes à $n=5$ par

$$S'_1,\; S'_2,\; S'_3,\; S'_4 \text{ et } S'_5,$$

nous aurons en vertu de (7.) les équations suivantes:

lorsque $n=3$:

$$25.\quad \begin{cases} m=0, & S_1 x=3i\left(\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{15}}{2.3\ldots15}+\ldots\right), \\ m=1, & S_2 x=3i\left(x+\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}+\ldots\right), \\ m=2, & S_3 x=3i\left(\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\frac{x^{17}}{2.3\ldots17}+\ldots\right), \end{cases}$$

lorsque $n=5$:

$$26.\quad \begin{cases} m=0, & S'_1 x=5i\left(\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^{15}}{2.3\ldots15}+\ldots\right), \\ m=1, & S'_2 x=5i\left(x+\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\ldots\right), \\ m=2, & S'_3 x=5i\left(\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{17}}{2.3\ldots17}+\ldots\right), \\ m=3, & S'_4 x=5i\left(\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}+\ldots\right), \\ m=4, & S'_5 x=5i\left(\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{19}}{2.3\ldots19}+\ldots\right). \end{cases}$$

Dénotons de même par:

$$C_1 x,\quad C_2 x,\quad C_3 x \quad (\text{pour } n=3), \quad \text{et}$$
$$C'_1 x,\quad C'_2 x,\quad C'_3 x,\quad C'_4 x,\quad C_5 x \quad (\text{pour } n=5)$$

les valeurs

$$\cos \alpha i x + \cos \alpha^2 i x + \cos \alpha^3 i x,$$
$$\alpha^2 \cos \alpha i x + \alpha \cos \alpha^2 i x + \cos \alpha^3 i x,$$
etc. etc.

nous aurons

lorsque $n = 3$:

$$27.\quad \begin{cases} m = 0, & C_1 x = 3\left(1 + \frac{x^6}{2.3\ldots.6} + \frac{x^{12}}{2.3\ldots.12}\right. \\ m = 1, & C_2 x = 3\left(\frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^{10}}{2.3\ldots.10} + \frac{x^{16}}{2.3\ldots.16}\right. \\ m = 2, & C_3 x = 3\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^8}{2.3\ldots.8} + \frac{x^{14}}{2.3\ldots.14}\right. \end{cases}$$

lorsque $n = 5$:

$$28.\quad \begin{cases} m = 0, & C'_1 x = 5\left(1 + \frac{x^{10}}{2.3\ldots.10} + \ldots.\right), \\ m = 1, & C'_2 x = 5\left(\frac{x^6}{2.3\ldots.6} + \frac{x^{16}}{2.3\ldots.16} + \ldots.\right), \\ m = 2, & C'_3 x = 5\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{12}}{2.3\ldots.12} + \ldots.\right), \\ m = 3, & C'_4 x = 5\left(\frac{x^8}{2.3\ldots.8} + \frac{x^{18}}{2.3\ldots.18} + \ldots.\right), \\ m = 4, & C'_5 x = 5\left(\frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^{14}}{2.3\ldots.14} + \ldots.\right). \end{cases}$$

Pour comparer ces expressions avec celles des exponentielles, faisons usage d'une notation abregée semblable à celle qu'a employée Mr. Olivier (Mém. cit. pag. 247.).

Faisant donc

$$e^{\alpha x} + e^{\alpha^2 x} + e^{\alpha^3 x} + e^{\alpha^4 x} + e^{\alpha^5 x} = \varphi'_1 x,$$
$$\alpha^4 e^{\alpha x} + \alpha^3 e^{\alpha^2 x} + \alpha^2 e^{\alpha^3 x} + \alpha e^{\alpha^4 x} + e^{\alpha^5 x} = \varphi'_2 x,$$
etc.

et

$$e^{-\alpha x} + e^{-\alpha^2 x} + e^{-\alpha^3 x} + e^{-\alpha^4 x} + e^{-\alpha^5 x} = f'_1 x,$$
$$\alpha^4 e^{-\alpha x} + \alpha^3 e^{-\alpha^2 x} + \alpha^2 e^{-\alpha^3 x} + \alpha e^{-\alpha^4 x} + e^{-\alpha^5 x} = f'_2 x,$$
etc.

on formera les équations suivantes, n étant $= 5$:

$$29.\quad \begin{cases} m = 0, & \varphi'_1 x = 5\left(1 + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^{10}}{2.3\ldots.10} + \ldots.\right), \\ m = 1, & \varphi'_2 x = 5\left(x + \frac{x^6}{2.3\ldots.6} + \frac{x^{11}}{2.3\ldots.11} + \ldots.\right), \\ m = 2, & \varphi'_3 x = 5\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^7}{2.3\ldots.7} + \frac{x^{12}}{2.3\ldots.12} + \ldots.\right). \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} m=3, & \varphi'_4 x = 5\left(\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^8}{2.3\ldots8}+\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}+\ldots\right), \\ m=4, & \varphi'_5 x = 5\left(\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{14}}{2.3\ldots14}+\ldots\right), \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} m=0, & f'_1 x = 5\left(\;1-\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^{10}}{2.3\ldots10}-\ldots\right), \\ m=1, & f'_2 x = 5\left(-x+\frac{x^6}{2.3\ldots6}-\frac{x^{11}}{2.3\ldots11}+\ldots\right), \\ m=2, & f'_3 x = 5\left(\;\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^{12}}{2.3\ldots12}-\ldots\right), \\ m=3, & f'_4 x = 5\left(-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^8}{2.3\ldots8}-\frac{x^{13}}{2.3\ldots13}+\ldots\right), \\ m=4, & f'_5 x = 5\left(\;\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^9}{2.3\ldots9}+\frac{x^{14}}{2.3\ldots14}-\ldots\right). \end{cases}$$

Mettant maintenant

$\varphi_1 x,\ \ \varphi_2 x,\ \ \varphi_3 x$ et $f_1 x,\ \ f_2 x,\ \ f_3 x$ au lieu de

$3\varphi_1 x,\ 3\varphi_2 x,\ 3\varphi_3 x$ et $3f_1 x,\ -3f_2 x,\ 3f_3 x$ (Mem. cit. p. 247.), nous aurons en soustrayant les équations (27.) du mém. cit. des équations (26.) et comparant le résultat aux équations (25.) ci-dessus:

$$31. \quad \frac{\varphi_1 x - f_1 x}{2} = \frac{S_1 x}{i}, \quad \frac{\varphi_2 x - f_2 x}{2} = \frac{S_2 x}{i}, \quad \frac{\varphi_3 x - f_3 x}{2} = \frac{S_3 x}{i},$$

et en soustrayant (30.) de (29.) et comparant le résultat à (26.):

$$32. \quad \frac{\varphi'_1 x - f'_1 x}{2} = \frac{S'_1 x}{i}, \quad \frac{\varphi'_2 x - f'_2 x}{2} = \frac{S'_2 x}{i}, \ \ldots\ \frac{\varphi'_5 x - f'_5 x}{2} = \frac{S'_5 x}{i}.$$

Au contraire, en ajoutant on a:

$$33. \quad \frac{\varphi_1 x + f_1 x}{2} = C_1 x, \quad \frac{\varphi_2 x + f_2 x}{2} = C_2 x, \quad \frac{\varphi_3 x + f_3 x}{2} = C_3 x,$$

et

$$34. \quad \frac{\varphi'_1 x + f'_1 x}{2} = C'_1 x, \quad \frac{\varphi'_2 x + f'_2 x}{2} = C'_2 x, \ \ldots\ \frac{\varphi'_5 x + f'_5 x}{2} = C'_5 x,$$

expressions qu'il est aisé de généraliser.

On en déduit aisément par l'élimination:

$$35. \quad \varphi_1 x = C_1 x + \frac{S_1 x}{i}$$

et d'autres expressions de la même forme, et enfin:

$$36. \quad f_1 x = C_1 x - \frac{S_1 x}{i} \text{ etc},$$

de sorte qu'on peut exprimer les fonctions trouvées par **Mr. Olivier**, par des Sinus et Cosinus des quantités imaginaires.

Au reste, la seconde remarque du pag. 202. s'applique aussi aux expressions 31., 32., 33., 34., 35., 36.

Il est clair qu'on peut transformer les formules générales 6. et 7. de beaucoup de manières différentes, pour parvenir à des expressions des diverses séries; nous en allons présenter un exemple.

En supposant

$$F_0 x = n\left(f_0 + \frac{x^n}{2.3\ldots n} f_n + \frac{x^{2n}}{2.3\ldots 2n} f_{2n} + \frac{x^{3n}}{2.3\ldots 3n} f_{3n} + \ldots\right),$$

$$F_1 x = n\left(x f_1 + \frac{x^{n+1}}{2.3\ldots n+1} f_{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots 2n+1} f_{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{2.3\ldots 3n+1} f_{3n+1} + \ldots\right),$$

$$F_2 x = n\left(\frac{x^2}{2} f_2 + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots n+2} f_{n+2} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots 2n+2} f_{2n+2} + \frac{x^{3n+2}}{2.3\ldots 3n+2} f_{3n+2} + \ldots\right),$$

etc. etc.

$$F_m x = n\left(\frac{x^m}{2.3\ldots m} f_m + \frac{x^{n+m}}{2.3\ldots n+m} f_{n+m} + \frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots 2n+m} f_{2n+m} + \frac{x^{3n+m}}{2.3\ldots 3n+m} f_{3n+m} + \ldots\right),$$

il est aisé de transformer ces formules par des différentiations et intégrations de manière à renfermer les mêmes puissances de x. En effet, si l'on prend le premier coëfficient différentiel de $F_1 x$, le second de $F_2 x$, le troisième de $F_3 x$ et ainsi de suite, et ajoutant ensemble $F_0 x$ et les équations ainsi trouvées, on trouve:

$$F_0 x + F_1' x + F_2'' x + \ldots + F_m^{(m)} x$$
$$= n\Big((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m) + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^n}{2.3\ldots n}$$
$$+ (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m})\frac{x^{2n}}{2.3\ldots 2n} + \ldots\Big).$$

De même en différentiant $F_2 x$ une fois, $F_3 x$ deux fois, et intégrant $F_0 x$, et prenant ensuite la somme des résultats et $F_1 x$, on trouve:

$$\int F_0 x\,\partial x + F_1 x + F_2' x + F_3'' x + \ldots + F_m^{(m-1)} x$$
$$= n\Big((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m)x + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^{n+1}}{2.3\ldots n+1}$$
$$+ (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m})\frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots 2n+1} + \ldots\Big).$$

Intégrant $F_0 x$ deux fois, $F_1 x$ une fois, et différentiant $F_3 x$ une fois, $F_4 x$ deux fois et ainsi de suite, et ajoutant à $F_2 x$, on trouve:

$$\iint F_0 x\,\partial x^2 + \int F_1 x\,\partial x + F_2 x + F_3' x + F_4'' x + \ldots + F_m^{(m-2)} x$$
$$= n\Big((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\frac{x^2}{2} + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^{n+2}}{2.3\ldots n+2}$$
$$+ (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m})\frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots 2n+2} + \ldots\Big);$$

et ainsi de suite:

$$\iiint F_0 x \partial x + \iint F_1 x \partial x^2 + \int F_2 x \partial x + F_3 x + F_4' x + F_5 x + \ldots + F_m^{(m-3)} x$$
$$= n\left((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\frac{x^3}{2.3} + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^{n+3}}{2.3\ldots n+3}\right.$$
$$\left. + (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m})\frac{x^{2n+3}}{2.3\ldots 2n+3} + \ldots\right)$$

etc. etc.

$$\int^{m-1} F_0 x \partial x^{m-1} + \int^{m-2} F_1 x \partial x^{m-2} + \int^{m-3} F_2 x \partial x^{m-3} + \ldots + F_{m-1} x + F_m' x$$
$$= n\left((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\frac{x^{m-1}}{2.3\ldots m-1} + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^{n+m-1}}{2.3\ldots n+m-1}\right.$$
$$\left. + (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots f_{2n+m})\frac{x^{2n+m-1}}{2.3\ldots 2n+m-1} + \ldots\right),$$

$$\int^m F_0 x \partial x^m + \int^{m-1} F_1 x \partial x^{m-1} + \int^{m-2} F_2 x \partial x^{m-2} + \ldots + \int F_{m-1} x \partial x + F_m x$$
$$= n\left((f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\frac{x^m}{2.3\ldots m} + (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m})\frac{x^{n+m}}{2.3\ldots n+m}\right.$$
$$\left. + (f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m})\frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots 2n+m} + \ldots\right).$$

Ajoutant maintenant toutes ces équations et désignant pour abréger les valeurs à gauche par:

$$\Sigma_0, \ \Sigma_1, \ \Sigma_2, \ \Sigma_3, \ \ldots \ \Sigma_m$$

et faisant:

$$f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m = S_m^0,$$
$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+m} = S_{n+m}^n,$$
$$f_{2n} + f_{2n+1} + f_{2n+2} + \ldots + f_{2n+m} = S_{2n+m}^{2n},$$

on trouve:

$$\frac{1}{n}(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_m) = S_m^0\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{2.3\ldots m}\right)$$
$$+ S_{n+m}^n\left(\frac{x^n}{2.3\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{2.3\ldots n+1} + \frac{x^{n+2}}{2.3\ldots n+2} + \ldots + \frac{x^{n+m}}{2.3\ldots n+m}\right)$$
$$+ S_{2n+m}^{2n}\left(\frac{x^{2n}}{2.3\ldots 2n} + \frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots 2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2.3\ldots 2n+2} + \ldots + \frac{x^{2n+m}}{2.3\ldots 2n+m}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Pour appliquer cette formule à un exemple simple, supposons qu'on demande l'expression de la série suivante:

$$S = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3\ldots 6} + \frac{x^8}{2.3\ldots 8} + \frac{x^9}{2.3\ldots 9}$$
$$+ \frac{x^{10}}{2.3\ldots 10} + \frac{x^{12}}{2.3\ldots 12} + \ldots$$

En la multipliant par 3, on la réduira à la forme ci-dessus, lorsqu'on choisit une fonction $f(x)$, pour laquelle on a:

$$S_2^0 = S_6^4 = S_{10}^8 = \text{etc.} = 3,$$

puisqu'on doit faire

$$n = 4 \quad \text{et} \quad m = 2.$$

La fonction e^x répond à cette condition, car on a alors

$$f_0 = f_1 = f_2 = \text{etc.} = 1,$$

donc en posant $m = 2$:

$$S^0_2 = S^4_6 = S^8_{10} = \text{etc.} = 3.$$

Il reste maintenant à trouver

$$\Sigma_0,\ \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2;$$

$n = 4$ conduit à l'équation

$$y^4 - 1 = 0,$$

dont les racines sont:

$$\alpha = \sqrt{-1},\ \alpha^2 = -1,\ \alpha^3 = -\sqrt{-1},\ \alpha^4 = +1,$$

donc:

$$\begin{aligned}
F_0 x &= e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x} + e^{-x\sqrt{-1}} + e^x = 2\cos x + e^x + e^{-x},\\
F_1 x &= -\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x} + \sqrt{-1}\, e^{-x\sqrt{-1}} + e^x = 2\sin x + e^x - e^{-x},\\
F_2 x &= -e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x} - e^{-x\sqrt{-1}} + e^x = -2\cos x + e^x + e^{-x},
\end{aligned}$$

On a ensuite:

$$\begin{aligned}
F'_1 x &= F''_2 x = F_0 x,\\
\int F_0 x\, \partial x &= F'_2 x = F_1 x,\\
\iint F_0 x\, \partial x^2 &= \int F_1 x\, \partial x = F_2 x.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs on trouve:

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= 6\cos x + 3e^x + 3e^{-x},\\
\Sigma_1 &= 6\sin x + 3e^x + 3e^{-x},\\
\Sigma_2 &= -6\cos x + 3e^x + 3e^{-x},
\end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{1}{4}(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2) = \tfrac{1}{4}(6\sin x + 9e^x + 3e^{-x}).$$

Divisant donc cette expression par 3, on trouve:

$$S = \tfrac{1}{4}(2\sin x + 3e^x + e^{-x}),$$

expression qu'il est aisé de vérifier par le développement.

En terminant ces remarques, nous ferons seulement observer, qu'on rendra la formule ci-dessus (pag. 208.) plus générale en ajoutant des constantes arbitraires aux intégrales.

18.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere zu beweisen, letztere aufzulösen.

(Lehrsätze vom Herrn Professor *Plücker* zu Bonn.)

1. Wenn nach allen, einer beliebigen geraden Linie parallelen Tangenten irgend einer gegebenen algebraischen Curve beliebige, unter einander gleiche Kräfte wirken, so geht die Mittelkraft aus allen diesen Kräften beständig durch einen festen Punct, wie sich die Richtung der parallelen Tangenten auch ändern mag.

Es giebt noch einige Sätze, die dem vorstehenden analog sind.

2. Wenn man auf einer geraden Linie QPQ', welche irgend eine gegebene, stetig gekrümmte, in sich selbst geschlossene Linie berührt, in gleichen Abständen vom Berührungspuncte P, zu beiden Seiten desselben zwei Puncte Q und Q' beliebig annimmt, und dann diese gerade Linie sich so bewegen läfst, dafs sie fortwährend im Puncte P die gegebene Curve berührt, so beschreibt jeder der beiden Puncte Q und Q' eine in sich selbst zurückkehrende Curve. Der Flächen-Inhalt dieser beiden Curven ist derselbe. Der zwischen jeder dieser beiden Curven und der gegebenen Curve liegende Ring behält denselben Flächenraum, was für eine Curve die gegebene auch sein mag, und dieser Flächenraum ist dem Inhalte eines Kreises gleich, der PQ zum Radius hat.

3. Neue Construction des Apollonischen Problems der Tactionen.

(Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dafs die drei gegebenen Kreise aufser einander und so liegen, dafs es einen Berührungs-Kreis giebt, der die gegebenen Kreise alle drei umhüllt, und einen andern, der keinen derselben umhüllt; die beiden eben genannten Berührungs-Kreise sind es, die wir construiren wollen.)

Man bestimme auf der Central-Linie des ersten und zweiten gegebenen Kreises die Mitten zwischen den beiden innern und den beiden äufsern Rändern dieser beiden Kreise, construire die Polaren dieser Mitten in Beziehung auf den ersten gegebenen Kreis und einen neuen Kreis, der diese beiden Polaren berührt und dessen Mittelpunct auf der Central-Linie jener beiden gegebenen Kreise liegt. Man erhält einen zweiten ganz analogen Kreis, wenn man in der eben angezeigten Construction den dritten gegebenen Kreis an die Stelle des zweiten setzt. Die Pole der äufsern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Constructions-Kreise, genommen in Beziehung auf den ersten gegebenen Kreis, sind die Mittelpuncte der beiden gesuchten Kreise.

Dieselbe Construction behält ihre Anwendbarkeit, wenn an die Stelle von einem oder von zwei gegebenen Kreisen gerade Linien oder Puncte treten.

4. Wenn irgend eine algebraische Curve, und auf dem Umfange derselben irgend ein Punct gegeben ist, und man beschreibt in diesem Puncte die Tangente und die Normale; legt ferner an die Curve 1) alle Tangenten die dieser Normalen parallel sind, und nennt die Abstände jener Tangenten von der Normalen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_m$, 2) alle Tangenten die der Tangente im gegebenen Puncte parallel sind, und nennt die Abstände von dieser Tangente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{m-1}$, und 3) alle Tangenten die durch den gegebenen Punct gehen (die Tangente in diesem Puncte selbst nicht mitgerechnet), und nennt die Winkel, welche diese Tangenten mit der Tangente im gegebenen Puncte bilden $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{m-2}$, so erhält man für den Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve in dem gegebenen Puncte folgenden Ausdruck:

$$\frac{2}{m-1} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \ldots \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \ldots \xi_{m-1}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \cdot \operatorname{tang} \omega_3 \ldots \operatorname{tang} \omega_{m-2}.$$

5. In allen Hyperbeln, welche auf einer gemeinschaftlichen Asymptote, in unendlicher Entfernung, einen dreipunctigen Contact haben, ist dasjenige Dreieck, welches durch eine beliebige Tangente von dem jedesmaligen Asymptoten-Winkel abgeschnitten wird, von constantem Inhalte. Diesen Inhalt können wir das Maafs der Krümmung der Hyperbel in unendlicher Entfernung nennen; je gröfser derselbe ist, desto langsamer nähert sich die Hyperbel ihren Asymptoten.

Wenn irgend eine beliebige algebraische Curve und eine reelle Asymptote derselben gegeben sind, so giebt es unendlich viele Hyperbeln, welche mit der Curve auf der gegebenen Asymptote einen Contact zweiter Ordnung und dieselbe Krümmung haben. Für das Maafs dieser Krümmung erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \ldots \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \ldots \xi_{m-2}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \ldots \operatorname{tang} \omega_{m-1},$$

wenn wir voraussetzen, dafs die gegebene Curve nach einer beliebigen Richtung m parallele Tangenten hat und 1) die Winkel, welche die durch einen beliebigen Punct der gegebenen Asymptote an die Curve gelegten Tangenten mit dieser Asymptote bilden, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1}$ nennen, 2) die Abstände dieses beliebigen Punctes von denjenigen Tangenten, welche auf der Asymptote senkrecht stehen, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, und endlich 3) die Abstände derjenigen Tangenten, die der Asymptote parallel sind, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-2}$ bezeichnen.

6. Wenn irgend eine algebraische Curve einen parabolischen Zweig hat, so kann man für das Maafs der Krümmung dieses parabolischen Zweiges in unendlicher Entfernung, den Parameter einer osculirenden Parabel nehmen. Wenn man irgend einen Punct beliebig annimmt, und sich von diesem Puncte m Tangenten (reelle oder imaginäre) an eine solche Curve legen lassen, so giebt es eine Richtung, nach welcher sich nur $m-2$ parallele Tangenten an die Curve legen lassen. Wir wollen die

Abstände dieser Tangenten von dem beliebig angenommenen Puncte durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$ bezeichnen, ferner die Winkel, welche die durch diesen beliebig angenommenen Punct gehenden Tangenten mit der Richtung jener Tangenten bilden, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ nennen, und endlich die Abstände derjenigen Tangenten, die auf dieser Richtung senkrecht stehen und deren es $(m-1)$ giebt: $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$. Alsdann ist jener Krümmungs-Parameter gleich:

$$\frac{4}{m-1} \cdot \frac{\xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-1}}{\eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_{m-2}} \cdot \operatorname{tang} \omega_1 \cdot \operatorname{tang} \omega_2 \ldots \operatorname{tang} \omega_m .$$

(Die Fortsetzung folgt.)

(Par M. *C. G. J. Jacobi*, prof. en math. à Königsberg.)

7. **Problème d'analyse.** Soit donnée l'équation $\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(x, y)$, on pourra trouver successivement les différentielles des ordres supérieurs: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ etc. On demande l'expression générale de $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$.

8. **Problème d'analyse indéterminée.** Soient $r, r', r'', \ldots$ $\ldots r^{(n)}$ des nombres irrationnels donnés par autant de décimales qu'on voudra, et soit donnée l'équation:

$$A r + A' r' + A'' r'' \ldots A^{(n)} r^{(n)} = 0,$$

$A, A', A'', \ldots A^{(n)}$ étant des nombres entiers inconnus. On demande une méthode générale et directe de trouver ces nombres.

(Lehrsätze von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

9. Wenn man die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC (Taf. II. Fig. 21.) durch die Puncte E, F, D halbirt, und durch die beiden ersten einen Hauptkreis legt, so wird die verlängerte Grundlinie AB davon in einem Puncte X so geschnitten, dafs $DX = 90$ Grad ist.

Wenn man ferner $XN = FE$ und $XM = BD$ macht, und den Bogen MN eines gröfsten Kreises zieht, so ist immer das Dreieck XMN an M rechtwinklig und der Bogen MN das Maafs für den halben Inhalt des Dreiecks ABC. Bezeichnet man nemlich den Überschufs der Summe der drei Winkel desselben über 180 Grad mit ε, so ist: $\varepsilon = 2 . MN$. Construirt man ferner über der Grundlinie AB ein zweites Dreieck ABC' mit einem gegebenen Winkel BAC' so, dafs $E'C' = E'A$ ist, so ist jedesmal auch $F'C' = F'B$ und $EF = E'F'$.

Endlich ist auch das Dreieck $ABC' = ABC$ und Dreieck $CC'A = CC'B$.

Man kann auch die Construction des Dreiecks ABC', statt wie vorhin, dadurch bedingen, dafs $EE' = FF'$ sein müsse.

Es wird ein möglichst einfacher oder elementarer Beweis dieses Theorems verlangt.

Hinzugefügt kann noch werden, dafs wenn man in D ein Perpendikel aufsteigen läfst, wovon EX in Y geschnitten wird, und man die Verlängerung $YZ = 90$ Grad macht, der Punct Z der Mittelpunct des dem Dreiecke ABC oder ABC' zugehörigen Lexellschen Kreises ist, und also $ZC = ZC'$ den Radius dieses kleinen Kreises ausdrückt.

10. Beschreibt man über den drei Diagonalen eines vollständigen ebenen Vierecks, als Durchmesser, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, so schneiden sie sich zweimal in einem und demselben Puncte.

(Par un anonyme.)

11. **Théorème de géométrie.** Supposons qu'un angle mobile et de grandeur donnée touche constamment une même courbe donnée; soit P un des points de la courbe décrite par le sommet de l'angle et A, B les points de contact de la courbe donnée qui répondent à ce point: la normale menée au point P à la courbe décrite par le sommet de l'angle mobile passera par le centre du cercle circonscrit au triangle PAB.

Si l'angle mobile est droit, la normale passera par le milieu de la corde de contact AB. On en tire aisément le théorème connu, que la courbe décrite par le sommet d'un angle mobile droit, dont les cotés touchent constamment une conique, est un cercle concentrique à cette courbe.

(Aufgaben von Anderen.)

12. Nachdem nachgewiesen worden, dafs ein geradliniges Dreieck ABC (Fig. 22.) durch die drei geraden Linien AP, BQ, CR, die, durch die Ecken desselben gehend, in einem und demselben Punct sich schneiden, bestimmt wird, so dafs mit gegebenen drei Scheitellinien nur Ein Dreieck möglich ist, käme es darauf an, die Seiten, Winkel und den Inhalt des Dreiecks ABC durch die Scheitel-Linien AP, BQ, CR auszudrücken, desgleichen die Abstände ihrer Durchschnitte mit den Seiten von den Ecken des Dreiecks, und die Winkel-Abstände der Scheitel-Linien von den Seiten des Dreiecks, für welche bekanntlich die Gleichungen

$$AR.BP.CQ = BR.CP.AQ, \text{ und}$$
$$\sin BAP.\sin CBQ.\sin ACR = \sin CAP.\sin ABQ.BCR$$

Statt finden.

Aus einem allgemeinen Ausdrucke des Inhalts $\triangle$ des Dreiecks durch die Scheitel-Linien $AP = p$, $BQ = q$, $CR = r$ würden sich z. B. unmittelbar die bekannten, dem Ausdrucke des Inhalts durch die Seiten analogen Ausdrücke desselben für die Fälle ergeben, wenn die Scheitel-Linien auf den Seiten senkrecht stehen oder sie halbiren, nemlich:

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right]}}$$

für den ersten Fall, und

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(p+q+r)(p+q-r)(p+r-q)(q+r-p)]}$$

für den zweiten, die sich einzeln bewiesen in den Elementen finden (z. B. in dem Lehrbuche der Geometrie des Herausgebers, Berlin 1826., 1ster Band S. 144.); desgleichen der Ausdruck für den dritten elementaren Fall, wenn die Scheitel-Linien die Winkel des Dreiecks halbiren, welcher Ausdruck noch nicht in den Elementen angetroffen wird.

Die Theorie der Scheitel-Linien im Dreieck dürfte überhaupt noch manche interessante Sätze geben. Man findet einiges Frühere dahin Gehörige in Kästner's „geometrischen Abhandlungen," in Puissant „Recueil de diverses propositions de géometrie" und in einer kleinen Schrift des Herausgebers, unter dem Titel „Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks, rücksichtlich dreier durch die Winkel-Spitzen gezogener gerader Linien, Berlin 1816."

13. Es käme auf die Sätze von den gröfsten Kreisen an, die, durch die Spitzen eines Kugel-Dreiecks gehend, in einem und demselben Puncte sich schneiden.

14. Es sei eine der vier dreieckigen Seiten-Ebenen einer dreiseitigen Pyramide gegeben, nebst einer der drei Kanten aus der vierten Ecke nach der gegebenen Seiten-Ebene: man soll die beiden andern nicht gegebenen Kanten unter der Bedingung finden, dafs das sphärische Dreieck, welches von den drei nicht gegebenen Seiten-Ebenen der Pyramide begrenzt wird, ein Maximum sei.

15. Aus fünf von den sechs Winkeln zwischen den Seiten-Ebenen einer dreiseitigen Pyramide den sechsten Winkel zu finden.

16. Aus den nemlichen fünf Winkeln und der Kante am sechsten den körperlichen Inhalt der Pyramide zu finden.

17. Wenn zwei Polyëder eine gleiche Zahl dreieckiger Seiten-Ebenen haben, und die Winkel, welche diese Seiten-Ebenen mit einander machen in beiden Polyëdern die nemlichen sind: sind dann diese Polyëder einander ähnlich? und wenn sie es sind: wie viel Winkel zwischen den Seiten-Ebenen werden durch die übrigen bestimmt?

19.

Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts.

(Von dem Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Bei Abfassung des im 2ten Heft des 5ten Bandes befindlichen Aufsatzes über die Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern, wo ich diese Eigenschaften aus denen der Kettenbrüche zu entwickeln suchte, führte mich der innige Zusammenhang der Lehre von den Kettenbrüchen mit den Eigenschaften der Linsensysteme zu verschiedenen Bemerkungen über die ersteren, welche mir neu, und, wenn auch nur den Elementen angehörend, einer spätern Mittheilung nicht ganz unwerth schienen. Der in der erwähnten Abhandlung erwiesene Satz, daſs die Wirkung jedes Systems von Gläsern, eben so wie die jedes einzelnen Glases, durch zwei gegebene Puncte (die Brennpuncte) und durch eine Linie von gegebener Länge (die Brennweite) vollkommen bestimmt ist, und die leicht auszumittelnde Art, nach der, wenn ein Gläsersystem in mehrere einzelne Systeme zertheilt wird, aus den Wirkungen und der gegenseitigen Lage der einzelnen die Wirkung des ganzen beurtheilt werden kann, veranlaſsten mich, auf analoge Weise einen Kettenbruch in mehrere einzelne zu zerlegen, um somit nach Berechnung dieser einzelnen und ihrer Wiedervereinigung zu einer kürzern Form des anfänglichen, so wie zu merkwürdigen Eigenschaften der Kettenbrüche überhaupt zu gelangen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in den nachfolgenden Blättern enthalten. Voran geht die Entwicklung der Haupt-Eigenschaften der Kettenbrüche, so wie der für diese Lehre besonders wichtigen, aus beliebigen Elementen gebildeten ganzen rationalen Zusammensetzungen (sie sind hier, so wie in dem oben gedachten Aufsatze durch Einschlieſsung der Elemente mit Klammern angedeutet), deren gegenseitige Relationen schon Euler in einer besondern Abhandlung (*Specimen algorithmi singularis* in *Nov. comment. Petrop. Tom. IX.*) untersucht hat. Doch glaube ich hier (§. 5. — 7.) diese Relationen etwas schärfer, als Euler, der sich oft nur der Induction bedient, erwiesen zu haben. Dies

gelang mir theils durch die vorhin erwähnte Zerlegung eines Kettenbruches in zwei oder mehrere Theile, theils dadurch, dafs ich ähnlicher Weise wie Euler für jene Zusammensetzungen einen Algorithmus für die Kettenbrüche selbst zu bilden suchte, womit aber nicht blofs dem Erweis jener von Euler entdeckten Relationen, sondern der Elementarlehre von den Kettenbrüchen überhaupt einiger Nutzen gebracht sein dürfte.

Zum Schlusse habe ich noch die oben gedachten Sätze von den bei jedem Gläsersystem im Allgemeinen angebbaren zwei Brennpuncten und Brennweiten und von den daraus zu berechnenden Wirkungen des Systems, so wie auch die Haupt-Eigenschaften der Fernröhre auf eine neue, der Einfachheit dieser Sätze entsprechende, ganz elementare Weise dargethan.

---

§. 1. Ein Kettenbruch entsteht, wenn man von einer Reihe auf einander folgender Brüche zu dem Nenner des ersten Bruchs den zweiten addirt, sodann in diesem Aggregate den Nenner des zweiten um den dritten Bruch vermehrt, u. s. w. Hieraus folgt sogleich, dafs ein Kettenbruch seinen Werth nicht ändert, wenn Zähler und Nenner irgend eines der einzelnen Brüche, so wie der Zähler des nächstfolgenden Bruchs mit einer und derselben Zahl multiplicirt werden. Sind daher

$$(a.) \quad \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta}{b}, \quad \frac{\gamma}{c}, \quad \frac{\delta}{d}, \quad \ldots.$$

die einzelnen Brüche, welche den Kettenbruch ausmachen, so werden auch

$$(b.) \quad \frac{p\alpha}{pa}, \quad \frac{pq\beta}{qb}, \quad \frac{qr\gamma}{rc}, \quad \frac{rs\delta}{sd}, \quad \ldots.$$

in Verbindung denselben Kettenbruch erzeugen, was für Werthe auch p, q, r, s, ... haben mögen. Man kann hiernach die anfänglichen Brüche ($a.$) immer so umbilden, dafs in den neuen Brüchen ($b.$) die Zähler (oder die Nenner) irgend gegebene Werthe A, B, C, D, ... haben, indem man die willkürlichen p, q, r, ... aus den Gleichungen $p\alpha = A$, $pq\beta = B$, $qr\gamma = C$, etc. (oder $pa = A$, $qb = B$, $rc = C$, etc.) bestimmt.

Ohne daher der Allgemeinheit Abbruch zu thun, kann man immer die Zähler sämmtlicher einzelnen Brüche der positiven Einheit gleich setzen, wie dies auch bei Elementar-Untersuchungen über Kettenbrüche zu geschehen pflegt. Im Gegenwärtigen sollen aber aus weiterhin sich ergebenden Gründen nur der Zähler des ersten Bruchs $= +1$, die der übri-

gen dagegen $=-1$ gesetzt werden, so daſs in der Reihe ($a.$): $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=\ldots.=-1$. Wird alsdann $p=1$, $q=-1$, $r=1$, $s=-1$, und so fort abwechselnd genommen, so wird die umgeformte Reihe ($b.$):

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{-b},\quad \frac{1}{c},\quad \frac{1}{-d},\quad \ldots.$$

woraus erhellet, daſs man in der hier anzuwendenden Form mit negativen Zählern die Nenner des 2ten, 4ten, 6ten etc. Bruchs negativ zu nehmen hat, um diese Form auf die gewöhnliche, wo jeder Zähler $=+1$ ist, zu reduciren.

Der Raum-Ersparniſs willen mögen nun die Kettenbrüche von der besagten Form, wie

$$\frac{1}{a},\quad \cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b}},\quad \cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c}}},\quad \cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d}}}},\quad \text{u. s. w.}$$

durch (a), (a, b), (a, b, c), (a, b, c, d), u. s. w. ausgedrückt werden. Hiernach ist:

1. $\quad (a, b)=\frac{1}{a-(b)},\quad (a, b, c)=\frac{1}{a-(b, c)},\quad (a, b, c, d)=\frac{1}{a-(b, c, d)}$, u. s. w.,

so wie

$$a-(b)=\frac{1}{(a, b)},\quad a-(b, c)=\frac{1}{(a, b, c)},\quad \text{u. s. w.}$$

Eben so ist, wenn man $(c, d, e, \ldots.)=p$ setzt:

2. $\quad (a, b, c, d, e, \ldots.)=(a, b-p)=(a, b-(c, d, e, \ldots.))$,

und auf gleiche Art:

$$=(a, b, c-(d, e, \ldots.))=(a, b, c, d-(e, \ldots.)),\quad \text{u. s. w.}$$

Ferner leuchtet ein, daſs, wenn z. B. in (a, b, c, d) das letzte Element d unendlich groſs genommen wird, der Kettenbruch in (a, b, c) übergeht. Setzt man aber $d=0$, so fällt nicht nur das letzte, sondern auch das vorletzte Element weg, d. h. es ist:

$$3.\quad \begin{cases}(a, b, c, 0)=(a, b), \text{ und eben so } (a, b, c, d, 0)=(a, b, c), \text{ u. s. w.,}\\ \text{so wie } (a, b, c, \infty)=(a, b, c), \text{ u. s. w.}\end{cases}$$

§. 2. Aufgabe. x ist durch y und die Constanten a, b, c, d, e, mittelst des Kettenbruchs

$$4.\quad x=(a, b, c, d, e, y)$$

gegeben. Man soll umgekehrt y, durch x ausgedrückt, finden.

Auflösung. Aus (4.) folgt nach (1.):

$x = \frac{1}{a - (b, \dots . y)}$, mithin $(b, \dots . y) = a - \frac{1}{x} = a - (x)$; oder $\frac{1}{(a, x)} = (b, \dots . y) = \frac{1}{b - (c, \dots . y)}$, folglich $(c, \dots . y) = b - (a, x)$, oder

$$\frac{1}{(b, a, x)} = (c, \dots . y) = \frac{1}{c - (d, e, y)},$$

und hieraus eben so:

$$\frac{1}{(c, b, a, x)} = (d, e, y), \quad \frac{1}{(d, \dots . a, x)} = (e, y), \quad \frac{1}{(e, \dots . a, x)} = (y), \text{ oder}$$

$$5. \quad y = (e, d, c, b, a, x).$$

§. 3. Aufgabe. Die im vorigen §. angenommene Relation zwischen x und y durch eine Gleichung darzustellen, in der weder x noch y, in Kettenbrüchen enthalten, vorkommen.

Auflösung. Da von den zwei identischen Gleichungen

$$4. \quad x = (a, b, c, d, e, y) \quad \text{und} \quad 5. \quad y = (e, d, c, b, a, x),$$

vermöge der ersten, jedem Werth von y nur ein Werth von x, und vermöge der zweiten, jedem x nur ein y zukommt, so mufs die gesuchte Gleichung zwischen x und y von der Form sein:

$$(a.) \quad A + Bx + Cy + Dxy = 0.$$

Nach (3.) wird nun, wenn man in (4.), $y = \infty$ setzt: $x = (a, b, c, d, e)$. Für denselben Werth von y reducirt sich aber (a.) auf: $C + Dx = 0$. Mithin ist:

$$(b.) \quad C : D = -(a, b, c, d, e).$$

Eben so wird für $y = 0$, wegen (4.): $x = (a, b, c, d)$, und wegen (a.): $A + Bx = 0$; folglich:

$$(c.) \quad A : B = -(a, b, c, d).$$

Auf gleiche Art ergiebt sich, wenn man in (5.) und (a.) das eine Mal $x = \infty$, das andere Mal $x = 0$ setzt:

$$(d.) \quad B : D = -(e, d, c, b, a), \qquad (e.) \quad A : C = -(e, d, c, b),$$

und wenn man (b.) mit (e.) und (c.) mit (d.) multiplicirt:

$$(f.) \quad A : D = (a, \dots . e)(e, \dots . b) = (e, \dots . a)(a, \dots . d).$$

Hiermit haben wir zugleich eine der bemerkenswerthesten Relationen zwischen Kettenbrüchen:

$$6. \quad (a, \dots . e)(e, \dots . b) = (e, \dots . a)(a, \dots . d)$$

erhalten, in welcher, wenn sie auf eine beliebige Anzahl von Elementen ausgedehnt wird, a und b das erste und zweite, e und d das letzte und vorletzte Element bezeichnen.

Substituiren wir jetzt die gefundenen Verhältnifswerthe von A, B, C, D in (a.), so kommt:

$$7.\quad \begin{cases}(a,\ldots.e)(e,\ldots.b)-(e,\ldots.a)x-(a,\ldots.e)y+xy=0, \text{ oder}\\ (e,\ldots.a)(a,\ldots.d)-(e,\ldots.a)x-(a,\ldots.e)y+xy=0,\end{cases}$$

zwei Gleichungen, denen man auch die Form:

$$7^*.\quad \begin{aligned}[x-(a,\ldots.e)][y-(e,\ldots.a)] &= (a,\ldots.e)[(e,\ldots.a)-(e,\ldots.b)]\\ &= (e,\ldots.a)[(a,\ldots.e)-(a,\ldots.d)]\end{aligned}$$

geben kann.

§. 4. **Zusätze und Folgerungen.** a) Setzt man in (7^*.) für x seinen Werth aus (4.), so kommt die identische Gleichung:

$$\frac{(a,\ldots.e,y)-(a,\ldots.e)}{(y,e,\ldots.a)} = (e,\ldots.a)[(a,\ldots.e)-(a,\ldots.d)],$$

wo noch $\frac{1}{(y,e,\ldots.a)}$ für $y-(e,\ldots.a)$ gesetzt worden (1.).

Man schreibe jetzt f statt y und bezeichne die Differenzen:

$$(a,\ldots.f)-(a,\ldots.e),\quad (a,\ldots.e)-(a,\ldots.d),\ \text{u. s. w.}$$

mit $\triangle(a,\ldots.e)$, $\triangle(a,\ldots.d)$, u. s. w., so hat man:

$$\triangle(a,\ldots.e) = (f,\ldots.a)(e,\ldots.a)\triangle(a,\ldots.d),$$

und eben so:

$$\begin{aligned}\triangle(a,\ldots.d) &= (e,\ldots.a)(d,\ldots.a)\triangle(a,b,c),\\ \triangle(a,b,c) &= (d,\ldots.a)(c,b,a)\triangle(a,b),\\ \triangle(a,b) &= (c,b,a)(b,a)\triangle(a),\end{aligned}$$

folglich, weil $(a,b)=\frac{b}{ab-1}$, $(b,a)=\frac{a}{ab-1}$, und daher $\triangle(a)=(a,b)-(a)$ $=(b,a)(a)^2$ wird:

$$8.\quad \begin{cases}\triangle(a,b) = (c,b,a)(b,a)^2(a)^2,\\ \triangle(a,b,c) = (d,c,b,a)(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2,\\ \triangle(a,\ldots.d) = (e,\ldots.a)(d,\ldots.a)^2(c,b,a)^2(b,a)^2(a)^2,\\ \quad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

b) Die Gleichung (7^*.) läfst sich daher auch so darstellen:

$$9.\quad [x-(a,\ldots.e)][y-(e,\ldots.a)] = (e,\ldots.a)^2(d,\ldots.a)^2\ldots.(a)^2,$$

woraus wir den Schlufs ziehen: Wenn von zwei veränderlichen Gröfsen x und y, die eine von der andern so abhängt, dafs $x=(a,\ldots.e,y)$, folglich auch $y=(e,\ldots.a,x)$, so ist, je nachdem $x>$ oder $<(a,\ldots.e)$ genommen wird, auch $y>$ oder $<(e,\ldots.a)$, indem das Product aus den Differenzen $x-(a,\ldots.e)$ und $y-(e,\ldots.a)$ einem, von x oder y übrigens unabhängigen Quadrate gleich ist.

c) Von den zwei nach (7*.) identischen Ausdrücken:

$(e, \ldots . a)[(a, \ldots . e) - (a, \ldots . d)]$ und $(a, \ldots . e)[(e, \ldots . a) - (e, \ldots . b)]$

entsteht der eine aus dem andern, indem man die Elemente a, b, c, d, e in umgekehrter Folge nimmt. Es wird daher auch das dem erstern dieser Ausdrücke gleich gefundene, aus Quadraten zusammengesetzte Product durch Vertauschung der Elemente $a, \ldots . e$ mit $e, \ldots . a$ seinen Werth nicht ändern; also, nach Ausziehung der Wurzeln:

$$(e, \ldots . a)(d, \ldots . a) \ldots . (b, a)(a) = \pm (a, \ldots . e)(b, \ldots . e) \ldots . (d, e)(e).$$

Um über das doppelte Vorzeichen zu entscheiden, so begreift man leicht, daſs, wenn bald das eine, bald das andere Statt finden sollte, ein solcher Wechsel nur bei Änderung der Elementenzahl eintreten könnte, nicht aber bei Änderung der Werthe der Elemente, während ihre Anzahl dieselbe bleibt. Nimmt man nun alle Elemente einander gleich an, so wird $(e, \ldots . a) = (a, \ldots . e)$, $(d, \ldots . a) = (b, \ldots . e)$, u. s. w., $(b, a) = (d, e)$, $(a) = (e)$, welches auch die Zahl der Elemente sein mag. Mithin kann immer nur das obere Zeichen in jener Gleichung Statt haben, also:

10. $(e, \ldots . a)(d, \ldots . a) \ldots . (b, a)(a) = (a, \ldots . e)(b, \ldots . e) \ldots . (d, e)(e).$

d) Dasselbe Resultat läſst sich auch unmittelbar aus der Gleichung (6.) und den ihr analogen herleiten, wie jeder ohne Schwierigkeit finden wird. Auch hätte man durch dieselbe Gleichung selbst zu den Gleichungen (7. und 7*.) geradezu gelangen können. Es ist nemlich nach (6.), wenn y als neues Element zu $a, \ldots . e$ hinzugefügt wird:

$$(a, \ldots . e, y)(y, e, \ldots . b) = (y, e, \ldots . a)(a, \ldots . e),$$

oder nach (1.):

$$\frac{(a, \ldots . e, y)}{y - (e, \ldots . b)} = \frac{(a, \ldots . e)}{y - (e, \ldots . a)}.$$

Setzt man hierin x für $(a, \ldots . e, y)$, so hat man die erste der Gleichungen (7.) und damit auch zugleich die übrigen gefunden.

§. 5. Man setze die aus den Elementen $a, \ldots . e$ gebildete Function:

11. $$\frac{1}{(a, \ldots . e)(b, \ldots . e)(c, d, e)(d, e)(e)} = [a, b, c, d, e],$$

so ist zufolge der Gleichung (10.):

12. $$[a, b, c, d, e] = [e, d, c, b\ a],$$

und eben so bei jeder kleinern oder gröſsern Zahl von Elementen.

Diese neuen durch Klammern angedeuteten Zusammensetzungen der Elemente $a, b, c, \ldots .$ spielen in der Lehre von den Kettenbrüchen

eine sehr wichtige Rolle und besitzen eine nicht geringe Anzahl merkwürdiger Eigenschaften.

Die aus dem Bisherigen unmittelbar fliefsenden Eigenschaften derselben sind folgende.

a) Der Werth einer solchen Function ändert sich nicht, wenn die Elemente in umgekehrter Folge genommen werden (12.).

b) Weil nach (11.): $\frac{1}{(b,\ldots.e)\ldots.(d,e)(e)}=[b,\ldots.e]$ ist, so kommt, wenn man diese Gleichung durch (11.) dividirt:

13. $(a,\ldots.e)=\frac{[b,\ldots.e]}{[a,\ldots.e]}$, so wie $(e,\ldots.a)=\frac{[d,\ldots.a]}{[e,\ldots.a]}=\frac{[a,\ldots.d]}{[a,\ldots.e]}$,

wonach daher jeder Kettenbruch von der in §. 1. angenommenen Form als der Quotient zweier dergleichen in einander dividirten Functionen dargestellt werden kann.

c) Eben so ist: $(d,\ldots.a)=\frac{[a,\ldots.c]}{[a,\ldots.d]}$. Mit diesen Werthen für $(e,\ldots.a)$ und $(d,\ldots.a)$ verwandelt sich die Gleichung (1.): $(e,\ldots.a)=\frac{1}{e-(d,\ldots.a)}$ in

14. $[a,\ldots.e]=[a,\ldots.d]e-[a,\ldots.c]$,

und auf gleiche Art hat man:

$[a,\ldots.d]=[a,b,c]d-[a,b]$, $[a,b,c]=[a,b]c-[a]$, wo $[a]=\frac{1}{(a)}=a$.

Endlich ist $[a,b]=\frac{1}{(a,b)(b)}=ab-1$, so dafs daher, weil analog mit den vorhergehenden Formeln $[a,b]=[a]b-[\ ]$ sein sollte, wir schliefsen können, dafs, wenn innerhalb der Klammern kein Element mehr vorkommt, ein solcher Ausdruck der Einheit selbst gleich ist.

Die neuen Functionen sind demnach insgesammt rationale und ganze Functionen ihrer Elemente, nemlich:

$[a]=a$, $[a,b]=ab-1$, $[a,b,c]=abc-a-c$, u. s. w.,

und mit Hülfe derselben kann nach (13.) jeder Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch mit rationalem und ganzem Zähler und Nenner verwandelt werden.

d) Werden in den Gleichungen (8.) die eingeklammerten Ausdrücke statt der Kettenbrüche eingeführt, so erhält man:

$$(e,\ldots.a)(d,\ldots.a)^2\ldots.(a)^2=\frac{(e,\ldots.a)}{[d,\ldots.a]^2}=\frac{1}{[a,\ldots.d][a,\ldots.e]}$$

$$=\triangle(a,\ldots.d)=(a,\ldots.e)-(a,\ldots.d)=\frac{[b,\ldots.e]}{[a,\ldots.e]}-\frac{[b,\ldots.d]}{[a,\ldots.d]},$$

und damit die merkwürdige Relation:

$$15. \quad [a, \ldots . d]\,[b, \ldots . e] - [a, \ldots . e]\,[b, \ldots . d] = 1\,^{*}).$$

Endlich kann der Gleichung (9.) zwischen x und y die sehr einfache Form gegeben werden:

$$16. \quad [x-(a, \ldots . e)]\,[y-(e, \ldots . a)] = \frac{1}{[a, \ldots . e]^2},$$

oder, wenn man die Kettenbrüche durch Functionen mit Klammern ausdrückt, und mit Anwendung von (15.):

$$16^{*}. \quad [a, \ldots . e]\,xy - [a, \ldots . d]\,x - [b, \ldots . e]\,y + [b, \ldots . d] = 0.$$

§. 6. Um etwas verborgener liegende Eigenschaften der Kettenbrüche und der mit ihnen verwandten Functionen zu entdecken, wollen wir in der Gleichung (4.), wo eine beliebige Anzahl constanter Elemente und ein veränderliches Element y, zu einem Kettenbruche verbunden, den Werth einer andern Veränderlichen x bestimmten, die Reihe der Elemente als aus zwei Gruppen bestehend uns denken und demzufolge

$$(a.) \quad x = (a, b, \ldots . d, e, f, a', b', \ldots . d', e', y)$$

schreiben. Hierbei sind nemlich a, b und a', b' die zwei ersten Elemente, d, e, f und d', e', y die drei letzten Elemente der ersten und zweiten Gruppe. Die Anzahl der Elemente in jeder der beiden Gruppen ist willkürlich.

Man setze nun

$$(b.) \quad w = (a', \ldots . e', y),$$

so wird nach (2.): $x = (a, \ldots . e, f-w)$; also wenn man

---

*) Bei Euler, welcher die einzelnen Brüche $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots .$ nicht durch Subtraction, wie hier geschehen, sondern durch Addition zu einem Kettenbruche vereinigt, haben deshalb auch die Ausdrücke $[a, b, c, \ldots .]$ eine etwas andere Bedeutung. Statt dafs nemlich hier die Producte, in welche sich diese Ausdrücke auflösen lassen, durch Addition und Subtraction wechselsweise mit einander verbunden sind, sind sie es dort blofs durch Addition; und eben so werden sich auch die zwischen solchen Ausdrücken selbst hier aufgestellten Relationen von den dortigen rücksichtlich der Vorzeichen unterscheiden. So ist zwar die Formel (12.) auch bei Euler ganz dieselbe. Dagegen müssen in den Formeln (14.), um sie in die Eulerschen zu übertragen, statt der Minuszeichen rechter Hand, Pluszeichen gesetzt werden. In (15.) aber ist statt der 1 zur Rechten, ± 1 zu setzen, $+1$ bei einer ungeraden, -1 bei einer geraden Anzahl der Elemente $a, \ldots . e$. Eben so mufs auch in den später folgenden Formeln (20. und 24.) das Glied zur Rechten nach Beschaffenheit der Elementenzahl bald positiv bald negativ genommen werden.

Diese doppelten Vorzeichen fallen nun bei der von mir angenommenen Bildung der Kettenbrüche durch Subtraction überall hinweg, daher ich dieser Bildung, der dadurch für das Folgende bewirkten gröfseren Einfachheit willen, den Vorzug geben zu müssen geglaubt habe.

$$(c.)\quad f = v + w \text{ setzt:}$$
$$(d.)\quad x = (a, \ldots. e, v).$$

Die Gleichung ($a.$) kann hiernach, als durch Elimination von v und w aus ($b.$, $c.$ und $d.$) entstanden, angesehen werden. Um diese Elimination jetzt auszuführen, setze man:

$$(a, \ldots. e) = \alpha,\quad (e, \ldots. a) = \beta,\quad 1:[a, \ldots. e] = \gamma,$$
$$(a', \ldots. e') = \alpha',\quad (e', \ldots. a') = \beta',\quad 1:[a', \ldots. e'] = \gamma',$$

so gehen die Gleichungen ($d.$ und $b.$) nach (16.) über in:

$$[x-\alpha][v-\beta] = \gamma^2,\quad [w-\alpha'][y-\beta'] = \gamma'^2,$$

und man erhält in Verbindung mit ($c.$):

$$(e.)\quad \frac{\gamma^2}{x-\alpha} + \frac{\gamma'^2}{y-\beta'} = \delta,\quad \text{wo } \delta = f - \beta - \alpha',$$

als das gesuchte Resultat der Elimination.

Zu einer Gleichung zwischen x und y, wo keine dieser beiden Veränderlichen in einen Kettenbruch mehr verwickelt ist, führt aber ($a.$) unmittelbar, wenn man

$$(a, \ldots. e') = \alpha'',\quad (e', \ldots. a) = \beta'',\quad 1:[a, \ldots. e'] = \gamma''$$

setzt, indem dann

$$(f.)\quad [x-\alpha''][y-\beta''] = \gamma''^2.$$

($e.$ und $f.$) müssen daher zwei identische Gleichungen sein. Es folgt aber aus ($f.$): $y = \infty$ für $x = \alpha''$, und $x = \infty$ für $y = \beta''$. Substituirt man diese zwei Paare zusammengehöriger Werthe von x und y in ($e.$), so kommt:

$$(g.)\quad \gamma^2 = [\alpha''-\alpha]\delta,\quad \gamma'^2 = [\beta''-\beta']\delta.$$

Da ferner α und β' zwei zusammengehörige Werthe von x und y in der Gleichung ($e.$) sind, so hat man wegen ($f.$):

$$(h.)\quad [\alpha-\alpha''][\beta'-\beta''] = \gamma''^2.$$

Mittelst der drei Gleichungen ($g.$ und $h.$) werden die drei Constanten α'', β'', γ'' in ($f.$) durch die Constanten in ($e.$) bestimmt, und es können daher aus der Vergleichung von ($e.$) mit ($f.$) nicht noch andere, aus ($g.$) und ($h.$) nicht schon fließende Gleichungen hervorgehen.

Durch Verbindung der drei Gleichungen ($g.$ und $h.$) erhält man leicht folgende:

$$(i.)\quad [\alpha''-\alpha]^2 = \frac{\gamma^2\gamma''^2}{\gamma'^2},\quad [\beta''-\beta']^2 = \frac{\gamma'^2\gamma''^2}{\gamma^2},\quad \delta^2 = \frac{\gamma^2\gamma'^2}{\gamma''^2}.$$

Zieht man aus diesen die Quadratwurzeln, und behält, was bald nachher gerechtfertigt werden wird, bloß die positiven Vorzeichen bei,

und setzt endlich für α, α'', β', β'', γ, ... δ aus dem Vorigen ihre Werthe, so ergeben sich die Relationen:

$$17.\qquad (a,\dots e') - (a,\dots e) = \frac{[a',\dots e']}{[a,\dots e][a,\dots e']},$$

$$18.\qquad (e',\dots a) - (e',\dots a') = \frac{[e,\dots a]}{[e',\dots a'][e',\dots a]},$$

$$19.\qquad f - (e,\dots a) - (a',\dots e') = \frac{[a,\dots e']}{[e,\dots a][a',\dots e']},$$

von denen sich die beiden ersten nur durch die entgegengesetzte Folge ihrer Elemente, also nicht wesentlich von einander unterscheiden.

Drückt man die in (17. und 19.) noch vorkommenden Kettenbrüche nach (13.) durch Functionen mit Klammern aus, so kommt nach leichter Reduction:

$$20.\qquad [a,\dots e][b,\dots e'] - [a,\dots e'][b,\dots e] = [a',\dots e'],$$

$$21.\qquad [a,\dots e]f[a',\dots e'] - [a,\dots e,f,a',\dots e'] = [a,\dots d][a',\dots e'] + [a,\dots e][b',\dots e'],$$

oder noch einfacher, weil $[a,\dots e]f - [a,\dots d] = [a,\dots f]$ ist:

$$22.\qquad [a,\dots f][a',\dots e'] - [a,\dots e'] = [a,\dots e][b',\dots e'].$$

Um uns noch von der Richtigkeit der bei Ausziehung der Wurzeln angenommenen Vorzeichen zu überzeugen, so ist es, wie schon in §. 4. erinnert worden, hinreichend, diese Richtigkeit für bestimmte Werthe der Elemente, aber für eine unbestimmte Anzahl derselben darzuthun. Man setze daher sämmtliche Elemente einander gleich, jedes $= 2$, so erhält man nach (14.):

$$[2] = 2,\quad [2,2] = 3,\quad [2,2,2] = 4,\quad [2,2,2,2] = 5,\quad \text{u. s. w.},$$

und nach (13.), $(2,2,2,\dots) = \frac{m}{m+1}$, wenn m die Anzahl der Elemente bezeichnet; also $(2,2,2,\dots) =$ einem positiven echten Bruche, der sich desto mehr der Einheit nähert, je gröfser die Elementenzahl ist. Hiermit übersieht man nun sogleich, dafs (wenn jedes Element $= 2$ ist, welches übrigens auch ihre Anzahl sein mag) das in jeder der Gleichungen (17. — 19.) zu beiden Seiten des ($=$) Zeichens Befindliche eine positive Gröfse ist, dafs folglich diese Gleichungen, mithin auch die daraus abgeleiteten (20. und 21.), hinsichtlich der Vorzeichen ihrer Glieder, richtig sind.

§. 7. Die Gleichung (20.) kann als eine Verallgemeinerung von (15.) angesehen werden, indem die erstere Gleichung in letztere übergeht, wenn man auf e unmittelbar e' folgen läfst. Man kann aber die

Gleichung (20.) selbst noch sehr verallgemeinern, wenn man die Reihe der Elemente in noch mehr als zwei Gruppen zerlegt.

Bestehe sie zuerst aus drei Gruppen und sei sie daher nach einer, der vorigen analogen Bezeichnungsart:

$$a, \ldots. e, \; f, a', \ldots. e', \; f', a'', \ldots. e'',$$

so ist wie in (17.):

$$(a, \ldots. e') - (a, \ldots. e) = \frac{[a', \ldots. e']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e']},$$

$$(a, \ldots. e'') - (a, \ldots. e') = \frac{[a'', \ldots. e'']}{[a, \ldots. e'][a, \ldots. e'']},$$

$$(a, \ldots. e'') - (a, \ldots. e) = \frac{[a', \ldots. e'']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e'']},$$

folglich

23. $$\frac{[a', \ldots. e']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e']} + \frac{[a'', \ldots. e'']}{[a, \ldots. e'][a, \ldots. e'']} = \frac{[a', \ldots. e'']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e'']},$$ oder

24. $$[a, \ldots. e'][a', \ldots. e''] - [a, \ldots. e''][a', \ldots. e'] = [a, \ldots. e][a'', \ldots. e''],$$

eine Relation, deren Bildungsgesetz, wenn man sie mit der oben stehenden Reihenfolge der Elemente zusammenhält, sehr leicht erkannt wird, und daher keiner weitern Erörterung bedarf.

Von dieser allgemeinen Relation kommt man auf (20.) wieder zurück durch Weglassung der Elemente $a, \ldots. e$, so dafs noch $f, a', \ldots e', f', a'', \ldots. e''$ übrig bleiben. Hiermit wird $[a, \ldots. e] = 1$ (vergl. §. 5.), und (24.) geht über in:

$$[f, \ldots. e'][a', \ldots. e''] - [f, \ldots. e''][a', \ldots. e'] = [a'', \ldots. e''].$$

Eben so gelangt man wieder zu (20.), wenn man die letzten Elemente $a'', \ldots. e''$ streicht und die noch übrigen in umgekehrter Folge nimmt.

Vernichtet man aber die mittlern Elemente $a', \ldots. e'$ und läfst daher

$$a, \ldots. e, \; f, \; f', a'', \ldots. e''$$

die Reihenfolge der Elemente sein, so ist $[a', \ldots. e'] = 1$ zu setzen, und (24.) verwandelt sich in:

$$[a, \ldots. f][f', \ldots. e''] - [a, \ldots. e''] = [a, \ldots. e][a'', \ldots. e''],$$

welches auf (22.) hinauskommt.

Die Gleichung (22.) kann insbesondere dienen, um Producte aus Functionen mit Klammern in Summen derselben aufzulösen, eben so, wie ein Product aus Sinussen und Cosinussen in eine aus diesen Linien bestehende Summe verwandelt werden kann. So ist z. B.

$$[a,b,c][a',b',c'] = [a,b,c,a',b',c'] + [a,b][b',c'],$$
$$[a,b][b',c'] = [a,b,b',c'] + [a][c'],$$
$$[a][c'] = [a,c'] + 1, \text{ folglich}$$
$$[a,b,c][a',b',c'] = [a,b,c,a',b',c'] + [a,b,b',c'] + [a,c'] + 1.$$

Werde jetzt das System der Elemente in vier Gruppen zerlegt und sey es daher

$$a, \ldots. e,\ f,\ a', \ldots. e',\ f',\ a'', \ldots. e'',\ f'',\ a''', \ldots. e''',$$

so erhalten wir auf ganz ähnliche Art, wie wir vorhin zu (23.) gelangten, die Relation:

$$25.\quad \frac{[a', \ldots. e']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e']} + \frac{[a'', \ldots. e'']}{[a, \ldots. e'][a, \ldots. e'']} + \frac{[a''', \ldots. e''']}{[a, \ldots. e''][a, \ldots. e''']}$$
$$= \frac{[a', \ldots. e''']}{[a, \ldots. e][a, \ldots. e''']},$$

woraus sich die bei noch mehreren Gruppen Statt findenden Gleichungen von selbst abnehmen lassen.

§. 8. Nachdem in dem Bisherigen die merkwürdigsten Relationen zwischen Kettenbrüchen und den mit ihnen verwandten Functionen entwickelt worden sind, will ich noch zeigen, wie die Zerlegung der Elemente eines Kettenbruchs in mehrere Gruppen nicht selten zur Vereinfachung seiner Form und seiner Berechnung mit Nutzen angewendet werden kann. Sei zu dem Ende, wie in (4.), x durch y und mehrere constante Elemente mittelst eines Kettenbruchs gegeben. Man bilde aus den Elementen mehrere, z. B. vier, Gruppen, und nehme daher an:

$$26.\quad x = (a, \ldots. e, f, a', \ldots. e', f', a'', \ldots. e'', f'', a''', \ldots. e''', y).$$

Man setze nun:

$$(a', \ldots. e', f', a'', \ldots. y) = x', \quad (a'', \ldots. e'', f'', a''', \ldots. y) = x'',$$
$$(a''', \ldots. e''', y) = x''',$$

so ist nach (2.):

$$x = (a, \ldots. e, f - x'),\ x' = (a', \ldots. e', f' - x''),\ x'' = (a'', \ldots. e'', f'' - x'''),$$

und nach (16.), wenn man noch $(a, \ldots. e) = \alpha$, $(e, \ldots. a) = \beta$, $1 : [a, \ldots. e] = \gamma$, $(a', \ldots. e') = \alpha'$, u. s. w. setzt:

$$(a.)\quad [x-\alpha][f-x'-\beta] = \gamma^2,\quad [x'-\alpha'][f'-x''-\beta'] = \gamma'^2,\ \text{u. s. w.}$$
$$[x'''-\alpha'''][y-\beta'''] = \gamma'''^2,$$

folglich $x = \alpha + \dfrac{\gamma^2}{f-\beta-x'}$, $x' = \alpha' + \dfrac{\gamma'^2}{f'-\beta'-x''}$, u. s. w., und wenn man daraus x', x'', x''' successive eliminirt:

$$x = \alpha + \cfrac{\gamma^2}{f - \beta - \alpha' - \cfrac{\gamma'^2}{f' - \beta' - \alpha'' - \cfrac{\gamma''^2}{f'' - \beta'' - \alpha''' - \cfrac{\gamma'''^2}{y - \beta'''}}}}.$$

Hiermit erscheint der Werth von x wieder in der Gestalt eines Kettenbruchs, der jedoch nur aus so vielen Gliedern besteht, als in wie viel Gruppen man die Elemente des anfänglichen vertheilt hatte.

Es läfst sich aber dieser neue Kettenbruch auf eine für die Berechnung noch bequemere Form bringen. Man setze $x - \alpha = z$, $x' - \alpha' = z'$, u. s. w., so werden die Gleichungen (a.):

$$(b.)\quad z[f - \beta - \alpha' - z'] = \gamma^2,\quad z'[f' - \beta' - \alpha'' - z''] = \gamma'^2, \text{ u. s. w.}$$
$$z'''[y - \beta'''] = \gamma'''^2.$$

Es ist aber nach (19.):

$$f - \beta - \alpha' = f - (e, \dots a) - (a', \dots e') = \frac{[a, \dots e']}{[a, \dots e][a', \dots e']},$$

und eben so: $f' - \beta' - \alpha'' = \dfrac{[a', \dots e'']}{[a', \dots e'][a'', \dots e'']}$, u. s. w. Ferner war $\gamma^2 = 1 : [a, \dots e]^2$, u. s. w., $\beta''' = (e''', \dots a''') = \dfrac{[a''', \dots d''']}{[a''', \dots e''']}$. Substituirt man alles dieses in (b.), und setzt hierauf noch der Kürze willen:

$$[a, \dots e]z = v,\quad [a', \dots e']z' = v', \text{ u. s. w.},$$

so verwandeln sich die Gleichungen (b.) in:

$$v\ \{[a, \dots e'] - [a, \dots e]v'\} = [a', \dots e'],$$
$$v'\ \{[a', \dots e''] - [a', \dots e']v''\} = [a'', \dots e''],$$
$$v''\ \{[a'', \dots e'''] - [a'', \dots e'']v'''\} = [a''', \dots e'''],$$
$$v'''\{[a''', \dots e''']y - [a''', \dots d''']\} = 1.$$

Endlich ist $x = \alpha + z = \dfrac{1}{[a, \dots e]}\{[b, \dots e] + v\}$, und wenn man darin den aus den vorhergehenden Gleichungen, nach Elimination von v', v'', v''', fliefsenden Werth von v substituirt:

27. $x =$

$$\frac{1}{[a, \dots e]}\left\{[b, \dots e] + \cfrac{[a', \dots e']}{[a, \dots e'] - \cfrac{[a, \dots e][a'', \dots e'']}{[a', \dots e''] - \cfrac{[a', \dots e'][a''', \dots e''']}{[a'', \dots e'''] - \cfrac{[a'', \dots e'']}{[a''', \dots e''']y - [a''', \dots d''']}}}}\right.$$

§. 9. Von dieser Formel, deren Fortgang bei einer noch gröfsern Anzahl von Gruppen von selbst erhellet, wird sich der Nutzen am besten durch Anwendung derselben auf einige besondere Fälle erörtern lassen.

Nimmt man, was bisher unbestimmt blieb, die Anzahl der Elemente in jeder Gruppe, gleich grofs an, $= m$, so ist in (27.) die Aufgabe gelöst: einen Kettenbruch von der in §. 1. angenommenen Form in einen andern zu verwandeln, der m mal weniger Glieder hat.

Soll daher z. B. der Kettenbruch

$$(a, f, a', f', a'', f'', a''', \ldots.)$$

in einen andern mit halb so viel Gliedern umgeformt werden, so hat man in Vergleich mit (26.) die Elemente $b, \ldots. e$, $b', \ldots. e'$, $b'', \ldots. e''$, u. s. w. als weggelassen zu betrachten, und es wird $[b, \ldots. e] = 1$, $[a, \ldots. e] = a$, $[a', \ldots. e'] = a'$, u. s. w., $[a, \ldots. e'] = [a, f, a'] = afa' - a - a'$ (§. 5. c.), $[a', \ldots. e''] = a'f'a'' - a' - a''$, u. s. w.; folglich nach (27.):

$$28.\quad \cfrac{1}{a-\cfrac{1}{f-\cfrac{1}{a'-\cfrac{1}{f'-\text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1+\cfrac{a'}{afa'-a-a'-\cfrac{aa''}{a'f'a''-a'-a''-\cfrac{aa'''}{a''f''a'''-a''-a'''-\text{etc.}}}}\right.$$

also auch, wenn man $f, f', f'', \ldots.$ mit den entgegengesetzten Zeichen nimmt:

$$29.\quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{f'+\text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1-\cfrac{a'}{afa'+a+a'-\cfrac{aa''}{a'f'a''+a'+a''-\text{etc.}}}\right.$$

So ist z. B., wenn wir $a = f = a' = f' = \ldots. = 2$ setzen, nach (29.):

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}} = 1+\frac{1}{2}\left\{1-\cfrac{2}{12-\cfrac{4}{12-\cfrac{4}{12-\text{etc.}}}}\right. = 1+\frac{1}{2}\left\{1-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\text{etc.}}}}\right.$$

wobei daher die Berechnung von $\sqrt{2}$ durch den letztern Kettenbruch nur halb so viel Glieder zu berücksichtigen erfordert, als wenn $\sqrt{2}$ durch den erstern berechnet werden soll. Da ferner nach (28.):

$$\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6-\text{etc.}}}} = \frac{1}{6}\left\{1+\cfrac{1}{34-\cfrac{1}{34-\cfrac{1}{34-\text{etc.}}}}\right., \text{ so ist } \sqrt{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\left\{1+\cfrac{1}{34-\cfrac{1}{34-\text{etc.}}}\right.$$

und damit von Neuem eine doppelt so schnelle Convergenz, also eine viermal schnellere als bei dem anfänglichen Kettenbruche bewirkt.

Um einen Kettenbruch auf einen andern mit einer dreimal geringern Zahl von Gliedern zu reduciren, so kommt, wenn man in (26. und

27.) die Elemente $c, \ldots e$, $c', \ldots e'$, u. s. w. wegläfst und der Kürze willen $[a,b] = ab - 1 = \alpha$, $[a',b'] = \alpha'$, $[a'',b''] = \alpha''$, u. s. w., $[a,b,f,a',b'] = abfa'b' - aa'b' - abb' - abf - fa'b' + a + f + b' = A$, $[a',b',f',a'',b''] = A'$, $[a'', \ldots b'''] = A''$, u. s. w. setzt:

$$30. \quad \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{f - \cfrac{1}{a' - \text{etc.}}}}} = \frac{1}{\alpha}\left\{b + \cfrac{\alpha'}{A - \cfrac{\alpha\alpha''}{A' - \cfrac{\alpha'\alpha'''}{A'' - \text{etc.}}}}\right.$$

Will man in dem Kettenbruche zur Linken die einzelnen Brüche durch Addition verbunden haben, so nehme man die Elemente von gerader Stellenzahl, d. i. b, a', f', b'', a''', f''', ... mit entgegengesetzten Zeichen. Sei demnach $[a, -b] = -ab - 1 = -\beta$, $[-a', b'] = [a', -b'] = -\beta'$, $[a'', -b''] = -\beta''$, u. s. w. Da ferner, wie leicht ersichtlich, die Entwickelungen von $[a, -b, f, -a', b']$ und $[-a, b, -f, a', -b']$ gefunden werden, wenn man in obiger Entwickelung von $[a, b, f, a', b']$ alle Glieder das eine Mal mit positiven, das andere Mal mit negativen Zeichen nimmt, so setze man:

$$[a, -b, f, \ldots] = B, \quad [-a', b', \ldots] = -[a', -b', \ldots] = -B',$$
$$[a'', -b'', \ldots] = B'', \quad \text{u. s. w.,}$$

und es wird die vorige Gleichung:

$$31. \quad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{f + \cfrac{1}{a' + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{-\beta}\left\{-b - \cfrac{\beta'}{B - \cfrac{\beta\beta''}{-B' - \cfrac{\beta'\beta'''}{B'' - \cfrac{\beta''\beta^{\text{IV}}}{-B''' - \text{etc.}}}}}\right. = \frac{1}{\beta}\left\{b + \cfrac{\beta'}{B + \cfrac{\beta\beta''}{B' + \cfrac{\beta'\beta'''}{B'' + \text{etc.}}}}\right.$$

Mit Anwendung auf das obige numerische Beispiel, wo jedes der Elemente $= 2$ war, ergiebt sich $\beta = \beta' = \ldots = 5$, $B = B' = \ldots = 70$, und daher:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}} = 1 + \frac{1}{5}\left\{2 + \cfrac{5}{70 + \cfrac{25}{70 + \cfrac{25}{70 + \text{etc.}}}}\right. = 1 + \frac{1}{5}\left\{2 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{14 + \text{etc.,}}}}\right.$$

wodurch wir einen Kettenbruch erhalten haben, von welchem die ersten m Glieder den Werth von $\sqrt{2}$ mit derselben Genauigkeit darstellen, als ihn die ersten $3m$ Glieder des anfänglichen geben.

§. 10. Nicht selten tritt der Fall ein, dafs in einem Kettenbruche, wie (26.), zwischen gewissen willkürlich zu nehmenden Elementen die an-

dern stets auf dieselbe Weise wiederkehren. Seien $f, f', f'', \ldots$ die erstern Elemente, zwischen denen die übrigen sich periodisch wiederholen, so dafs $a = a' = a'' = \ldots$, $b = b' = b'' = \ldots$, u. s. w., $e = e' = e'' = \ldots$, und daher $[a, \ldots e] = [a', \ldots e'] = [a'', \ldots e''] = \ldots$ In diesem Falle läfst sich der reducirte Kettenbruch (27.), bei welchem mit jeder neuen Periode ein neues Glied anhebt, noch etwas einfacher darstellen. Es wird nemlich nach (21.):

$$[a, \ldots e'] = [a, \ldots e]^2 f - \{[a, \ldots d] + [b, \ldots e]\}[a, \ldots e] = A[Af - D - B],$$

wenn wir $[a, \ldots e] = A$, $[b, \ldots e] = B$, $[a, \ldots d] = D$ setzen; und eben so $[a', \ldots e] = A[Af' - D - B]$, u. s. w., folglich nach leichter Reduction:

$$32. \quad (a, \ldots e, f, a, \ldots e, f', a, \ldots e, f'', a, \ldots)$$
$$= \frac{1}{A}\left\{B + \cfrac{1}{Af - D - B - \cfrac{1}{Af' - D - B - \cfrac{1}{Af'' - \text{etc.}}}}\right.$$

So fliefst z. B. schon aus (28. und 29.):

$$33. \quad \cfrac{1}{a \mp \cfrac{1}{f \mp \cfrac{1}{a \mp \cfrac{1}{f' \mp \text{etc.}}}}} = \frac{1}{a}\left\{1 \pm \cfrac{1}{af \mp 2 - \cfrac{1}{af' \mp 2 - \cfrac{1}{af'' \mp 2 - \text{etc.}}}}\right.$$

Ferner ist für die Entwickelung von $(a, b, f, a, b, f', a, b, f'', \ldots)$, $A = [a, b] = ab - 1$, $B = b$, $D = a$, und mithin

$$34. \quad \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{f - \cfrac{1}{a - \text{etc.}}}}} = \frac{1}{ab-1}\left\{b + \cfrac{1}{(ab-1)f - a - b - \cfrac{1}{(ab-1)f' - a - b - \cfrac{1}{(ab-1)f'' - \text{etc.}}}}\right.$$

Sollen in dem Kettenbruche zur Linken blofs positive Zeichen vorkommen, soll also der Kettenbruch $(a, -b, f, -a, b, -f', a, -b, f'', \ldots)$ reducirt werden, so scheint es wegen des Wechsels der Zeichen von a und b nöthig, zu der allgemeinern Formel (31.) zurückzukehren, um damit zu erfahren, welche a und welche b in (34.) zur Linken mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind. Indessen kann man das gesuchte Resultat auch aus (34.) unmittelbar auf folgende Weise erhalten. Es ist, wie man leicht findet:

$$(a, b, c, d, e, \ldots) = i\left(ai, \frac{b}{i}, ci, \frac{d}{i}, ei, \ldots\right)$$

für jeden beliebigen Werth von i. Setzt man nun erstlich $i = \sqrt{-1}$, so

wird $\frac{1}{i} = -i$, und

$$(a, b, c, d, e, \ldots.) = i(ai, -bi, ci, -di, ei, \ldots.),$$

und wenn man b, d, f, ... mit entgegengesetzten Zeichen nimmt:

$$(a, -b, c, -d, e, \ldots.) = i(ai, bi, ci, di, ei, \ldots.).$$

Setzt man ferner $i = -1$, so kommt:

$$(a, b, c, d, \ldots.) = -(-a, -b, -c, -d, \ldots.),$$

und bei negativen Werthen von b, d, f, ...:

$$(a, -b, c, -d, \ldots.) = -(-a, b, -c, d, \ldots.).$$

Man multiplicire daher die Gleichung (34.) beiderseits mit $i, = \sqrt{-1}$, schreibe darin ai, bi, fi, $f'i$, ... statt a, b, f, f', ..., und es ergiebt sich mit Hülfe der eben aufgestellten Relationen:

$$35. \quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}} = \frac{1}{ab+1}\left\{b+\cfrac{1}{(ab+1)f+a+b+\cfrac{1}{(ab+1)f'+a+b+\text{etc.}}}\right.$$

§. 11. Wenn in (32.) die immer wiederkehrenden Elemente $a, \ldots. e$, in umgekehrter Folge genommen werden, so bleibt $A = [a, \ldots. e] = [e, \ldots. a]$ ungeändert; $B = [b, \ldots. e]$ geht über in $[d, \ldots. a] = [a, \ldots. d] = D$, und eben so D in B. So wie daher

$$(a, \ldots. e, f, a, \ldots. e, f', \ldots.) = \frac{1}{A}\{B + (Af - D - B,\ Af' - D - B,\ \ldots.)\},$$

so hat man auf gleiche Art:

$$(e, \ldots. a, f, e, \ldots. a, f', \ldots.) = \frac{1}{A}\{D + (Af - B - D,\ Af' - B - D,\ \ldots.)\};$$

folglich ist die Differenz:

$$36. \quad (a, \ldots. e, f, a, \ldots. e, f', \ldots.) - (e, \ldots. a, f, e, \ldots. a, f', \ldots.)$$
$$= \frac{B}{A} - \frac{D}{A} = (a, \ldots. e) - (e, \ldots. a),$$

also diese Differenz merkwürdiger Weise ganz unabhängig von den Werthen der Elemente f, f', f'', ... Nur mufs die Anzahl derselben, was wohl zu bemerken, unendlich sein; d. i. die zwei Kettenbrüche zur Linken dürfen nie abbrechen.

Sind auch die Elemente f, f', f'', ... in inf. einander gleich, ist also der Kettenbruch ein vollkommen periodischer, so läfst er sich, wie bekannt, als die Wurzel einer quadratischen Gleichung betrachten, deren Coëfficienten rationale Functionen seiner Elemente $a, \ldots. e, f$ sind. Setzt man nemlich:

$$37. \quad (a, \ldots. e, f, a, \ldots. e, f, a, \ldots.) = x,$$

so ist nach (2.) auch: $x = (a, \ldots. e, f - x)$, und daher nach (16.), wenn man $f - x$ für das dortige y schreibt:

$$38. \quad [x - (a, \ldots. e)][f - x - (e, \ldots. a)] = \frac{1}{[a, \ldots. e]^2},$$

oder weil $f - (e, \ldots. a) = \frac{1}{(f, \ldots. a)} = \frac{[a, \ldots. f]}{[a, \ldots. e]}$, und $(a, \ldots. e) = \frac{[b, \ldots. e]}{[a, \ldots. e]}$:

$$39. \quad \{[a, \ldots. e]x - [b, \ldots. e]\}\{[a, \ldots. f] - [a, \ldots. e]x\} = 1,$$

oder auch mit Hülfe der Relation (15.):

$$40. \quad [a, \ldots. e]x^2 - \{[a, \ldots f] + [b, \ldots. e]\}x + [b, \ldots. f] = 0,$$

eine quadratische Gleichung, woraus nach (39.) rückwärts und übereinstimmend mit (32.):

$$[a, \ldots. e]x = [b, \ldots. e] + \frac{1}{[a, \ldots. f] - [a, \ldots. e]x}$$
$$= [b, \ldots. e] + \cfrac{1}{[a, \ldots. f] - [b, \ldots. e] - \cfrac{1}{[a, \ldots. f] - \text{etc.}}}$$

fließt.

Die Summe der zwei Wurzeln ist zufolge (38.):

$$= (a, \ldots. e) + f - (e, \ldots. a).$$

Da nun die eine Wurzel $= (a, \ldots. e, f, a, \ldots.)$, so ist die andere

$$= f + (a, \ldots. e) - (e, \ldots. a) - (a, \ldots. e, f, a, \ldots.),$$

also nach (36.):

$$= f - (e, \ldots. a, f, e, \ldots. a, f, \ldots.) = \frac{1}{(f, e, \ldots. a, f, e, \ldots. a, f, \ldots.)}.$$

Wir folgern hieraus: Die quadratische Gleichung, zu welcher ein periodischer Kettenbruch von der Form (37.) führt, von welcher also derselbe die eine Wurzel ist, hat zur andern Wurzeln den reciproken Werth des periodischen Kettenbruchs, welcher durch Umkehrung der Elemente des erstern entsteht.

Dasselbe Theorem läſst sich auch unmittelbar aus der Betrachtung von (40.) ableiten. Denn da von dieser Gleichung der Werth von x in (37.) die eine Wurzel ist, so muſs auch, wenn $a, \ldots. e, f$ mit $f, e, \ldots. a$ vertauscht werden, $(f, e, \ldots. b, a, f, e, \ldots. b, a, f, \ldots.)$ die eine Wurzel der Gleichung

$$[b, \ldots. f]y^2 - \{[a, \ldots. f] + [b, \ldots. e]\}y + [a, \ldots. e] = 0$$

sein. Da aber, wie man sogleich sieht, die Wurzeln dieser Gleichung den reciproken Werthen der Wurzeln von (40.) gleich sind, so muſs auch das Reciproke von $(f, \ldots. a, f, \ldots. a, \ldots.)$ eine Wurzel von (40.) sein.

Das Product aus den beiden Wurzeln der Gleichung (40.) ist $\frac{[b,\ldots.f]}{[a,\ldots.e]} = \frac{[b,\ldots.f]}{[a,\ldots.f]} \cdot \frac{[a,\ldots.f]}{[a,\ldots.e]} = \frac{(a,\ldots.f)}{(f,\ldots.a)}$, und man hat daher die nicht minder merkwürdige Relation:

$$41. \quad \frac{(a,\ldots.f,\ a,\ldots.f,\ a,\ldots.f,\ a,\ldots.)}{(f,\ldots.a,\ f,\ldots.a,\ f,\ldots.a,\ f,\ldots.)} = \frac{(a,\ldots.f)}{(f,\ldots.a)}.$$

Ist der Kettenbruch von der Form $(a, -b, c, -d, \ldots.)$, sind also die einzelnen Brüche durch Addition mit den Nennern der jedesmal vorhergehenden verbunden, so unterscheide man, ob die Anzahl der die Perioden bildenden Elemente gerade oder ungerade ist. Im erstern Falle kehren in gedachter Form die gleichnamigen Elemente immer mit denselben Zeichen zurück, und das letzte Element f jeder Periode hat das negative Zeichen. Zu $(a, -b, \ldots.e, -f, a, -b, \ldots.)$ gehört daher als zweite Wurzel:

$$\frac{1}{(-f, e, \ldots. -b, a, -f, e, \ldots.)} = \frac{-1}{(f, -e, \ldots.\ b, -a, f, -e, \ldots.)}.$$

Dasselbe findet aber auch statt, wenn zweitens die Anzahl der periodischen Glieder ungerade ist. Man mufs nämlich alsdann immer zwei Perioden für eine rechnen, damit die Elemente nicht nur ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihrem Vorzeichen nach periodisch wiederkehren.

Von der quadratischen Gleichung, zu welcher ein periodischer Kettenbruch mit blofs positiven Zeichen führt, wird daher die andere Wurzel gefunden, indem man die Elemente in umgekehrter Folge nimmt und hierauf den Kettenbruch in die negative Einheit dividirt. So sind z. B.

$$x' = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}}}} \quad \text{und} \quad x'' = -\left\{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}}}\right.$$

die zwei Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(ab+1)x^2 + (abc+a-b+c)x - bc - 1 = 0.$$

Werden für a, b, c, wie gewöhnlich, positive ganze Zahlen genommen, so ist die Wurzel x' ein positiver echter Bruch, und x'' negativ und absolut gröfser als die Einheit.

Die reciproken Werthe von x' und x'' sind:

$$y' = a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}} \quad \text{und} \quad y'' = \cfrac{-1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$$

und diese die Wurzeln der Gleichung:

$$(bc+1)y^2-(abc+a-b+c)y-ab-1=0.$$

Nimmt man auch hier für a, b, c positive ganze Zahlen, so ist y' gröfser als 1, und y'' zwischen 0 und -1 enthalten.

§. 12. Die hiermit erörterte Art und Weise, nach welcher zwei periodische Kettenbrüche als Wurzeln einer quadratischen Gleichung zusammengehören, ist von einem Herrn Galois entdeckt und in Gergonne's Annalen, Tom. XIX., bekannt gemacht worden. Doch ist mir davon nur die Anzeige in de Férussac *Bulletin des scienc. mathém. Avril* 1829. *pag.* 254. zu Gesicht gekommen.

Wird die von Hrn. Galois gemachte, wenn auch nicht ausdrücklich a. a. O. beigefügte Bedingung, dafs a, b, c, ... positive ganze Zahlen sind, weggelassen, so können die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, wenn sie anders möglich sind, stets durch zwei Kettenbrüche von der gedachten Form annäherungsweise gefunden werden.

So folgt, um dieses auf die möglich einfachste Weise zu bewerkstelligen, aus der quadratischen Gleichung: $x^2-px+q=0$, unmittelbar:

$$x=\frac{q}{p-x}=\cfrac{q}{p-\cfrac{q}{p-\cfrac{q}{p-\text{etc.}}}}=\left(\frac{p}{q},\ p,\ \frac{p}{q},\ p,\ \ldots\right).$$

Hat nun die Gleichung zwei mögliche Wurzeln, ist also $p^2>4q$, so convergirt dieser Kettenbruch, und giebt so genau, als man will, die absolut kleinere der beiden Wurzeln. Die absolut gröfsere ist:

$$1:\left(p,\ \frac{p}{q},\ p,\ \frac{p}{q},\ \ldots\right)=p-\cfrac{q}{p-\cfrac{q}{p-\text{etc.}}}$$

Um dieses Verhalten der Wurzeln darzuthun, so heifsen sie selbst: a und b. Alsdann ist $p=a+b$, $q=ab$, und der erstere Kettenbruch wird:

$$\cfrac{ab}{a+b-\cfrac{ab}{a+b-\cfrac{ab}{a+b-\text{etc.}}}}=\cfrac{am}{1+m-\cfrac{m}{1+m-\cfrac{m}{1+m-\text{etc.}}}}=aM,$$

wenn man noch $b=am$, und den Kettenbruch, durch a dividirt, $=M$ setzt. Die angenäherten Werthe von M werden in ihrer Folge sein:

$$M'=\frac{m}{1+m},\quad M''=\frac{m}{1+m-M'},\quad M'''=\frac{m}{1+m-M''},\ \text{u. s. w.},$$

folglich, wenn man $M'=1-N'$, $M''=1-N''$, $M'''=1-N'''$, u. s. w.

setzt: $N' = \frac{1}{1+m}$, $N'' = \frac{N'}{m+N'}$, $N''' = \frac{N''}{m+N''}$, u. s. w.,

woraus sich weiter ergiebt:

$$N' = \frac{1}{1+m}, \quad N'' = \frac{1}{1+m+m^2}, \quad N''' = \frac{1}{1+m+m^2+m^3},$$

und nach diesem Gesetz weiter fort. Sei nun b die absolut gröfsere der beiden Wurzeln, also m absolut gröfser als 1, so werden sich die $N''\ldots$ in ihrem Fortgange immer mehr und ohne Grenzen der Null, folglich die $M''\ldots$ der positiven Einheit nähern, so dafs M selbst $=1$ ist. Der Grenzwerth, dem obiger Kettenbruch immer näher kommt, ist daher $= aM = a =$ der absolut kleinern von beiden Wurzeln.

§. 13. Unter den Kettenbrüchen mit wiederkehrenden Elementen dürften diejenigen noch einige Aufmerksamkeit verdienen, bei denen das wiederkehrende Element die Einheit selbst ist. Man findet leicht, dafs:

$(1, y) = \frac{y}{y-1}$, $(1, 1, y) = 1-y$, $(1, 1, 1, y) = \frac{1}{y}$, $(1, 1, 1, 1, y) = \frac{y}{y-1}$,

und so fort zu dreien abwechselnd. Es folgt hieraus:

$$(1, 1, a, 1, 1, b) = (1, 1, a-(1, 1, b)) = (1, 1, a+b-1) = 2-a-b,$$

und eben so:

$$(1, 1, a, 1, 1, b, 1, 1, c) = 3-a-b-c, \text{ u. s. w.}$$

Man hat ferner:

$$(a, b, 1, 1, 1, c, d, e) = (a, b-(1, 1, 1, c-(d, e)))$$
$$= \left(a, b-\frac{1}{c-(d, e)}\right) = (a, b-(c, d, e)) = (a, b, c, d, e).$$

Kommen daher in dem Ausdrucke eines Kettenbruchs drei der Einheit gleiche Elemente unmittelbar hintereinander vor, so kann man sie, ohne den Werth des Kettenbruchs zu ändern, auch weglassen. So ist z. B.:

$$(1, 1, 1, a, 1, 1, 1, b, 1, 1, 1, c) = (a, b, c).$$

Dafs mehrere aufeinander folgende Elemente in dem Ausdrucke eines Kettenbruchs ohne Änderung seines Werthes gestrichen werden können, ist noch auf unzählig viel andere Arten möglich. Denn, wie schon aus dem vorigen speciellen Falle erhellet, ist überhaupt zur Weglassung der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu, \nu$ in einem Kettenbruche, wie $(a, b, \alpha, \beta, \ldots \nu, c, d, \ldots)$, nur nöthig, dafs für jeden Werth von y

$$(\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, y) = (y) = 1:y$$

sei, also wenn diese Gleichung nach (16*.) entwickelt wird:

$$[\alpha, \ldots \nu] - [\alpha, \ldots \mu]\frac{1}{y} - [\beta, \ldots \nu]y + [\beta, \ldots \mu] = 0;$$

woraus wegen der Unbestimmtheit von y die drei Bedingungsgleichungen:
(*a.*) $[\alpha, \ldots . \nu] + [\beta, \ldots . \mu] = 0$, (*b.*) $[\alpha, \ldots . \mu] = 0$, (*c.*) $[\beta, \ldots . \nu] = 0$
fliefsen, die sich aber für die Anwendung folgendergestalt noch bequemer einrichten lassen. Nach (15.) ist:

$$[\alpha, \ldots . \mu][\beta, \ldots . \nu] - [\alpha, \ldots . \nu][\beta, \ldots . \mu] = 1,$$

folglich wegen (*a.*), (*b.*), (*c.*):

$$(d.) \quad [\beta, \ldots . \mu] = \pm 1.$$

Hiermit wird wegen (*b.*):

$$[\alpha, \ldots . \mu] = \alpha[\beta, \ldots . \mu] - [\gamma, \ldots . \mu] = 0,$$

folglich:

$$(e.) \quad \alpha = \pm[\gamma, \ldots . \mu],$$

und eben so wegen (*c.*):

$$(f.) \quad \nu = \pm[\beta, \ldots . \lambda].$$

Man wähle daher von den Elementen $\beta, \ldots . \mu$, eines ausgenommen, die übrigen nach Belieben, und bestimme dieses eine mit Hülfe der Gleichung (*d.*), worauf sich dann α und ν durch (*e.*) und (*f.*) ergeben.

So ist z. B. bei 5 Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, wenn man β und δ willkürlich nimmt, und von den doppelten Zeichen blofs die obern beibehält:

$$\gamma = \frac{1+\beta+\delta}{\beta\delta}, \quad \alpha = \frac{1+\delta}{\beta}, \quad \varepsilon = \frac{1+\beta}{\delta}.$$

Setzt man daher $\beta = \delta = 1$, so wird $\gamma = 3$, $\alpha = \varepsilon = 2$, und es ist:

$$(\ldots . a, b, 2, 1, 3, 1, 2, c, d, \ldots .) = (\ldots . a, b, c, d, \ldots .).$$

Anwendung der Lehre von den Kettenbrüchen auf die Dioptrik.

§. 14. Bei einem System von drei Linsengläsern, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, sei a das Reciproke der Brennweite des ersten, d. i. das Licht zuerst empfangenden Glases; c und e die Reciproken des zweiten und dritten Glases; b der Abstand des zweiten Glases vom ersten; d der Abstand des dritten vom zweiten. Beide Abstände sind positiv, indem die positive Richtung der Achse der Gläser diejenige sein soll, nach welcher das Licht fortgeht. a, c, e sind positiv oder negativ, nachdem die Gläser, denen sie zugehören, erhaben oder hohl sind. Sei endlich noch x der Abstand des ersten Glases von einem Objecte, y der Abstand des durch die drei Gläser gemachten Bildes vom letzten Glase, so folgt aus den Grundformeln der Dioptrik (vergl. meinen Aufsatz „über die Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern" §. 3.):

$$5. \quad y = (e, d, c, b, a, x),$$

und auf ähnliche Weise verhält sich die Gleichung zwischen x und y bei jeder andern Zahl von Gläsern. Man kann aber dieser Gleichung auch noch die Gestalt geben:

$$16. \quad [x-\alpha][y-\beta] = \gamma^2,$$

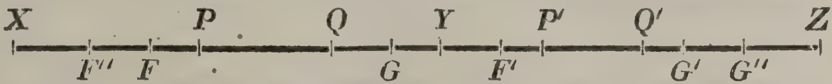
wo $\alpha = (a, \ldots . e)$, $\beta = (e, \ldots . a)$, $\gamma = 1 : [a, \ldots . e]$. Bezeichnet daher P den Mittelpunct des ersten Glases, Q den Mittelpunct des letzten, X den Ort des Objects, Y den Ort des Bildes, und bestimmt man zwei Puncte F, G in der Axe so, dafs $FP = \alpha$, $QG = \beta$: so wird $x - \alpha = XP - FP = XF$, $y - \beta = QY - QG = GY$, und (16.) geht über in:

$$XF \,.\, GY = \gamma^2.$$

Ist also X in F, so liegt Y unendlich weit entfernt, und wird X in das Unendliche entfernt, so rückt Y nach G. *Überhaupt aber ist das negative Product aus den Abständen des Objects und des Bildes von den Puncten F und G* (negativ, weil $XF \,.\, GY = -FX \,.\, GY$) *einem constanten Quadrate gleich.* Analog mit den Eigenschaften einer einzigen Linse hatte ich daher in jenem Aufsatze (§. 8.) F und G die *beiden Brennpuncte*, γ die *Brennweite* des Linsensystems genannt. Statt dafs aber dort F der erste, G der zweite Brennpunct geheifsen hatte, möchte es wohl bezeichnender und daher angemessener sein, F, als den Ort des Objects für ein unendlich entferntes Bild, den *Brennpunct des Objects* und eben so G den *Brennpunct des Bildes* zu nennen.

Sei jetzt Q nicht mehr das letzte Glas, sondern folge darauf an derselben Axe ein zweites Gläsersystem, welches eben so durch die Constanten $a', \ldots . e'$, als das erste System durch $a, \ldots . e$, bestimmt werde. Die Mittelpuncte des ersten und letzten Glases des zweiten Systems heifsen P' und Q', die Brennpuncte dieses Systems seien F', G', und die Brennweite $= \gamma'$, so ist

$$F'P' = (a', \ldots . e') = \alpha', \quad Q'G' = (e', \ldots . a') = \beta', \quad \gamma' = 1 : [a', \ldots . e'].$$



Setzt man aber noch QP', oder den Abstand des ersten Glases des zweiten Systems vom letzten Glase des ersten, $= f$, so sind $a, \ldots . e, f, a', \ldots . e'$ die Constanten beider Systeme, als eines einzigen betrachtet,

dessen Brennpuncte F'', G'' und Brennweite γ'' durch die Gleichungen

$$F''P = (a, \ldots . e') = \alpha'', \quad Q'G'' = (e', \ldots . a) = \beta'', \quad \gamma'' = 1 : [a, \ldots . e']$$

bestimmt werden.

Diese Brennpuncte und Brennweite des ganzen Systems lassen sich nun, sobald die Brennpuncte und Brennweiten der beiden einzelnen Systeme gegeben sind, mittelst der in §. 6. erhaltenen Relationen zwischen α, β, γ, α', ... γ'' sehr leicht finden. Man hat nemlich:

$$\delta = f - \beta - \alpha' = QP' - QG - F'P' = GF', \quad \alpha'' - \alpha = F''P - FP = F''F,$$
$$\beta'' - \beta' = Q'G'' - Q'G' = G'G'',$$

und hiermit werden die Gleichungen (g.) und (h.) in §. 6.:

$$F''F = \frac{\gamma^2}{GF'}, \quad G'G'' = \frac{\gamma'^2}{GF'}, \quad \gamma'' = \sqrt{(F''F \,.\, G'G'')} = \frac{\gamma\gamma'}{GF'},$$

wodurch der vorgesetzte Zweck erreicht wird.

§. 15. Es sind diese Gleichungen so einfach, dafs man wohl hoffen darf, sie auch ohne Zuhülfenahme jener aus der Theorie der Kettenbrüche entlehnten Relationen zu finden. In der That seien von einem einfachen Glase F, G die beiden Brennpuncte, γ die Brennweite, in X das Object, in Y das Bild, so folgt ohne Schwierigkeit aus der für ein einfaches Glas bekannten Grundformel (Haupt-Eigensch. §. 8.):

$$(a.) \qquad XF \,.\, GY = \gamma^2.$$

Dafs γ bei einem einzigen Glase $= \frac{1}{2} FG$ braucht nicht berücksichtigt zu werden. Das von diesem Glase ausgehende Licht falle auf ein zweites Glas, das mit dem ersten eine gemeinschaftliche Axe hat, und dessen Brennpuncte und Brennweite werden durch F', G' und γ' bezeichnet werden. Für dieses zweite Glas dient Y als Object; das durch das zweite von Y oder durch beide Gläser von X gemachte Bild sei Z, so hat man:

$$(b.) \qquad YF' \,.\, G'Z = \gamma'^2.$$

Heifsen nun für beide Gläser, als ein System betrachtet, die beiden Brennpuncte F'', G'', so mufs nach der oben davon gegebenen Definition, wenn X in F'' ist, Z unendlich entfernt liegen, also wegen (b.), Y mit F' zusammenfallen; folglich wegen (a.):

$$(c.) \qquad F''F \,.\, GF' = \gamma^2.$$

Ist zweitens X unendlich entfernt, kommt also, wegen (a.), Y nach G, so mufs Z in G'' sein, und hiermit wird nach (b.):

$$(d.) \qquad GF' \,.\, G'G'' = \gamma'^2.$$

Aus (a.) und (c.) in Verbindung folgt aber:

(*e*.) $XF : GF' = F''F : GY = XF - F''F : GF' - GY = XF'' : YF'$,
und eben so aus (*b*.) und (*d*.):

(*f*.) $YF' : G'G'' = GF' : G'Z = GF' - YF' : G'Z - G'G'' = GY : G''Z$,
und daraus weiter:

$$F''F : XF'' = GY : YF' = G''Z : G'G'',$$

folglich:

$$(g.) \quad XF''.\, G''Z = F''F.\, G'G'' = \frac{\gamma^2 \gamma'^2}{FG'^2}.$$

Ein System von zwei Gläsern besitzt daher ebenfalls die Eigenschaft eines einzigen Glases, daſs das negative Product aus den Abständen des Objects und Bildes von ihren Brennpuncten einem constanten Quadrate gleich ist. Nennen wir daher die Wurzel dieses Quadrats, der Analogie nach, die Brennweite des Systems, und bezeichnen sie mit γ'', so ist

$$(h.) \quad F''F.\, G'G'' = \gamma''^2.$$

Hiermit ist aber unser Satz für ein System nicht bloſs von zwei, sondern auch von jeder gröſsern Anzahl von Gläsern dargethan. Denn nach dem von zwei Gläsern Erwiesenen können nunmehr F, G, γ in (*a*.) die Brennpuncte und Brennweite eines Systems von zwei Gläsern bezeichnen, und F', G', γ' einem dritten auf erstere zwei folgendem Glase, oder einem dritten und vierten Glase in Vereinigung angehören; und somit gilt der Satz auch für ein System von drei oder vier Gläsern; u. s. w.

Überhaupt also kann man F, G, γ auf ein System von Gläsern in beliebiger Anzahl beziehen, und eben so F', G', γ' auf ein dergleichen zweites, auf das erste folgendes System. Die Brennpuncte F'', G'' und die Brennweite γ'' für beide Systeme in Verbindung werden sich alsdann mittelst der Formeln (*c*.), (*d*.) und (*h*.) ergeben, derselben, welche wir zu Ende des vorigen Paragraphs durch die Theorie der Kettenbrüche gefunden hatten.

Sollen drei aufeinander folgende Systeme mit einander verbunden werden, so kann dies geschehen, indem man zuerst das erste mit dem zweiten verbindet und zu dieser Vereinigung das dritte setzt, oder auch, indem man mit der Verbindung des zweiten und dritten anfängt und mit der Hinzufügung des ersten schlieſst. Auf beiden Wegen müssen für alle drei Systeme, als ein einziges betrachtet, dieselben Brennpuncte und dieselbe Brennweite gefunden werden. Sind der zu verbindenden Systeme noch mehrere, so mehrt sich auch die Anzahl der Wege, auf denen man zur Verknüpfung aller Systeme gelangen kann; nur darf dabei nicht auſser

Acht gelassen werden, dafs zwischen den zwei zu verbindenden Systemen niemals ein zu ihnen nicht gehöriges Glas liegen darf.

§. 16. Es haben diese Zusammensetzungen von Systemen einige Ähnlichkeit mit der Art und Weise, nach welcher von einem Systeme gewichtiger Puncte der Schwerpunct bestimmt wird. Was dort einzelne Puncte sind, sind hier Paare von Puncten, nemlich je zwei zusammengehörige Brennpuncte; den dortigen Gewichten der Puncte entsprechen hier die den Paaren von Brennpuncten zugehörigen Brennweiten, und so wie durch allmälige Combination der gewichtigen Puncte, in welcher Ordnung sie auch vorgenommen werden mag, man doch immer denselben Schwerpunct mit demselben Gewicht findet, so gelangt man auch hier bei den verschiedenen möglichen Arten der Verbindung stets zu denselben zwei Brennpuncten und zu derselben Brennweite. Dem Falle, in welchem die Summe der Gewichte, die sowohl negativ als positiv sein können, gleich Null ist, und wo daher der Schwerpunct unendlich entfernt liegt, entspricht ein Fernrohr, indem von einem System von Gläsern, welche ein Fernrohr bilden, die beiden Brennpuncte ebenfalls unendlich entfernt sind. Mit dem noch speciellern Falle endlich, wo zwischen den positiven und negativen Gewichten Gleichgewicht herrscht, kann ein Fernrohr verglichen werden, dessen Vergröfserungszahl $=1$ ist, und welches daher nahe und ferne Gegenstände in ihrer natürlichen Gröfse zeigt, indem, eben so wie dort, die Wirkungen der Kräfte, so hier die Wirkungen der Gläser sich gegenseitig aufheben.

Ein solches dioptrisches Gleichgewicht findet, wenn auch nicht ganz vollkommen, bei einem System zweier Gläser statt, welche gleiche positive Brennweiten haben und um das Doppelte dieser Brennweite von einander entfernt sind. Denn hier ist das Bild mit dem Object immer von gleicher Gröfse, allein verkehrt und dem Auge stets um das Vierfache der Brennweite des einen oder andern Glases näher als das Object.

Ein vollkommneres Gleichgewicht, so dafs Bild und Object nicht nur gleiche Gröfse, sondern auch von dem Auge gleiche Entfernung haben, läfst sich hervorbringen, wenn man zwischen jene zwei Gläser in die Mitte ein drittes setzt, dessen Brennweite viermal kürzer als die Brennweite der erstern ist; oder noch allgemeiner: Werden bei einem System von drei Linsen die Buchstaben a, b, c, d, e, x, y in derselben Bedeutung, wie in §. 14. genommen, so ist der Abstand des Bildes vom Object $=x+b+d+y$. Giebt man daher der Gleichung $x=(a, \ldots . e, y)$ die

Form (16*.), und setzt darin, weil das Bild mit dem Object immer zusammenfallen soll, $y = -(b+d+x)$, so kommt eine nach x quadratische Gleichung, aus der, weil sie für jeden Werth von x bestehen mufs, die drei Bedingungs-Gleichungen hervorgehen:

$[a, \ldots . e] = 0, \ [a, \ldots . d] - [b, \ldots . e] = 0, \ [b, \ldots . e][b+d] + [b, \ldots . d] = 0,$

welche sich vermöge der Relation (15.) auf:

$$[a, \ldots . d] = [b, \ldots . e] = \pm 1, \quad b + d \pm [b, \ldots . d] = 0$$

reduciren. Nimmt man darin die untern Vorzeichen, indem die obern, wie man leicht findet, auf ein System von drei Plangläsern führen, so erhält man nach weiterer Entwickelung die Brennweiten der drei Gläser durch ihre Entfernungen von einander ausgedrückt:

$$\frac{1}{a} = \frac{b(b+d)}{2d}, \quad \frac{1}{c} = \frac{bd}{2(b+d)}, \quad \frac{1}{e} = \frac{d(b+d)}{2b},$$

wodurch man, wenn die Entfernungen b und d gegeben sind, die Brennweiten $1:a$, u. s. w. finden kann. Eliminirt man b und d, so ergiebt sich zwischen den Brennweiten allein die nicht uninteressante Relation:

$$\frac{1}{\sqrt{(ae)}} = \frac{1}{\sqrt{(ac)}} + \frac{1}{\sqrt{(ce)}}.$$

Dieses System von Gläsern ist, weil vermöge der Relation $x + b + d + y = 0$, für $x = \infty$ auch $y = \infty$ wird, ein Fernrohr, wie auch die Gleichung $[a, \ldots . e] = 0$ zu erkennen giebt (H. E. §. 11.). Das Verhältnifs zwischen den Durchmessern des Objects und des Bildes ist bei einem aus den Elementen $a, \ldots . e$ construirten Fernrohr $= -[b, \ldots . e] : (-1)^3$ (H. E. §. 13.), also bei gegenwärtigem $= 1 : -1$, d. h. das Bild ist mit dem Object von gleicher Gröfse, aber verkehrt.

Sollen die Wirkungen der Gläser sich vollkommen aufheben, so dafs das Bild mit dem Objecte stets nicht nur von gleicher Gröfse und in gleicher Entfernung vom Auge, sondern auch in derselben Lage wie das Object erscheint, so werden, wenn anders keine der gegenseitigen Entfernungen der Gläser $= 0$ sein soll, zum wenigsten vier Gläser erfordert.

§. 17. Auch der (in H. E. §. 9. erwiesene) allgemeine Satz, dafs bei einem System von Gläsern, welche kein Fernrohr bilden, die Durchmesser von Object und Bild sich wie die Quadratwurzeln aus den Entfernungen des Objects und Bildes von ihren Brennpuncten verhalten, läfst sich mittelst des vorhin Entwickelten sehr einfach darthun.

Für ein einziges Glas fliefst er leicht aus den Grundformeln der Dioptrik (H. E. §. 8.). Sind also, wie vorhin, F, G und F', G' die Brennpuncte zweier Gläser, x, y, z die resp. Durchmesser des Objects in X, des vom ersten Glase in Y, und des von beiden zugleich in Z gemachten Bildes, so hat man:

$$x:y = \surd(XF):\surd(GY), \quad y:z = \surd(YF'):\surd(G'Z),$$

folglich:

$$(i.) \quad x:z = \surd(XF.YF'):\surd(GY.G'Z).$$

Sind aber F'', G'' die Brennpuncte des von den zwei Gläsern gebildeten Systems, so verhält sich zufolge (*e.*) und (*f.*) in §. 15.:

$$XF:GF' = XF'':YF', \quad \text{und} \quad GF':G'Z = GY:G''Z,$$

mithin

$$XF:G'Z = XF''.GY:YF'.G''Z, \text{ und}$$

$$(k.) \quad x:z = \surd(XF''):\surd(G''Z).$$

Unser Satz ist daher auch für ein System von zwei Gläsern richtig, folglich auch für ein System von drei, vier, u. s. w. Gläsern, wenn man F, G nach und nach als die Brennpuncte eines Systems von zwei, drei, u. s. w. Gläsern nimmt.

§. 18. Sollen zwei Systeme von Gläsern, welche durch F, G, γ und F', G', γ' bestimmt werden, ein Fernrohr bilden, so mufs, wenn das Object (Bild) unendlich entfernt ist, der Ort G'' (F'') des Bildes (Objects) ebenfalls unendlich entfernt sein. Die Brennpuncte F'', G'' eines Fernrohrs sind also zwei unendlich entfernte Puncte, und daher vermöge (*c.*) oder (*d.*), $GF' = 0$, d. h.: Von zwei Systemen, welche in ihrer Vereinigung ein Fernrohr ausmachen, fällt des Bildes Brennpunct beim ersten System mit des Objectes Brennpunct beim zweiten System zusammen.

Hiermit wird $YF' = YG = -GY$, und daher zufolge der Gleichungen (*a.*) und (*b.*):

$$XF:ZG' = \gamma^2:\gamma'^2,$$

also auch, wenn X', Z' zwei andere zusammengehörige Örter von Object und Bild sind:

$$XX':ZZ' = \gamma^2:\gamma'^2.$$

Die Proportion (*i.*) aber wird:

$$x:z = \surd(XF):\surd(ZG') = \pm\gamma:\gamma'.$$

Wir folgern hieraus die (in H. E. §. 13. bewiesenen) Sätze:

Beim Fernrohr ist das Verhältnifs ($\gamma':\gamma$) zwischen den wahren (nicht scheinbaren) Durchmessern des Bildes und Ob-

jects, so wie das Verhältnifs $(\gamma'^2 : \gamma^2)$ zwischen den Geschwindigkeiten beider, wenn das Object längs der Axe bewegt wird, von constanter Gröfse, und zwar ist letzteres Verhältnifs dem Zweifachen des erstern gleich.

Das Verhältnifs zwischen den scheinbaren Durchmessern von Bild und Object ist zusammengesetzt aus dem Verhältnifs der wahren Durchmesser und dem umgekehrten Verhältnifs ihrer Entfernungen vom Auge, und daher die Vergröfserung des Fernrohrs, oder das Verhältnifs der scheinbaren Durchmesser von Bild und Object in dem Falle, wenn beide unendlich entfernt sind, und wo daher die Entfernungen der Puncte F, G' vom Auge gegen die Entfernungen der Puncte X und Z verschwinden, $= (\gamma' : \gamma) : (\gamma'^2 : \gamma^2) = \gamma : \gamma'$. Die Vergröfserung eines Fernrohrs ist daher dem umgekehrten Verhältnifs der wahren Durchmesser von Bild und Object gleich.

Zusätze. *a*) Denkt man sich ein System von Gläsern, welche ein Fernrohr bilden, in zwei Systeme zerlegt (welches auf $n-1$ Arten geschehen kann, wenn das Fernrohr aus n Gläsern besteht), so fällt immer des Bildes Brennpunct beim ersten System mit des Objectes Brennpunct beim zweiten zusammen, und immer ist die Brennweite des ersten Systems, dividirt durch die Brennweite des zweiten, der Vergröfserung gleich: zwei Eigenschaften, ganz denen analog, welche man schon längst bei einem nur aus zwei Gläsern bestehendem Fernrohr kannte. Es wird also auch bei einem Fernrohr mit zwei oder mehrern Ocularגläsern die Vergröfserung gefunden, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Systems der Oculare dividirt.

b) Ist die Vergröfserung eines Fernrohrs $= 1$, so ist $\gamma = \gamma'$, also $x = z$ und $XF = ZG'$, d. h. das Bild ist mit dem Object immer von gleicher Gröfse und von ihm stets um einen Abstand $= FG'$ entfernt. Soll daher überdies das Bild mit dem Object immer zusammenfallen, so mufs $FG' = 0$ sein. Wird demnach ein solches Fernrohr (vergl. §. 16.) in zwei Systeme zerlegt, so haben diese immer einander gleiche Brennweiten, und die Brennpuncte des einen Systems coincidiren mit den ungleichnamigen des andern, F' mit G und G' mit F.

20.
Über die analytische Sphärik.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

Für die Lehre von den Constructionen auf der Oberfläche der Kugel mag der Name „Sphärik" eintreten, so wie sie sich überhaupt der Planimetrie gegenüber stellt; dort ist die Kugelfläche das Constructionsfeld, hier ist es die Ebene. Obgleich die analytische Geometrie so vielseitig ausgebildet worden ist, so hat man sie dennoch bisher zu wenig auf die Untersuchung der Gesetze sphärischer Constructionen ausgedehnt, und nur in Einzelnheiten die Grenzen der sphärischen Trigonometrie, des elementaren Abschnittes der analytischen Sphärik überschritten, geleitet von der Analogie, welche zwischen ebenen und sphärischen Constructionen Statt findet. Diese Analogie des Stoffes nun auch in der analytischen Behandlung selbst auf die vollkommenste Weise darzustellen und weiter zu verfolgen, war der Grundgedanke, welcher mich bei der Abfassung eines im Verlage des Hrn. Dumont-Schauberg in Cölln erscheinenden Werkes unter dem Titel: „Grundrifs der analytischen Sphärik" leitete. Diese Analogie der Behandlung wird auf die vollständigste Weise durch den ausschliefslichen Gebrauch sphärischer Coordinaten erreicht, deren Theorie denn also zuerst entworfen werden mufste. Eingeführt von diesem Grundrisse wird man bald das Urtheil gewinnen, dafs die analytische Sphärik einer im Ganzen eben so einfachen und allgemeinen Darstellung fähig ist, als die analytische Planimetrie, und dafs man nur selten auf eine gröfsere Schwierigkeit stöfst.

Die Sphärik läfst sich als eine verallgemeinerte Planimetrie, aber nicht umgekehrt, darstellen; jene enthält diese gleichsam eingeschlossen, denn in den Formeln und Gleichungen jener lassen sich ohne Weiteres die Specialisirungen für den Fall angeben, dafs der Radius der Kugel unendlich grofs angenommen wird, wobei sich also die Kugelfläche in eine Ebene und so auch die behandelte sphärische Construction selbst in eine ebene verwandelt. Wird daher ein Theorem aus der Planimetrie in die Sphärik übertragen, so ist dieses jedesmal ein Schritt zum Allgemeineren.

Zahllose Lehrsätze gestatten eine solche Übertragung, zu deren Ausführung das angeführte Werk die nöthige Anleitung giebt, und es bedarf der Erinnerung kaum, dafs die bei einer solchen Übertragung nöthigen Modificationen in der Regel desto geringer sind, je gröfsere Allgemeinheit das planimetrische Theorem selbst hat.

Das Interesse an der Sphärik wird sehr gesteigert durch die grofse Mannigfaltigkeit dieser Modificationen, welche nicht selten sehr auffallend sind. So ist z. B. der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller (sphärischen) Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Puncte geschrieben werden, nicht, wie in der Planimetrie, wieder ein Kegelschnitt, sondern eine Linie der dritten Ordnung, die aber durch, dem Begriffe nach, dieselben neun Puncte geht, wie in der Planimetrie. Diese Veränderlichkeit in der Analogie wird man auch in den nachfolgenden Lehrsätzen erkennen, welche ich hier als Problem analytischer Behandlung spärischer Objecte vorzulegen wage, zu deren besserem Verständnifs ich jedoch auf das Werk selbst verweisen mufs, dem sie als Nachtrag dienen können.

1.

In der Planimetrie ist der geometrische Ort für die Fufspuncte der Perpendikel, welche von einem Brennpuncte einer Ellipse auf ihre Tangenten gefällt werden, ein über der grofsen Axe beschriebener Kreis; was ist das Analogon in der Sphärik?

Es werde (Taf. III. Fig. 1.) der Brennpunct F zum Anfangspuncte genommen, die grofse Axe $AB = 2a$ diene als Abscissenlinie, die Excentricität sei $CF = e$, der Parameter sei p; die trigonometrischen Tangenten der rechtwinkligen Axen-Coordinaten eines Punctes der Ellipse seien x und y; dann ist die Gleichung an den Kegelschnitt:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = m + nx,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$m = \operatorname{tang} p \quad \text{und} \quad n = \frac{\sin 2e}{\sin 2a}.$$

Ziehen wir nach einem Puncte M oder (t, u) vom Brennpuncte aus die Linie FM, so ist ihre Gleichung $y = \frac{u}{t} x$ oder $ux - ty = 0$, und die Gleichung an ein in M darauf errichtetes Perpendikel ist:

$$\frac{y-u}{x-t} = -\frac{t}{u} \quad \text{oder} \quad u.y + t.x = t^2 + u^2.$$

Soll dieses eine Berührungslinie der Curve sein, so erhält man zur Be-

dingungsgleichung:

$$(1-n^2).(t^2+u^2) = 2mnt + m^2.$$

Der geometrische Ort des Punctes M ist also wieder ein Kegelschnitt. Setzt man $u=0$, so hat man die Gleichung:

$$t^2 - \frac{2mn}{1-n^2}t = \frac{m^2}{1-n^2},$$

d. h. es ist

$$t = \frac{m}{1-n} \quad \text{und} \quad t = -\frac{m}{1+n}.$$

Da aber $\operatorname{tang} FA = \frac{m}{1+n}$ und $\operatorname{tang} FB = \frac{m}{1-n}$ ist, so ist die Ortscurve ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen die Axe AB gemein hat.

Fällt man die Applicate $MP = z$ auf AB und wird $FP = x$ gesetzt, so ist $\operatorname{tang} z = u.\cos x$ und $t = \operatorname{tang} x$; daher verwandelt sich die Gleichung in:

$$(1-n^2)\operatorname{tang} z^2 = m^2\cos x^2 + 2mn\sin x\cos x - (1-n^2)\sin x^2 \quad \text{oder}$$

$$(1-n^2)\operatorname{tang} z^2 = (m\cos x + n\sin x)^2 - \sin x^2.$$

Um die Axe $D'E' = 2a'$ zu finden, dient nun die Bemerkung, daſs $z = a'$ ist, für $x = e$. Also hat man:

$$(1-n^2)\operatorname{tang} a'^2 = (m\cos e + n\sin e)^2 - \sin e^2.$$

Werden hierin die Werthe $m = \frac{\cos e^2 - \cos a^2}{\sin a\cos a}$ und $n = \frac{\sin e\cos e}{\sin a\cos a}$ substituirt, so findet man:

$$\operatorname{tang} a'^2 = \frac{\sin a^2}{\cos e^2 - \sin a^2} \quad \text{oder} \quad \sin a' = \frac{\sin a}{\cos e}.$$

Wird die zweite Axe DE des gegebenen Kegelschnitts mit $2b$ bezeichnet, so ist $\cos a = \cos e.\cos b$, und also:

$$\sin a' = \operatorname{tang} a.\cos b.$$

Da $D'E' > AB$ ist, so liegen die beiden Brennpuncte des Kegelschnitts $AD'BE'$ in der Axe $D'E'$, und wenn seine Excentricität mit e' bezeichnet wird, so ist $\cos a' = \cos e'.\cos a$, und daher findet man:

$$\sin e' = \operatorname{tang} e.\operatorname{tang} a.$$

Der Kürze wegen brechen wir hier schon ab und wenden uns zu einer zweiten Aufgabe.

II.

Werden in einen spärischen Kegelschnitt Dreiecke beschrieben, so daſs zwei Seiten immer durch feste Puncte gehen, so berührt die dritte Seite allemal einen Kegelschnitt, welcher mit dem ersten einen zweifachen Contact hat, und die beiden Berührungspuncte liegen in derjenigen (sphä-

risch-) geraden Linie, welche durch die beiden festen Puncte geht. Dieses Theorem, ursprünglich planimetrisch, gilt fast ohne alle Modification von den sphärischen Kegelschnitten. Sobald wir es aber specialisiren, treten namhafte Modificationen ein; daher werden wir der Kürze wegen hier nur einen solchen Specialfall behandeln.

In den Kegelschnitt $AC'BD'$ (Fig. 2.), dessen Hauptaxen $AB = 2a'$ und $C'D' = 2b'$ sein mögen, werden Dreiecke RPQ beschrieben; die Seite PR gehe immer durch den Mittelpunct M und die Seite RQ durch einen festen Punct N der grofsen Axe AB, und es sei $\operatorname{tang} MN = \varepsilon$.

Die Gleichung an den Kegelschnitt, wenn M zum Anfangspuncte genommen wird, sei: $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, und es ist dann $\alpha = \cot a'^2$; $\beta = \cot b'^2$. Der Punct R werde bezeichnet mit (t, u), also ist auch:

$$\alpha t^2 + \beta u^2 = 1.$$

Die Gleichung an den Kegelschnitt läfst sich unter folgende Form bringen:

$$\beta(y-u)^2 + 2\beta(y-u).u + \alpha(x-t)^2 + 2\alpha(x-t).t = 0.$$

Die Gleichung an RNQ ist: $y - u = \frac{-u}{\varepsilon - t}(x-t)$, und wird sie mit der vorigen Gleichung verbunden, so erhält man zur Bestimmung des Punctes Q die Ausdrücke:

$$x'' - t = \frac{2(\varepsilon-t)(1-\alpha\varepsilon t)}{1+\alpha\varepsilon^2-2\alpha\varepsilon t} \quad \text{und} \quad y''-u = \frac{-2u(1-\alpha\varepsilon t)}{1+\alpha\varepsilon^2-2\alpha\varepsilon t}, \quad \text{oder}$$

$$x'' = \frac{2\varepsilon - t - \alpha\varepsilon^2 t}{1+\alpha\varepsilon^2-2\alpha\varepsilon t} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{-u(1-\alpha\varepsilon^2)}{1+\alpha\varepsilon^2-2\alpha\varepsilon t}.$$

Setzt man hierin $\varepsilon = 0$, so findet man zur Bestimmung des Punctes P die Ausdrücke:

$$x' = -t \quad \text{und} \quad y' = -u.$$

Die Gleichung an PQ ist nun $-(x'-x'')y + (y'-y'')x + x'y''-y'x'' = 0$, und werden die angegebenen vier Werthe substituirt, so erhält man an PQ die Gleichung:

$$\beta u.y + \alpha(t-\varepsilon)x = \alpha\varepsilon t - 1.$$

Die Differentialgleichung ist: $\beta.\frac{\partial u}{\partial t}.y + \alpha x = \alpha\varepsilon$, und da aus der Gleichung $\alpha t^2 + \beta u^2 = 1$ folgt $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-\alpha t}{\beta u}$, so verwandelt sie sich in:

$$t.y = u(x-\varepsilon).$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verbunden, so erhält man die Werthe von x und y zur Bestimmung des Berührungspunctes π, in welchem die Tangente PQ von der nächst folgenden geschnitten wird.

Man kann daraus aber auch rückwärts ziehen die Ausdrücke:

$$t = \frac{(x-\varepsilon)(\alpha\varepsilon x-1)}{\beta y^2+\alpha(x-\varepsilon)^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{y(\alpha\varepsilon x-1)}{\beta y^2+\alpha(x-\varepsilon)^2},$$

welche der Gleichung $\alpha t^2+\beta u^2=1$ Genüge leisten müssen, und, darin substituirt, die folgende einfache Bedingungsgleichung: $\beta y^2+\alpha(x-\varepsilon)^2 = (\alpha\varepsilon x-1)^2$ geben. Diese gehört nun der Ortscurve des Punctes π an und läſst sich noch zusammenziehen auf:

$$\frac{\beta}{1-\alpha\varepsilon^2}.y^2+\alpha.x^2 = 1.$$

Diese Gleichung gehört einem Kegelschnitte an, und wenn wir seine beiden Axen mit $2a$ und $2b$ bezeichnen, so ist:

$$\cot a^2 = \alpha \quad \text{und} \quad \cot b^2 = \frac{\beta}{1-\alpha\varepsilon^2}.$$

Man hat also $a=a'$, d. h. die beiden Kegelschnitte haben die Axe AB gemein und berühren sich auch in den Puncten A und B.

Wird nun noch $MN=e$ gesetzt, so hat man:

$$\operatorname{tang} b^2 = \operatorname{tang} b'^2.\frac{\sin(a'+e).\sin(a'-e)}{\sin a'^2.\cos e^2}.$$

Errichtet man in N die Applicate $NV=c$ senkrecht auf AB, so ist:

$$\operatorname{tang} c^2 = \frac{\operatorname{tang} b'^2}{\sin a'^2}.\sin(a'+e).\sin(a'-e),$$

und also:

$$\operatorname{tang} b.\cos e = \operatorname{tang} c;$$

d. h. wenn man von V das Loth VC auf $C'D'$ fällt, so ist $MC=b$ die gesuchte kleine Halb-Axe des Kegelschnitts $ACBD$, welcher immer von der dritten Seite PQ des Dreiecks RPQ berührt wird.

Stellen wir nun eine Vergleichung mit dem planimetrischen Analogon an, indem wir uns erinnern, daſs, wenn (in der Ebene) $AC'BD'$ ein Kreis ist, der Punct N gerade ein Brennpunct der Ellipse $ACBD$ ist. Setzen wir zu dem Ende $b'=a'=a$, so finden wir:

$$\operatorname{tang} b^2 = \operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} e^2,$$

woraus leicht erhellet, daſs nun der Punct N nicht, wie in der Planimetrie, der Brennpunct der Ellipse $ACBD$ ist.

Stellen wir uns aber die Ellipse $ACBD$ als gegeben vor, so entsteht die Frage, wie der Kegelschnitt $AC'BD'$ beschaffen sein müsse, wenn der Punct N der Brennpunct der gegebenen Ellipse sein soll, da der Kreis diese Bedingung nicht befriedigt. Da immer $a=a'$ ist, so kommt es also nur noch auf die Ermittelung von b' an. Dazu dient die Formel:

$$\tang b^2 = \tang b'^2 \cdot \frac{\sin a'^2 - \sin e^2}{\sin a'^2 \cdot \cos e^2} = \tang b'^2 \cdot \frac{\cos e^2 - \cos a'^2}{\sin a'^2 \cdot \cos e^2}.$$

Soll e die Excentricität sein, so ist $\cos a = \cos e \cdot \cos b = \cos a'$. Eliminiren wir e, so erhalten wir:

$$\tang b' = \frac{\sin a}{\cos b} \quad \text{oder} \quad \tang b' = \tang a \cdot \cos e = \tang a' \cdot \cos e.$$

Es ist also $b' < a'$; auch kann b' durch eine einfache Construction gefunden werden. Man errichte nur im Brennpuncte N der Ellipse $ACBD$ auf AB das Loth NW, mache es gleich $MB = MA$, und errichte in W das Loth WC' auf NW, so schneidet es CD in einem Puncte C' so, daſs $MC' = b'$ ist.

III.

Die drei Seiten eines Dreiecks QFR (Fig. 3.) drehen sich um die drei festen Puncte A, P, E, während zwei Ecken Q und R desselben sich in den sphärisch-geraden Linien QCD und RCB bewegen; man sucht den Ort des Punctes F, der dritten Ecke des Dreiecks.

Wir nehmen PE und PA zu Coordinaten-Axen, in Beziehung auf welche die fünf Puncte A, B, C, D, E gegeben oder bestimmt sein mögen, wie folgt:

$$E = (e, 0); \quad D = (d, 0); \quad A = (0, a); \quad B = (0, b); \quad C = (m, n).$$

Die Gleichung an CD ist dann: $y(m-d) - nx = -nd$; an BC: $my - (n-b)x = mb$. Die Gleichung an QPR hat, weil diese Linie durch den Anfangspunct geht, die Form: $y = v \cdot x$. Daher findet man für ihre Durchschnittspuncte Q und R die Bestimmungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-nd}{v(m-d)-n} \\ y &= \frac{-ndv}{v(m-d)-n} \end{aligned}\right\} \text{ für } Q, \text{ und } \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{mb}{mv+b-n} \\ y &= \frac{mbv}{mv+b-n} \end{aligned}\right\} \text{ für } R.$$

Daher ist die Gleichung an QA:

$$ndy + [an - v(nd + ma - da)]x = and;$$

eben so ist die Gleichung an RE:

$$\left[me - \frac{mb - eb + ne}{v}\right]y + mbx = mbe.$$

Aus der ersten Gleichung ziehen wir:

$$v(nd + ma - da)x = n(dy + ax - ad),$$

aus der zweiten:

$$\frac{1}{v}(mb - eb + ne)y = m(ey + bx - be).$$

Indem wir die beiden Gleichungen multipliciren, wird v eliminirt, und eine Bedingungsgleichung für den Durchschnittspunct F oder (x, y) gefunden:
$(nd+ma-da)(mb-eb+ne).xy = mn(dy+ax-ad)(cy+bx-be)$.
Dieser Gleichung leistet man Genüge, wenn man setzt: $x=0$, $y=a$; $x=0$, $y=b$; $x=e$, $y=0$; $x=d$, $y=0$, und $x=m$, $y=n$. Daher ist die Ortscurve des Punctes F ein Kegelschnitt, welcher, wie in der Planimetrie, durch die fünf Puncte A, B, C, D, E geht. Durch Entwickelung wird die Gleichung:

$$de.y^2-\left[\frac{n^2de-nde(a+b)-mab(d+e)+m^2ab+abde}{mn}\right]xy+abx^2$$
$$-de(a+b)y-ab(d+e)x+abde = 0.$$

Der Satz kann, wie in der Planimetrie, auch so ausgesprochen werden: Wenn man jede zwei Gegenseiten eines in einen (sphärischen) Kegelschnitt geschriebenen Sechsecks verlängert bis zum Schneiden, so liegen die drei Durchschnittspuncte in einer (sphärisch-) geraden Linie. Dieses Theorem ist aber für die Sphärik eben so folgenreich, als für die Planimetrie.

IV.

Eine von zwei Tangenten RM und RN intercipirte dritte Tangente $P\pi Q$ (Fig. 4.) eines sphärischen Kegelschnitts wird vom Brennpuncte F aus unter dem Winkel QFP gesehen, dessen Gröfse φ ermittelt werden soll.

Nehmen wir die grofse Axe AB zur ersten Coordinaten-Axe und F zum Anfangspuncte, so ist die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = m+nx, \text{ oder}$$

$$1. \quad y^2+(1-n^2)x^2-2mnx-m^2 = 0.$$

Der Punct R sei bezeichnet mit (p, q); dann ist die Gleichung an das System der beiden Tangenten RM und RN:

$$2. \quad m^2(y-q)^2+(n^2-1)(qx-py)^2-2mn(y-q)(qx-py)+m^2(p-x)^2=0.$$

Die Gleichung an die dritte Tangente $P\pi Q$ sei $\alpha y+\beta x=1$; in Hinsicht auf sie hat man die Bedingungsgleichung:

$$3. \quad n^2-1+2mn\beta+m^2\beta^2+m^2\alpha^2 = 0.$$

Die Gleichung an FQ sei $y=a.x$, die an FP sei $y=a'.x$, dann ist $\tang\varphi = \frac{a'-a}{1+aa'}$.

Um den Durchschnittspunct Q zu finden, substituire man $y=ax$ in der Gleichung $\alpha y+\beta x=1$, wodurch man erhält $x=\frac{1}{a\alpha+\beta}$ und

und $y = \frac{a}{a\alpha + \beta}$. Diese Werthe müssen aber der Gleichung (2.) Genüge leisten; daher hat man zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$m^2(a - a\alpha q - \beta q)^2 + (n^2 - 1)(q - a p)^2 - 2mn(a - a\alpha q - \beta q)(q - a p) + m^2(a\alpha p + \beta p - 1)^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aber auch zur Bestimmung von a'. Folglich sind a und a' ihre Wurzeln. Durch Entwickelung erhält sie die Form:

$$A.a^2 - 2B.a + C = 0,$$

und es ist dann:

$$A = m^2(1-\alpha q)^2 + (n^2-1)p + 2mn(1-\alpha q)p + m^2\alpha^2 p^2,$$
$$B = m^2(1-\alpha q)\beta q + (n^2-1)pq + mn(1-\alpha q)q + mn\beta pq + m^2(1-\beta p)\alpha p,$$
$$C = m^2.\beta^2 q^2 + (n^2-1)q^2 + 2mn\beta q^2 + m^2(1-\beta p)^2.$$

Setzen wir aber $1-\alpha q-\beta p = k$, und substituiren wir also $1-\alpha q = k+\beta p$; $1-\beta p = k+\alpha q$, so erhalten wir:

$$A = mk(mk + 2m\beta p + 2np) + p^2(m^2\beta^2 + m^2\alpha^2 + 2mn\beta + n^2 - 1),$$
$$B = mk(\beta q m + nq + m\alpha p) + pq(m^2\beta^2 + m^2\alpha^2 + 2mn\beta + n^2 - 1),$$
$$C = mk(mk + 2m\alpha q) + q^2(m^2\beta^2 + m^2\alpha^2 + 2mn\beta + n^2 - 1).$$

Weil aber der Gleichung (3.) gemäfs $m^2\beta^2 + m^2\alpha^2 + 2mn\beta + n^2 - 1 = 0$ ist, und auch der gemeinschaftliche Factor mk wegbleiben darf, so haben wir die einfachen Ausdrücke:

$$A = m + (m\beta + 2n)p - m\alpha q,$$
$$B = (m\beta + n)q + m\alpha p,$$
$$C = m + m\alpha q - m\beta p.$$

Da aber a und a' die Wurzeln der Gleichung $A.a^2 - 2B.a + C = 0$ sind, so ist $a + a' = \frac{2B}{A}$, und $aa' = \frac{C}{A}$. Hieraus folgt: $\frac{a'-a}{1+aa'} = \frac{2\sqrt{(B^2-AC)}}{A+C}$; daher ist dann auch:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2\sqrt{(B^2-AC)}}{A+C}.$$

Man findet aber

$$A + C = 2(m+np), \quad \text{und} \quad B^2 - AC = p^2 + q^2 - (m+np)^2,$$

also

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{(p^2 - (m+np)^2 + q^2)}}{m+np}, \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = \pm\frac{m+np}{\sqrt{(p^2+q^2)}}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von α und β, d. h. der Winkel φ bleibt derselbe, wie auch die dritte Tangente $P\pi Q$ von den beiden anderen RM und RN intercipirt werden mag.

Wenn daher in Fig. 5. sich die Tangente PQ gehörig drehet, so fällt P mit M, und Q mit R zusammen; dabei rückt der Berührungspunct π

selbst nach M; daher ist der Winkel $RFM = PFQ$. Eben so erhellet, dafs der Winkel $NFR = PFQ$ ist, und also

$$RFM = RFN.$$

Werden also von einem Puncte R zwei Tangenten RM und RN an einen Kegelschnitt gezogen, so wird der Winkel MFN der beiden von einem Brennpuncte nach den Berührungspuncten gezogenen Leitstrahlen von der sphärisch-geraden Linie halbirt, welche den Brennpunct mit dem Puncte R verbindet.

Daher ist dann auch der Winkel $MFN = 2\varphi = 2.PFQ$.

Werden die beiden Tangenten RM und RN verlängert, so schneiden sie sich noch im Gegenpuncte R' von R, und wird die Tangente $P'\pi'Q'$ von ihnen intercipirt, so ist eben so auch der Winkel $P'FQ'$, welcher mit φ' bezeichnet werden mag, constant, dergestalt, dafs

$$\varphi + \varphi' = 180^o,$$

und also $\cos\varphi = -\cos\varphi'$ ist. Hierdurch ist zugleich die Zweideutigkeit im gefundenen Ausdrucke für $\cos\varphi$ erklärt.

Wir können den Winkel φ endlich auch noch von der individuellen Lage des Punctes R unabhängig machen, wobei wir (Fig. 6.) als geometrischen Ort des Punctes R, unter der Voraussetzung der Beständigkeit des Winkels φ, einen Kegelschnitt finden, welcher mit dem gegebenen $APQB$ denselben Brennpunct F hat, in Beziehung auf welchen der Winkel φ bestimmt wird. Denn, bezeichnen wir den Punct R mit (x, y), so ist:

$$\cos\varphi = \frac{m+nx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \quad \text{oder} \quad \sqrt{(x^2+y^2)} = m'+n'x,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$m' = \frac{m}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad n' = \frac{n}{\cos\varphi}.$$

Es ist dieser Gleichung gemäfs AB selbst ein Theil der grofsen Axe $A'B'$ des neuen Kegelschnitts. Werden die Parameter der beiden Kegelschnitte mit p und p', die grofsen Halb-Axen mit a und a', die beiden Excentricitäten mit e und e' bezeichnet, so ist:

$$1. \quad \tang p = \tang p' . \cos\varphi,$$

$$2. \quad \frac{\sin 2e}{\sin 2a} = \frac{\sin 2e'}{\sin 2a'} . \cos\varphi,$$

und hierdurch ist die Beschaffenheit des Kegelschnitts $A'RB'A'$ bestimmt.

Die in den Scheiteln A und B der gegebenen Curve errichteten Perpendikel $AM = Am$ und $BN = Bn$ sind der Länge nach dadurch be-

stimmt, dafs der Winkel $AFM = BFN = \varphi$ ist. Die Applicate FG, wovon die gegebene Curve in g geschnitten wird, ist $= p'$, und $Fg = p$.

Die auf diese Sätze zu gründende organische Beschreibung der Kegelschnitte ist also dieselbe, wie in der Planimetrie, wenn nur Hauptkreise statt der geraden Linien genommen werden.

V.

Der in Beziehung auf den Brennpunct F bestimmte constante Vectorwinkel $pFq = \varphi$ ist nicht derselbe mit dem in Beziehung auf den anderen Brennpunct f bestimmten Vectorwinkel $pfq = \psi$, und der Zusammenhang zwischen diesen beiden constanten Winkeln soll jetzt ermittelt werden. Um die Lage des Punctes R dabei zu bezeichnen, dienen uns die beiden Winkel $RFB = v$ und $RfA = w$.

Auch setzen wir $\tang FR = R$, und $\tang fR = r$. Demgemäfs haben wir:

$$R \cos\varphi = m + nR\cos v, \quad \text{und} \quad r\cos\psi = m + nr\cos w,$$

also:

$$R = \frac{m}{\cos\varphi - n\cos v}, \quad \text{und} \quad r = \frac{m}{\cos\psi - n\cos w}.$$

Da nun $R\cos v = \tang F\alpha$ und $r\cos w = \tang f\alpha$ ist, wenn $R\alpha$ senkrecht auf AB gefällt wird, und da auch noch $F\alpha + \alpha f = Ff = 2e$ ist, so hat man:

$$\tang 2e = \frac{m\cos v(\cos\psi - n\cos w) + m\cos w(\cos\varphi - n\cos v)}{(\cos\varphi - n\cos v)(\cos\psi - n\cos w) - m^2\cos v\cos w}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin 2e}{\cos 2e} = \frac{m(\cos v\cos\psi + \cos w\cos\varphi) - 2mn\cos v\cos w}{\cos\varphi\cos\psi - n(\cos v\cos\psi + \cos w\cos\varphi) + (n^2 - m^2)\cos v\cos w}.$$

Durch Fortschaffung der Nenner erhält man also:

$$\sin 2e\cos\varphi\cos\psi - (n\sin 2e + m\cos 2e)(\cos v\cos\psi + \cos w\cos\varphi)$$
$$+ ((n^2 - m^2)\sin 2e + 2mn\cos 2e)\cos v\cos w = 0.$$

Bedenkt man nun, dafs $n = \frac{\sin 2e}{\sin 2a}$, und $m = \frac{\cos 2e - \cos 2a}{\sin 2a}$ ist, so hat man:

$$n\sin 2e + m\cos 2e = \frac{1 - \cos 2e\cos 2a}{\sin 2a},$$
$$(n^2 - m^2)\sin 2e + 2mn\cos 2e = \sin 2e,$$

und also:

$$\frac{\cos\varphi\cos\psi + \cos v\cos w}{\cos v\cos\psi + \cos w\cos\varphi} = \frac{1 - \cos 2e.\cos 2a}{\sin 2e.\sin 2a} = \frac{\sin(a+e)^2 + \sin(a-e)^2}{\sin 2a.\sin 2e}.$$

Werden also v, w und φ als gegeben angesehen, so kann ψ daraus gefunden werden.

VI.

Wenn sich zwei sphärisch-gerade Linien, deren Gleichungen $y-q = \alpha(x-p)$, und $y-q=\beta(x-p)$ sein mögen, und die also beide durch den Punct (p,q) gehen, unter einem Winkel φ schneiden, so ist bei der Voraussetzung rechtwinkliger Axen-Coordinaten:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\pm(\alpha-\beta).\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{1+q^2-pq(\alpha+\beta)+\alpha\beta(1+p^2)}.$$

Sind die beiden Linien Tangenten eines Kegelschnitts, dessen Gleichung $\frac{x^2}{\operatorname{tang} a^2}+\frac{y^2}{\operatorname{tang} b^2}=1$ sein mag, so ist

$$\alpha+\beta = \frac{-2pq}{\operatorname{tang} a^2-p^2}, \quad \text{und} \quad \alpha\beta = \frac{\operatorname{tang} b^2-q^2}{\operatorname{tang} a^2-p^2},$$

also:

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{2\sqrt{(q^2\operatorname{tang} a^2+p^2\operatorname{tang} b^2-\operatorname{tang} a^2.\operatorname{tang} b^2)}.\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\operatorname{tang} a^2+\operatorname{tang} b^2-(1+\operatorname{tang} a^2)q^2-(1+\operatorname{tang} b^2)p^2}.$$

Soll der Winkel φ ein rechter sein, so hat man:

$$(1+\operatorname{tang} a^2).q^2+(1+\operatorname{tang} b^2)p^2 = \operatorname{tang} a^2+\operatorname{tang} b^2.$$

Daher ist der Ort des Punctes (p,q), von welchem aus an eine sphärische Ellipse jedesmal zwei auf einander senkrechte Tangenten gezogen werden können, wieder eine Ellipse, welche mit der gegebenen denselben Mittelpunct hat. Werden ihre Axen mit $2A$ und $2B$ bezeichnet, so ist:

$$\operatorname{tang} A^2 = (\operatorname{tang} a^2+\operatorname{tang} b^2)\cos b^2, \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} B^2 = (\operatorname{tang} a^2+\operatorname{tang} b^2)\cos a^2.$$

In der Planimetrie ist die analoge Ortscurve bekanntlich ein Kreis, hier aber nur in dem Falle, wenn die gegebene Curve selbst ein Kreis ist.

Cleve, den 1. Juny 1830.

21.

Elementarer Beweis eines in der Differenzen-Rechnung vorkommenden Ausdrucks.

(Von Herrn *E. Köhlau*, Lieut. im Königl. Preufs. 26sten Inf.-Reg.)

Wenn $u = x^m$ ist, und es wird der Ausdruck $\Delta^n u$ gebildet, Δx constant gleich n angenommen, so ist das allgemeine Glied desselben:

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-r+1)}{1.2.3\ldots.r} x^{m-r} h^r \left(n^r - \frac{n}{1}(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \text{etc.}\right).$$

Bei Bildung der successiven Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ etc. zeigt sich aber, dafs $\Delta^n u$ keine Potenzen von n enthalten kann, deren Exponent kleiner ist als n; es mufs also, wenn $n > r$:

$$1. \quad n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}.(n-2)^r - \text{etc.} = 0$$

sein. Eben so findet man, dafs $\Delta^m u$ constant und dem Product der natürlichen Zahlen von 1 bis m in n^m gleich ist, es mufs also:

$$2. \quad m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \text{etc.} = 1.2.3\ldots.m$$

sein. Beide Ausdrücke lassen sich nun auch auf folgende Art, ohne Differenzen-Rechnung zu gebrauchen, beweisen.

So lange $n > 1$, ist immer:

$$(1-1)^{n-1} = 1-(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \text{etc.} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit n, so ist auch:

$$n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3) + \text{etc.} = 0.$$

Wird hier n mit $n-1$ vertauscht, so wird:

$$(n-1) - (n-1)(n-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3) - \text{etc.} = 0,$$

wenn $n-1 > 1$ oder $n > 2$ ist. Addirt man nun diese Gleichung zur vorigen, ordnet die Summe und multiplicirt sie mit n, so wird, wenn $n > 2$:

$$n^2 - n(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \text{etc.} = 0.$$

Eben so findet man, dafs

$$n^3 - n(n-1)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^3 - \text{etc} = 0$$

ist, wenn $n > 3$. Gesetzt nun, dieser Ausdruck hätte sich als richtig bewährt, wenn der Exponent r, und $n > r$ ist, und es wäre:

$$n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \text{etc.} = 0,$$

so wäre auch, wenn $n-1 > r$ oder $n > r+1$:

$$(n-1)^r - (n-1)(n-2)^r + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^r - \text{etc.} = 0.$$

Werden nun diese beiden Gleichungen addirt und die Summe mit n multiplicirt, so ist:

$$n^{r+1} - n(n-1)^{r+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{r+1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^{r+1} + \text{etc.} = 0,$$

und die Richtigkeit des Ausdrucks (1.) hierdurch allgemein erwiesen.

Der Beweis für den Ausdruck (2.) folgt aus (1.) unmittelbar; denn setzt man: $n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{etc.} = f(n)$,

und addirt:

$$(n+1)^n - (n+1)n^n + \frac{(n+1)n}{1.2}(n-1)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-2)^n + \text{etc.} = 0,$$

so wird der Werth von $f(n)$ nicht geändert, und es bleibt:

$$(n+1)^n - n^{n+1} + \frac{n}{2}(n-1)^{n+1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} + \text{etc.} = f(n).$$

Werden nun beide Theile der Gleichung mit $(n+1)$ multiplicirt, so wird der erste so von $(n+1)$ abhängig, wie es $f(n)$ von n war, mithin $f(n+1)$ sein. Es wird daher: $f(n+1) = (n+1)f(n)$.

Setzt man nun $n=1$, so wird $f(n)$ auch der Einheit gleich, daher $f(2) = 2f(1) = 1.2$, $f(3) = 3f(2) = 1.2.3$ und $f(n) = 1.2.3 \ldots . n$.

Läfst man nun den Exponent zunehmen, und geht zu den Reihen über, deren Anfangsglieder n^{n+1}, n^{n+2}, ... n^{n+r} etc. sind, so werden zwar die Ausdrücke für dieselben zusammengesetzter, doch ist das Gesetz, nach welchem sie nach und nach aus einander abgeleitet werden können, ganz einfach. Denn setzt man:

$$n^{n+r} - n(n-1)^{n+r} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+r} - \text{etc.} = f(n,r), \quad \text{und}$$

$$n^{n+r-1} - n(n-1)^{n+r-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+r-1} - \text{etc.} = f(n,r-1),$$

multiplicirt die zweite Gleichung mit n, und zieht sie von der ersten ab, so erhält man:

$$n(n-1)^{n+r-1} - \frac{n(n-1)}{1}(n-2)^{n+r-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{n+r-1} - \text{etc.}$$
$$= f(n,r) - nf(n,r-1).$$

Der erste Theil der Gleichung ist aber, wenn er analog mit den vorigen Ausdrücken bezeichnet wird: $nf(n-1,r)$; es ist demnach:

$$f(n,r) = nf(n-1,r) + nf(n,r-1).$$

22.
De resolutione aequationum per series infinitas.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

Theoriam resolutionis aequationum per series infinitas principiis novis superstruam, quae maxime in eo versantur, ut indagetur seriei eruendae functio generatrix sive functio, in cuius evolutione certa quadam ratione instituta inveniamus seriem, quae radicem exprimat, ut certi cuiusdam termini coëfficientem. Ita videbimus, proposita aequatione $f(x)=0$, series, quibus radix eius adeoque potestates radicis exprimantur, erui ex evolutione singulari expressionis $\log f(x)$ vel etiam $\frac{\partial f(x)}{f(x)\,\partial x}$; propositis inter duas variabiles x, y duabus aequationibus $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$, series, quibus radices x, y earumque potestates et producta exprimantur, erui ex evolutione singulari expressionis

$$\frac{f'(x)\,\varphi'(y)-f'(y)\,\varphi'(x)}{f\cdot\varphi};$$

propositis inter tres variabiles x, y, z tribus aequationibus

$$f(x, y, z)=0, \quad \varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0,$$

series, quibus radices x, y, z earumque dignitates et producta exprimantur, erui ex evolutione singulari expressionis

$$\frac{f(x)[\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y)]+f'(y)[\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z)]+f'(z)[\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x)]}{f\cdot\varphi\cdot\psi};$$

quae iam facile patet, quomodo ulterius continuentur.

Adnotare convenit, iam olim Ill. Lagrange in initio ipsius commentationis celeberrimae, qua theorema, quod ab eo nomen refert, condidit (*Hist. de l'Acad. de Berlin a.* 1768.), generationem illam seriei, per quam radix aequationis $f(x)=0$ exprimitur, animadvertisse, sed postea viam illam, qua theorema suum invenerat, dereliquisse. Namque et ipse et alii ejus, quam tum dederat, demonstrationis desiderabant rigorem. Aliis est principiis demonstratio nostra superstructa, quibus tamen magna intercedit similitudo cum iis, quibus sagacissimus Cauchy in calculo, quem vocavit residuorum, usus est. Attamen cum a nobis haud pauca adiecta, atque principia illa multo latius extensa adeoque ad resolutionem duarum

vel plurium aequationum plures variabiles involventium applicata sint, hoc ipsum ad calculum illum residuorum, quo tam feliciter autor uti solet, ulterius promovendum facere potest.

Quia vero in sequentibus seriebus, de quibus quaeritur, invenimus ut certarum expressionum certa quadam ratione evolutarum coëfficientes, notatione nobis opus erit, qua evolutionis propositae singuli coëfficientes exprimantur. Quem in finem eandem adhibebo, qua olim in commentatiuncula „de fractionibus simplicibus" (Berol. 1825) usus eram. Designante enim $f(x)$ functionem certa quadam ratione ad dignitates ipsius x evolutam, coëfficientem dignitatis x^n in ea evolutione designabo per characterem

$$[f(x)]_{x^n}.$$

Nec non functione plurium variabilium $f(x, y, z, \ldots.)$ ad dignitates earum evoluta, coëfficientem termini $x^m y^n z^p \ldots.$ designabo per characterem

$$[f(x, y, z, \ldots.)]_{x^m y^n z^p \ldots.}$$

Observari quidem potest, quoties functio evoluta nonnisi positivas integras variabilium contineat, in locum notationis nostrae usitatam differentialium notationem restitui posse. Eo enim casu fit e. g.

$$[f(x)]_{x^n} = \frac{\partial^n f(x)}{\Pi n . \partial x^n},$$

posito post differentiationem $x = 0$, et designante Πn productum $1.2.3 \ldots . n$. Idem locum habet, ubi $f(x)$ negativas adeo dignitates ipsius x continet, neque tamen in infinitum. Ubi enim functione ea per x^m multiplicata, dignitates omnes positivae evadunt, fit

$$[f(x)]_{x^n} = \frac{\partial^{m+n} . x^m f(x)}{\Pi(m+n) \partial x^{m+n}},$$

posito post differentiationem $x = 0$. Eadem de pluribus variabilibus valent. At in sequentibus etiam evolutiones, quae utrinque in infinitum excurrunt, considerabuntur, sive quae variabilium et positivas et negativas dignitates in infinitum continent, quarum coëfficientes per differentialium notationem exhiberi non possunt. Unde maxime ad notationem novam confugiendum erat.

Adnotandum autem est, in genere expressioni $[f(x)]_{x^n}$ certam notionem non subesse, nisi antea, quem evolutionis modum adhibere convenit, definitum erit. Fit enim, ut quoties de evolutione functionis agitur, cuius argumentum pluribus nominibus seu terminis constat, veluti

$\frac{1}{a+b+c+\dots}$, $\log(a+b+c+\dots)$, aliam aliamque seriem eruas, ubi secundum alius nominis $a, b, c, \dots$ dignitates descendentes evolutionem instituis. Unde nisi definito evolutionis modo coëfficientes determinatae non erunt. Iis casibus, ut ipse adspectus doceat, quem evolutionis modum adhibere placet, nomen illud, secundum cuius dignitates descendentes evolutionem fieri supponitur, primum ordine exhibebo, sicuti in commentatione anteriore „de singulari discerptione fractionum etc." fecimus. Interim tamen, ubi commodum judicabitur, quem evolutionis modum adhibere conveniat, diserte adiicietur.

Jam principia, de quibus diximus, sequentibus lemmatibus exponemus.

Lemma I.

Ponamus functionem $f(x)$ certo quodam modo evolutam alios terminos non continere, nisi qui ipsius x dignitates sint neque igitur logarithmum ipsius x; differentiale eius $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ termino $\frac{1}{x}$ carebit, quippe qui nonnisi e differentiatione termini $\log x$ provenire potuisset, qui in $f(x)$ non invenitur. Erit igitur

$$1.\qquad \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = 0,$$

unde etiam, posito $\frac{1}{m+1} f(x)^{m+1}$ loco $f(x)$:

$$2.\qquad \left[f(x)^m \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = 0.$$

Formula 2. exceptionis casum habet, qui considerationem sibi peculiarem poscit, casum quo $m = -1$. Quaeramus igitur coëfficientem ipsius $\frac{1}{x}$ in expressione

$$\frac{\partial f(x)}{f(x)\,\partial x} = \frac{\partial \log f(x)}{\partial x}.$$

Sit terminus ipsius $f(x)$, secundum cuius dignitates descendentes $\log f(x)$ evolvatur, $a_\mu x^\mu$ et ponatur:

$$f(x) = a_\mu x^\mu (1+U),$$

unde

$$\frac{\partial \log f(x)}{\partial x} = \frac{\mu}{x} + \frac{\partial \log(1+U)}{\partial x}.$$

Jam expressio

$$\log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \frac{U^4}{4} + \dots$$

e solis dignitatibus ipsius x constat, unde

$$\left[\frac{\partial \log(1+U)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = 0,$$

ideoque

$$3.\quad \left[\frac{\partial \log f(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = \left[\frac{\partial f(x)}{f(x)\,\partial x}\right]_{x^{-1}} = \mu.$$

Videmus igitur, ubi dignitates functionis $f(x)$ secundum dignitates descendentes termini $a_\mu x^\mu$ evolvantur, quem ponimus unum esse e terminis ipsius $f(x)$, in expressione

$$f(x)^m \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

coëfficientem termini $\frac{1}{x}$ esse $=0$ sive expressionem illam termino $\frac{1}{x}$ omnino carere, nisi sit $m=-1$, quo casu terminus $\frac{1}{x}$ coëfficientem nanciscitur μ.

In applicationibus huius lemmatis, quas infra faciemus ad resolutionem aequationis per series, erit terminus, secundum cuius dignitates descendentes evolutio instituenda est, ax sive prima potestas variabilis; quo igitur casu statuemus:

$$\left[\frac{\partial f(x)}{f(x)\,\partial x}\right]_{x^{-1}} = 1.$$

Ponamus $F(x)$ esse aliam functionem, quae evoluta et ipsa e solis dignitatibus ipsius x constet, erit e 1.:

$$\left[\frac{\partial\,.\,F(x)f(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = 0,$$

ideoque

$$4.\quad \left[F(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}} = -\left[f(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right]_{x^{-1}},$$

sive generalius

$$5.\quad \left[F(x)\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right]_{x^{-1}} = (-1)^n\left[f(x)\frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n}\right]_{x^{-1}},$$

qua formula interdum commode uteris.

Lemma II.

Ponamus, functiones $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ certo quodam modo evolutas alios terminos non continere nisi qui ipsarum x, y dignitates dignitatumque producta sint, ideoque carere terminis $\log x$, $\log y$: sequitur e lemmate I., in expressionibus

$$\frac{\partial\,.\,[\varphi f'(x)]}{\partial y},\quad \frac{\partial\,.\,[\varphi f'(y)]}{\partial x}\ *)$$

*) Ubi commodum duco, differentialium partialium notationem, quam Ill. Lagrange proposuit, adhibebo.

in altera terminos in $\frac{1}{y}$ ductos, in altera terminos in $\frac{1}{x}$ ductos deficere; unde in neutra invenietur terminus $\frac{1}{xy}$. Quarum igitur differentia quoque

$$\frac{\partial.[\varphi f'(x)]}{\partial y}-\frac{\partial.[\varphi f'(y)]}{\partial x}=f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(y)$$

cum termino $\frac{1}{xy}$ carent, eruimus theorema novum ac memorabile:

$$6.\qquad [f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)]_{x^{-1}y^{-1}}=0.$$

Unde etiam, posito $\frac{1}{m+1}f^{m+1}$, $\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}$ loco f, φ, sequitur:

$$7.\qquad \{f^m\varphi^n[f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)]\}_{x^{-1}y^{-1}}=0.$$

Quae formula exceptionis casum habet, ubi $m=-1$, $n=-1$, qui seorsim examinandus est.

Ac primum observo, ubi alter tantum numerus e. g. $m=-1$, formulam 7. non mutari, sive etiam expressionem

$$f^{-1}\varphi^n[f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)]=\varphi^n\left[\frac{\partial\log f}{\partial x}\varphi'(y)-\frac{\partial\log f}{\partial y}\varphi'(x)\right]$$

termino $\frac{1}{xy}$ carere. Ponamus enim, esse $\alpha x^\mu y^\nu$ terminum ipsius $f(x,y)$, secundum cuius dignitates descendentes dignitates vel logarithmus eius evolvantur, continebit $\log f(x,y)$ terminos logarithmicos $\mu\log x+\nu\log y$; e differentialibus autem $\frac{f'(x)}{f}$, $\frac{f'(y)}{f}$ abeunt logarithmi, unde etiam expressiones

$$f^{-1}\varphi^{n+1}f'(x),\quad f^{-1}\varphi^{n+1}f'(y)$$

e solis dignitatibus et productis ipsarum x, y constant. Hinc sequitur, in differentialibus earum

$$\frac{\partial.[f^{-1}\varphi^{n+1}f'(x)]}{\partial y},\quad \frac{\partial.[f^{-1}\varphi^{n+1}f'(y)]}{\partial x}$$

respective terminos in $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ductos deficere; unde neutra habebit terminum $\frac{1}{xy}$, ideoque nec differentia earum

$$(n+1)f^{-1}\varphi^{n+1}[f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)],$$

sive erit:

$$8.\qquad \{f^{-1}\varphi^{n+1}[f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)]\}_{x^{-1}y^{-1}}=0,$$

quod demonstrandum erat.

Jam vero videamus, quaenam evadat formula 7., ubi simul $m=-1$, $n=-1$, sive quaeramus coëfficientem termini $\frac{1}{xy}$ in expressione

$$\frac{f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)}{f.\varphi}=\frac{\partial\log f}{\partial x}.\frac{\partial\log\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\log f}{\partial y}.\frac{\partial\log\varphi}{\partial x}.$$

Ponamus, esse $a x^{\mu} y^{\nu}$, $b x^{\mu'} y^{\nu'}$ terminos ipsarum $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, secundum quorum dignitates descendentes potestates earum et logarithmi evolvantur, ac sit:

$$f(x, y) = a x^{\mu} y^{\nu}(1+U), \quad \varphi(x, y) = b x^{\mu'} y^{\nu'}(1+V).$$

Ponatur porro brevitatis causa

$$L = \log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \ldots,$$

$$M = \log(1+V) = V - \frac{V^2}{2} + \frac{V^3}{3} - \ldots,$$

quae expressiones e solis dignitatibus ipsarum x, y constant: invenitur

$$\frac{\partial \log f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \log f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\mu}{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\right)\left(\frac{\nu'}{y} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\nu}{y} + \frac{\partial L}{\partial y}\right)\left(\frac{\mu'}{x} + \frac{\partial M}{\partial x}\right).$$

In aequationis dextra parte, uncis solutis, inveniuntur expressiones

$$\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{1}{x}\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{x}\frac{\partial M}{\partial y},$$

quae ex theorematibus antecedentibus termino $\frac{1}{xy}$ carent omnes, unde in expressione antecedente coëfficientem ipsius $\frac{1}{xy}$ nanciscimur simpliciter $\mu\nu' - \mu'\nu$; sive fit:

$$9. \quad \left[\frac{\partial \log f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \log f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = \left[\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

$$= \mu\nu' - \mu'\nu.$$

Videmus igitur, ubi dignitates functionum $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, quae e solis dignitatibus variabilium x, y constant, secundum dignitates descendentes terminorum

$$a x^{\mu} y^{\nu}, \quad b x^{\mu'} y^{\nu'}$$

evolvuntur, quos in functionibus illis inveniri supponimus, in expressione

$$f^m \varphi^n [f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]$$

coëfficientem termini $\frac{1}{xy}$ esse $= 0$, sive termino $\frac{1}{xy}$ eam omnino carere; nisi sit simul $m = -1$, $n = -1$, quo casu terminus $\frac{1}{xy}$ coëfficientem nanciscitur $\mu\nu' - \mu'\nu$.

In applicationibus huius theorematis, quas infra faciemus, evolutiones secundum dignitates descendentes terminorum $a x$, $b y$ instituentur,

quo igitur casu $\mu = \nu' = 1$, $\mu' = \nu = 0$ ideoque

$$\left[\frac{f'(x)\,\varphi'(y) - f'(y)\,\varphi'(x)}{f.\varphi}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = 1.$$

Assumta tertia functione $F(x, y)$, facile probatur, esse:

$$10.\quad F[f'(x)\,\varphi'(y) - f'(y)\,\varphi'(x)] = f'(x)\frac{\partial.[\varphi F]}{\partial y} - f'(y)\frac{\partial.[\varphi F]}{\partial x} - \frac{\partial.[f\varphi F'(y)]}{\partial x} + f\varphi.\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + f\varphi'(x)F'(y) + \varphi f'(y)F'(x).$$

Jam quoties $F(x, y)$ et ipsa e solis variabilium x, y dignitatibus constat, e theorematibus antecedentibus expressiones

$$f'(x)\frac{\partial.[\varphi F]}{\partial y} - f'(y)\frac{\partial.[\varphi F]}{\partial x},\quad \frac{\partial.[f\varphi F'(y)]}{\partial x}$$

termino $\frac{1}{xy}$ carent, unde e 10. prodit:

$$11.\quad \{F[f'(x)\,\varphi'(y) - f'(y)\,\varphi'(x)]\}_{x^{-1}y^{-1}} = \left[f\varphi.\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + f\varphi'(x)F'(y) + \varphi f'(y)F'(x)\right]_{x^{-1}y^{-1}},$$

cuius theorematis infra usus erit. Adnotandum, quoties F constans, abire 11. in 6.

Lemma III.

Ut similia eruamus de tribus functionibus, tres variabiles x, y, z involventibus, $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, adnotetur aequatio identica:

$$12.\quad \frac{\partial.[\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)]}{\partial x} + \frac{\partial.[\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z)]}{\partial y} + \frac{\partial.[\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x)]}{\partial z} = 0,$$

quam differentiationibus exactis facile probas. E qua, posito brevitatis causa

$$\nabla = f'(x)[\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)] + f'(y)[\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\varphi'(z)] + f'(z)[\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x)],$$

fluit sequens:

$$13.\quad \frac{\partial.f[\varphi'y\,\psi'z - \varphi'z\,\psi'y]}{\partial x} + \frac{\partial.f[\varphi'z\,\psi'x - \varphi'x\,\psi'z]}{\partial y} + \frac{\partial.f[\varphi'x\,\psi'y - \varphi'y\,\psi'x]}{\partial z} = \nabla.$$

Ponamus, in functione $f(x, y, z)$ evoluta praeter dignitates ipsarum x, y, z alios terminos non inveniri, ideoque eam et a logarithmis earum vacuam esse; porro duas reliquas functiones $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ evolutas sive et ipsas solis dignitatibus variabilium x, y, z constare, sive praeter illas adhuc continere terminos logarithmicos

$$\mu'\log x + \nu'\log y + \varpi'\log z,\quad \mu''\log x + \nu''\log y + \varpi''\log z,$$

designantibus μ', ν' etc. constantes. Patet, expressiones certe

$$\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y),\quad \varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z),\quad \varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x)$$

a logarithmis vacuas esse, ideoque etiam expressionum

$$\frac{\partial . f(\varphi' y\,\psi' z-\varphi' z\,\psi' y)}{\partial x},\quad \frac{\partial . f(\varphi' z\,\psi' x-\varphi' x\,\psi' z)}{\partial y},\quad \frac{\partial . f(\varphi' x\,\psi' y-\varphi' y\,\psi' x)}{\partial z},$$

primam terminis in $\frac{1}{x}$, secundam in $\frac{1}{y}$, tertiam in $\frac{1}{z}$ ductis carere; unde earum nulla continebit terminum $\frac{1}{xyz}$, ideoque nec summa earum, quam e 13. vidimus esse $=\nabla$. Nanciscimur igitur theorema fundamentale:

$$14.\quad [\nabla]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = 0.$$

Ponamus iam, etiam primam functionem $f(x, y, z)$ terminos logarithmicos continere $\mu\log x+\nu\log y+\varpi\log z$, designantibus μ, ν, ϖ constantes, ita ut posito

$$f(x, y, z) = \mu\log x+\nu\log y+\varpi\log z+U,$$

U solis variabilium x, y, z dignitatibus constet. Qua expressione loco $f(x, y, z)$ substituta in ipsa ∇, fit $\nabla =$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\varphi' y\,\psi' z-\varphi' z\,\psi' y)+\frac{\partial U}{\partial y}(\varphi' z\,\psi' x-\varphi' x\,\psi' z)+\frac{\partial U}{\partial z}(\varphi' x\,\psi' y-\varphi' y\,\psi' z)$$

$$+\frac{\mu}{x}(\varphi' y\,\psi' z-\varphi' z\,\psi' y)+\frac{\nu}{y}(\varphi' z\,\psi' x-\varphi' x\,\psi' z)+\frac{\varpi}{z}(\varphi' x\,\psi' y-\varphi' y\,\psi' z).$$

Jam e 14. pars prima huius expressionis

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\varphi' y\,\psi' z-\varphi' z\,\psi' y)+\frac{\partial U}{\partial y}(\varphi' z\,\psi' x-\varphi' x\,\psi' z)+\frac{\partial U}{\partial z}(\varphi' x\,\psi' y-\varphi' y\,\psi' z)$$

termino $\frac{1}{xyz}$ caret; porro e lemmate II. facile obtinemus, in expressionibus

$$\varphi'(y)\psi' z-\varphi' z\,\psi' y,\quad \varphi' z\,\psi' x-\varphi' x\,\psi' z,\quad \varphi' x\,\psi' y-\varphi' y\,\psi' x$$

coëfficientes terminorum $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{zx}$, $\frac{1}{xy}$ respective esse

$$\nu'\varpi''-\nu''\varpi',\quad \varpi'\mu''-\varpi''\mu',\quad \mu'\nu''-\mu''\nu',$$

unde prodit theorema, *siquidem functiones* f, φ, ψ *evolutae praeter dignitates variabilium* x, y, z *adhuc contineant terminos logarithmicos*

$$\mu\log x+\nu\log y+\varpi\log z,\quad \mu'\log x+\nu'\log y+\varpi'\log z,$$
$$\mu''\log x+\nu''\log y+\varpi''\log z,$$

fore

$$15.\quad [\nabla]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = \mu(\nu'\varpi''-\nu''\varpi')+\nu(\varpi'\mu''-\varpi''\mu')+\varpi(\mu'\nu''-\mu''\nu').$$

Rursus ponamus, functiones $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, certo quodam modo evolutas solis variabilium x, y, z dignitatibus constare, earumque dignitates et logarithmos ad dignitates descendentes terminorum

$$a x^{\mu} y^{\nu} z^{\varpi}, \quad b x^{\mu'} y^{\nu'} z^{\varpi'}, \quad c x^{\mu''} y^{\nu''} z^{\varpi''},$$

qui in iis inveniri supponuntur, evolvi: logarithmi earum evoluti praeter dignitates variabilium continebunt terminos

$$\mu \log x + \nu \log y + \varpi \log z, \quad \mu' \log x + \nu' \log y + \varpi' \log z,$$
$$\mu'' \log x + \nu'' \log y + \varpi'' \log z.$$

Hinc ubi in ipsa ∇ loco f, φ, ψ substituimus vel f^m, φ^n, ψ^p vel $\log f$, $\log \varphi$, $\log \psi$, e 14., 15. fluit theorema, siquidem non simul $m = n = p = 1$, fieri

$$16. \quad [f^m \varphi^n \psi^p . \nabla]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}} = 0;$$

quoties vero simul $m = n = p = -1$, fieri

$$17. \quad \left[\frac{\nabla}{f \varphi \psi}\right]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}} = \mu(\nu' \varpi'' - \nu'' \varpi') + \nu(\varpi' \mu'' - \varpi'' \mu') + \varpi(\mu' \nu'' - \mu'' \nu').$$

In applicationibus, quas infra faciemus, evolutiones ad dignitates descendentes terminorum ax, by, cz instituentur, quo igitur casu $\mu = \nu' = \varpi'' = 1$, reliqui autem $\mu' = \mu'' = \nu'' = \nu = \varpi = \varpi' = 0$, ideoque

$$\left[\frac{\nabla}{f \varphi \psi}\right]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}} = 1.$$

Ut formulae 11. lemmatis II. similem eruam, assumta quarta functione $F(x, y, z)$, quae et ipsa solis variabilium dignitatibus constat, transformo expressionem $[F . \nabla]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}}$ in aliam $[P]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}}$, in qua P differentialia functionis f secundum x, functionis φ secundum y, functionis ψ secundum z sumta non contineat. Quod transigitur hunc in modum. Posito enim fF loco f in expressione ipsius ∇, formula 14. in hanc abit:

$$[F . \nabla]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}} = -[fF'(x)(\varphi' y \psi' z - \varphi' z \psi' y) + fF'(y)(\varphi' z \psi' x - \varphi' x \psi' z)$$
$$+ fF'(z)(\varphi' x \psi' y - \varphi' y \psi' x)]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}}.$$

Porro e 11. sequitur:

$$[fF'(x)(\varphi' y \psi' z - \varphi' z \psi' y)]_{y^{-1} z^{-1}} =$$
$$\left[\varphi \psi \frac{\partial^2 . [fF'(x)]}{\partial y \partial z} + \varphi \psi'(y) \frac{\partial . [fF'(x)]}{\partial z} + \psi \varphi'(z) \frac{\partial . [fF'(x)]}{\partial y}\right]_{y^{-1} z^{-1}};$$

nec non e 4.:

$$-[fF'(y) \varphi'(x) \psi'(z)]_{z^{-1}} = \left[\psi \frac{\partial . [fF'(y) \varphi'(x)]}{\partial z}\right]_{z^{-1}}$$
$$-[fF'(z) \varphi'(y) \psi'(x)]_{y^{-1}} = \left[\varphi \frac{\partial . [fF'(z) \psi'(x)]}{\partial y}\right]_{y^{-1}}.$$

Quibus in aequationem superiorem substitutis, prodit:

$$-[F.\nabla]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi\psi\dfrac{\partial^2.[fF'x]}{\partial y\,\partial z}+\varphi\psi'y\dfrac{\partial.[fF'x]}{\partial z}+\psi\varphi'z\dfrac{\partial.[fF'x]}{\partial y} \\ +\psi\dfrac{\partial.[fF'y\,\varphi'x]}{\partial z}+\varphi\dfrac{\partial.[fF'z\,\psi'x]}{\partial y}+fF'y\,\varphi'z\,\psi'x+fF'z\,\varphi'x\,\psi'y \end{array}\right\}_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}.$$

Quae formula facile in hanc abit:

$$18. \qquad -[F.\nabla]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} f\varphi\psi\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \\ +f\dfrac{\partial.[\varphi\psi]}{\partial x}\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}+\varphi\dfrac{\partial.[\psi f]}{\partial y}\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}+\psi\dfrac{\partial.[f\varphi]}{\partial z}\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \\ +F'x\left[\varphi\psi\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+\varphi\psi'y\,f'z+\psi\varphi'z\,f'y\right] \\ +F'y\left[\psi f\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}+\psi f'z\,\varphi'x+f\psi'x\,\varphi'z\right] \\ +F'z\left[f\varphi\,\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+f\varphi'x\,\psi'y+\varphi f'y\,\psi'x\right] \end{array}\right\}_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}.$$

E formulis 11., 18. videbimus infra theoremata, quae Ill. Laplace de resolutione duarum aequationum inter duas, trium inter tres variabiles propositarum olim exhibuit, sponte demanare, quas igitur hoc loco antemittere placuit, quo facilius nostra cum illius inventis conciliari possint.

Indicata via, quae de duabus, tribus functionibus eruimus, ad maiorem functionum numerum facile extenduntur.

De reversione serierum,
sive resolutione aequationis propositae per series infinitas.

Lemmatum traditorum primam applicationem ad casum simplicissimum ac saepius tractatum faciamus, quo de radice aequationis propositae in seriem evolvenda quaeritur. Videbimus, ex evolutione logarithmi ipsius expressionis, quae nihilo aequatur, certa quadam ratione instituta, seriem quaesitam eiusque et potestates et logarithmos profluere, quippe quae in evolutione illa ut coëfficientes invenientur.

Quaestio de radice aequationis in seriem evolvenda omnibus casibus ad reversionem serierum revocari potest, qua id agitur, ut proposita serie

$$X = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots\dots,$$

alia indagetur series, qua vice versa x per X exprimatur:

$$x = b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + \dots\dots,$$

unde proposita aequatione

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots,$$

invenitur radix

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots.$$

Aequatione identica

$$x = b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + \dots,$$

differentiata et post differentiationem per X^n divisa, obtinetur:

$$\frac{1}{X^n} = \frac{\partial X}{\partial x}\left[\frac{b_1}{X_n} + \frac{2b_2}{X^{n-1}} + \frac{3b_3}{X^{n-2}} + \dots + \frac{nb_n}{X} + (n+1)b_{n+1} + \dots\right].$$

Evolvamus in hac aequatione singulas dignitates ipsius X ad dignitates ascendentes ipsius x ideoque ad dignitates descendentes termini $a_1 x$, qui in ipsa X invenitur: sequitur e lemmate I., in altera parte aequationis, dictum in modum evoluta, terminum $\frac{1}{x}$ nonnisi in expressione $n b_n \frac{\partial X}{X \partial x}$ inveniri; porro ex eodem lemmate fit

$$\left[\frac{\partial X}{X \partial x}\right]_{x^{-1}} = 1,$$

unde iam

$$\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^{-1}} = n b_n, \text{ sive } b_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^{-1}}.$$

Quae est determinatio generalis coëfficientium evolutionis quaesitae.

Eadem omnino methodo, posito

$$x^m = y^m [\overset{m}{b}_1 + \overset{m}{b}_2 y + \overset{m}{b}_3 y^2 + \overset{m}{b}_4 y^3 + \dots],$$

coëfficientes $\overset{m}{b}_n$ determinas. Differentiata enim aequatione, quae identica fieri debet,

$$x^m = \overset{m}{b}_1 X^m + \overset{m}{b}_2 X^{m+1} + \overset{m}{b}_3 X^{m+2} + \overset{m}{b}_4 X^{m+3} + \dots,$$

et post differentiationem divisione facta per X^{m+n-1}: altera pars aequationis e lemmate I. in unica expressione $(m+n-1)\overset{m}{b}_n \frac{\partial X}{X \partial x}$ terminum $\frac{1}{x}$ habet, unde fit:

$$\left[\frac{m x^{m-1}}{X^{m+n-1}}\right]_{x^{-1}} = (m+n-1)\overset{m}{b}_n \left[\frac{\partial X}{X \partial x}\right]_{x^{-1}} = (m+n-1)\overset{m}{b}_n,$$

sive cum generaliter sit:

$$[x^{m-1} f(x)]_{x^{-1}} = [f(x)]_{x^{-m}},$$

fit:

$$19. \quad \overset{m}{b}_n = \frac{m}{m+n-1}\left[\frac{1}{X^{m+n-1}}\right]_{x^{-m}}.$$

Quoties m est integer negativus et $n = -m+1$, quo casu 19., indeterminata evadit, in locum eius formulae haec substitui debet:

$$20. \quad \overset{-m}{b}_{m+1} = m\,[\log X]_{x^m},$$

quod facile probatur. Eadem porro methodo, posito

$$\log x = \log y + \log b_1 + \overset{0}{b}_1 y + \overset{0}{b}_2 y^2 + \overset{0}{b}_3 y^3 + \ldots,$$

invenitur:

$$21. \quad \overset{0}{b}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^0}.$$

Ubi m est integer positivus, sequitur e 19.:

$$\frac{x^m}{m} = \left[\frac{y^m}{m X^m} + \frac{y^{m+1}}{(m+1)X^{m+1}} + \frac{y^{m+2}}{(m+2)X^{m+2}} + \ldots\right]_{x^{-m}},$$

sive cum neque $\log X$, neque $\frac{1}{X}, \frac{1}{X^2}, \ldots \frac{1}{X^{m-1}}$ evolutae terminum x^{-m} contineant:

$$22. \quad \frac{x^m}{m} = -[\log(X-y)]_{x^{-m}}.$$

Ex eadem formula, collata 20., fit:

$$\frac{-1}{m x^m} = -\left[\frac{X^m}{m y^m} + \frac{X^{m-1}}{(m-1)y^{m-1}} + \ldots + \frac{X}{y} - \log X - \frac{y}{X} - \frac{y^2}{2X^2} - \ldots\right]_{x^m},$$

sive cum in X^{m+1}, X^{m+2}, ... nonnisi dignitates ipsius x altiores quam m^{ta} inveniantur:

$$23. \quad \frac{-1}{m x^m} = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^m}.$$

Porro ex 21. fit:

$$\log x = \log b_1 + \log y + \left[\frac{y}{X} + \frac{y^2}{2X^2} + \frac{y^3}{3X^3} + \ldots\right]_{x^0},$$

sive cum $\log b_1 = -\log a_1 = -[\log X]_{x^0}$:

$$24. \quad \log x = \log y - [\log(X-y)]_{x^0}.$$

In locum formularum 22., 24. substitui possunt hae:

$$25. \quad \frac{x^m}{m} = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^{-m}},$$

$$26. \quad \log x = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^0},$$

cum expressio $\log(y-X)$ positivas ipsius x dignitates omnino non contineat; unde formulam 25. valere videmus pro omnibus valoribus numeri m et positivis et negativis.

Quae ne praepostere intelligantur formulae, revocare placet, secundum ea, quae supra monuimus, pro diverso modo, quo binomium, cuius logarithmus evolvendus proponitur, scribatur sive $y-X$ sive $X-y$, nos denotare per expressiones $\log(y-X)$, $\log(X-y)$ series diversas

$$\log(y-X) = \log y - \frac{X}{y} - \frac{X^2}{2y^2} - \frac{X^3}{3y^3} - \frac{X^4}{4y^4} - \ldots,$$

$$\log(X-y) = \log X - \frac{y}{X} - \frac{y^2}{2X^2} - \frac{y^3}{3X^3} - \frac{y^4}{4X^4} - \ldots,$$

in quibus porro dignitates et logarithmus ipsius X ad dignitates ascendentes ipsius x evolvendae sunt. Quibus bene intellectis, docent formulae 25., 26. in eadem expressione $\log(y-X)-\log(X-y)$, dictum in modum evoluta, in qua evolutione praeter logarithmum ipsius x dignitates eius et positivae et negativae in infinitum inveniuntur, coëfficientes dignitatum negativarum exhibere dignitates positivas, dignitatum positivarum negativas, constantem logarithmum seriei, qua radix x aequationis $X=y$ exprimitur.

Ponatur

$$b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \ldots = Y,$$

ita ut ex aequatione $X=y$ fiat $x=Y$, e 25., 26. obtines aequationes identicas:

$$27. \quad \frac{Y^m}{m} = [\log(y-X)-\log(X-y)]_{x^{-m}},$$

$$28. \quad \log Y = [\log(y-X)-\log(X-y)]_{x^0}.$$

E quibus formulis, ubi evolutionem expressionis $\log(y-X)-\log(X-y)$ secundum dignitates ipsius x ordinas, invenis:

$$\log(y-X)-\log(X-y) = -\log x + \frac{Y}{x} + \frac{Y^2}{2x^2} + \frac{Y^3}{3x^3} + \ldots$$
$$+ \log Y - \frac{x}{Y} - \frac{x^2}{2Y^2} - \frac{x^3}{3Y^3} - \ldots$$

sive quod idem est:

$$29. \quad \log(y-X)-\log(X-y) = \log(Y-x)-\log(x-Y).$$

Quae formula mirae simplicitatis immutata manet, ubi x, X cum y, Y permutantur; quod pro reciprocitatis lege, quae inter aequationes $y=X$, $x=Y$ intercedit, cum ex illa haec, ex hac illa sequatur, locum habere debet. Quo rectius perspiciatur, quam notionem subesse volumus formulae 29., quae in hac theoria ut canonica spectari potest, proponamus eam ut

Theorema.

Proposita serie

$$X = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

sit

$$Y = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \ldots$$

series, quae e reversione propositae nascitur, ita ut posito $X=y$ fiat $Y=x$: erit identice:

$$\log(y-X)-\log(X-y) = \log(Y-x)-\log(x-Y),$$

sive:

$$\begin{aligned}&\log y-\frac{X}{y}-\frac{X^2}{2y^2}-\frac{X^3}{3y^3}-\dots\quad &&\log Y-\frac{x}{Y}-\frac{x^2}{2Y^2}-\frac{x^3}{2Y^3}-\dots\\ &-\log X+\frac{y}{X}+\frac{y^2}{2X^2}+\frac{y^3}{3X^3}+\dots = &&-\log x+\frac{Y}{x}+\frac{Y^2}{2x^2}+\frac{Y^3}{3x^3}+\dots,\end{aligned}$$

siquidem in aequationis parte prima singulae dignitates et logarithmus ipsius X ad ascendentes dignitates ipsius x, in parte secunda singulae dignitates et logarithmus ipsius Y ad ascendentes dignitates ipsius y evolvuntur. Quod docet theorema, in eadem evolutione expressionis

$$\log(y-X)-\log(X-y) = \log(Y-x)-\log(x-Y),$$

secundum dignitates elementi y ordinata, inveniri ut coëfficientes dignitates et logarithmum seriei propositae, secundum dignitates elementi x ordinata, dignitates et logarithmum seriei inversae.

Theorema curiosum, quod iam proposuimus, propter eam, qua gaudet, concinnitatem alia adhuc demonstratione maxime expedita comprobare operae pretium est.

Ponatur $X=f(x)$, atque evolvantur expressiones

$$\log(fx-fy) = \log fx-\frac{fy}{fx}-\frac{1}{2}\left(\frac{fy}{fx}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{fy}{fx}\right)^3-\dots$$

$$\log(fy-fx) = \log fy-\frac{fx}{fy}-\frac{1}{2}\left(\frac{fx}{fy}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{fx}{fy}\right)^3-\dots$$

ad descendentes dignitates ipsius a_1, unde altera $\log(fx-fy)$ solas positivas dignitates ipsius y, altera $\log(fy-fx)$ solas positivas dignitates ipsius x, neutra positivas ipsius a_1 continebit. Quibus conditionibus evolutionis ratio omnino definita est. Jam sit

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = a_1+a_2(x+y)+a_3(x^2+xy+y^2)+\dots = U,$$

erit

$$\log[f(x)-f(y)] = \log(x-y)+\log U = \log U+\log x-\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x^2}-\frac{y^3}{3x^3}-\dots$$

$$\log[f(y)-f(x)] = \log(y-x)+\log U = \log U+\log y-\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2y^2}-\frac{x^3}{3y^3}-\dots$$

In utraque expressione $\log U$ eodem modo evolvi debet, videlicet ad dignitates descendentes ipsius a_1, unde subductione facta prodit:

30. $\log(fx-fy)-\log(fy-fx) = \log(x-y)-\log(y-x).$

Jam in hac aequatione loco y substituatur Y, quo facto, cum sit $f(Y)=y$,

formula 30. in hanc abit:

$$\log(fx - y) - \log(y - fx) = \log(x - Y) - \log(Y - x),$$

quod, posito $fx = X$, est theorema demonstrandum.

Ponatur

$$F(x) = A + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + \dots$$
$$+ \frac{B'}{x} + \frac{B''}{x^2} + \frac{B'''}{x^3} + \dots$$

aequatione

$$\log(y - X) - \log(X - y) = \log(Y - x) - \log(x - Y),$$

multiplicata per $F(x)$ invenimus coëfficientem termini $\frac{1}{x}$:

$$AY + \tfrac{1}{2}A'Y^2 + \tfrac{1}{3}A''Y^3 + \tfrac{1}{4}A'''Y^4$$
$$+ B'\log Y - \frac{B''}{Y} - \tfrac{1}{2}\frac{B'''}{Y^2} - \dots,$$

sive

$$\{[\log(y - X) - \log(X - y)]F(x)\}_{x^{-1}} = \int F(Y)\,\partial Y,$$

vel posito $F(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$, cum sit $Y = x$:

$$31. \quad \varphi(x) = \{[\log(y - X) - \log(X - y)]\varphi'(x)\}_{x^{-1}}.$$

Ubi in $\varphi(x)$ invenitur constans, ea dextrae parti aequationis adiicienda erit.

Quoties $\varphi(x)$ solis positivis dignitatibus ipsius x constat, 31. simplicius ita exhibetur:

$$32. \quad \varphi(x) = \varphi(0) - [\varphi'(x)\log(X - y)]_{x^{-1}}.$$

Posito igitur

$$\varphi(x) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \dots,$$

fit $P = \varphi(0)$ atque

$$33. \quad P^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi'(x)}{X^n}\right]_x.$$

Sit aequatio proposita

$$\alpha - z + yf(z) = 0,$$

atque evolvatur $\psi(z)$ in seriem

$$\psi(z) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \dots$$

Posito $z = \alpha + x$, aequatio proposita abit in $y = \frac{x}{f(\alpha + x)}$, $\psi(z)$ in $\psi(\alpha + x)$; ubi igitur in 33. ponimus

$$X = \frac{x}{f(\alpha + x)}, \quad \varphi(x) = \psi(\alpha + x),$$

fit

$$P^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\frac{\psi'(\alpha + x)f(\alpha + x)^n}{x^n}\right]_{x^{-1}} = \frac{1}{n}[\psi'(\alpha + x)f(\alpha + x)^n]_{x^{n-1}},$$

sive e theoremate Tayloriano:

$$34. \quad P^{(n)} = \frac{\partial^{n-1}.[\psi'\alpha.f\alpha^n]}{\Pi n.\partial\alpha^n},$$

unde

$$35. \quad \psi(z) = \psi(\alpha) + y\psi'\alpha.f\alpha + \frac{y^2}{1.2}.\frac{\partial.[\psi'\alpha.f\alpha^2]}{\partial\alpha} + \frac{y^3}{2.3}.\frac{\partial^2.[\psi'\alpha.f\alpha^3]}{\partial\alpha^2} + \ldots,$$

quae est series **Lagrangiana**.

Non generalior est aequatio, quam Ill. **Laplace** sibi resolvendam proposuit:

$$z = F(\alpha + yfz),$$

quippe quae, posito $z = F(u)$ in formam supra adhibitam redit:

$$u = \alpha + yfF(u),$$

quod adnotare convenit.

Inventa functione generatrice seriei, qua radix aequationis propositae sive functio radicis exprimitur, id commodi nacti sumus, ut eadem expressio omnibus modis, quibus evolutionem ordinare placet, facile accommodetur, ideoque etiam casui maxime generali, quo proposita aequatione $f(x, y)$, functio $\psi(x, y)$ ad dignitates ipsius y evolvenda est. Data enim aequatione

$$0 = f(x, y)$$
$$= a'y + a''y^2 + \ldots + x(b + b'y + b''y^2 + \ldots) + x^2(c + c'y + c''y^2 + \ldots),$$

proponatur functio

$$\psi(x, y)$$
$$= A + A'y + A''y^2 + \ldots + x(B + B'y + B''y^2 + \ldots) + x^2(C + C'y + C''y^2 + \ldots)$$

in seriem evolvenda

$$\psi(x, y) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \ldots;$$

ut eruatur $P^{(n)}$, observo, e formulis nostris esse

$$36. \quad \psi(x, y) = \psi(0, y) - \left[\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\log f(x, y)\right]_{x^{-1}};$$

iam expressionibus $\psi(0, y)$, $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\log f(x, y)$ ad dignitates ipsius y evolutis, sint termini generales

$$A^{(n)}y^n, \quad T^{(n)}y^n,$$

erit

$$37. \quad P^{(n)} = A^{(n)} - [T^{(n)}]_{x^{-1}}.$$

Dedit olim Ill. **Laplace** in ipsa commentatione, qua seriem **Lagrangianam** primus rigorosa eaque elegantissima demonstratione munivit (Hist. Acad. Par. ad a. 1777), sive demonstratione theorema curiosum huc pertinens, quod cum attentionem Geometrarum fugisse videatur, ipsis autoris verbis apponam locum integrum. Postquam enim e consideratione aequationis $\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) = z\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, in qua z data functio ipsius x, resolutionem

aequationis $x = \varphi(a + \alpha z)$ adeoque plurium eiusmodi aequationum inter plures variabiles deduxerat, haec commentationi ad calcem adiicit.

„Consideratis aliis aequationibus ad differentias partiales inter x, α, t, per methodum praecedentem functionem quamlibet u ipsius x in seriem evolvere liceret, et invenirentur eo modo innumerae aequationes inter x et α, pro quibus evolutio ista succedit; at satis longe adhuc a solutione abessemus problematis generalis, quaecunque sit aequatio inter x et α proposita, functionem quamlibet ipsarum x et α, si fieri possit, ad dignitates integras positivas ipsius α evolvere. Quod ut resolvatur problema, iam theorema proponam propter eam, qua gaudet, et generalitatem et simplicitatem attentione Analystarum dignum."

„Sit $\varphi(x, \alpha) = 0$ aequatio inter x et α proposita, et u functio ipsius x et α in seriem evolvenda; posito $\alpha = 0$ abit aequatio proposita in $\varphi(x, 0) = 0$, qua resoluta habebuntur radices inter se diversae, quibus series diversae, in quas u evolvi potest, respondent; sit $x - a = 0$ una e radicibus illis, expressio $\varphi(x, 0)$ factorem habebit potestatem positivam ipsius $x - a$, quam ponimus esse $(x - a)^i$; quibus statutis, ubi nominatur $\alpha^n . q_n$ terminus generalis evolutionis functionis u, quae radici $x - a = 0$ respondet: erit

$$q_n = \frac{\partial^n u}{1.2.3\ldots.n\,\partial\alpha^n} - \frac{\partial^{n-1}.\left\{(x-a)^n \dfrac{\partial^n.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\log\varphi(x,\alpha)\right)}{1.2.3\ldots.n\,\partial\alpha^n}\right\}}{1.2.3\ldots.(n-1)\,\partial x^{n-1}},$$

siquidem in altera parte aequationis 1°. binae variabiles x et α ut independentes considerantur, 2° post differentiationes secundum α factas ponitur $\alpha = 0$ et post differentiationes omnes $x = a$."

Hoc theorema per formulam nostram 37. facile probatur casu quo $i = 1$; casu vero quo i non $= 1$, invenitur idem egregie falsum esse. Eo enim casu factori $(x - a)^i$ respondent i radices aequationis $\varphi(x, \alpha) = 0$ inter se diversae nec nisi posito $\alpha = 0$ inter se aequales; neque formula ab Ill. Laplace apposita ad functionem unius radicis, sed ad summam functionum, quae singulis illis i radicibus respondent, pertinet. Locus ille hunc in modum emendandus erit.

„Sint radices aequationis $\varphi(x, \alpha) = 0$, quae factori $(x - a)^i$ respondent, $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_i$; porro valores, quos functio u induit, posito $x = x_1, x_2, \ldots . x_i$, sint $u_1, u_2, \ldots . u_i$; siquidem ponimus

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i = \Sigma q_n \alpha^n,$$

erit:

$$38. \quad q_n = \frac{i\,\partial^n u}{\Pi n\, \partial \alpha^n} - \frac{\partial^{in-1}.\left\{(x-a)^{in}\,\dfrac{\partial^n.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\log\varphi(x,\alpha)\right)}{\Pi n\,\partial\alpha^n}\right\}}{\Pi(in-1)\,\partial x^{in-1}},$$

post differentiationes transactas posito $\alpha = 0$, $x = a$."

Demonstrationem huius theorematis hoc loco praetermitto.

Per formulam nostram 37. facile etiam problema resolvitur, data aequatione $\varphi(x, y) = 0$, ubi y ut functionem ipsius x spectemus, exhibere generaliter n^{tum} differentiale functionis $\psi(x, y)$; fit enim, ubi simpliciter $\psi(x, y) = y$:

$$39. \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = -\frac{\partial^{n-1}.\left(i^n.\dfrac{\partial^n.\log\varphi(x+h, y+i)}{\partial h^n}\right)}{\Pi(n-1)\,\partial i^{n-1}},$$

post differentiationes posito $h=0$, $i=0$; sive generalius, ubi $\psi^{(n)} = \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}\right)$, $\psi_1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$:

$$40. \quad \frac{\partial^n \psi(x, y)}{\partial x^n} = \psi^{(n)} - \frac{\partial^{n-1}.\left(i^n.\dfrac{\partial^n.\psi_1(x+h, y+i)\log\varphi(x+h, y+i)}{\partial h^n}\right)}{\Pi(n-1)\,\partial i^{n-1}},$$

post differentiationes posito $h = 0$, $i = 0$. E quibus formulis per regulas notas facile deducis formationes combinatorias sive terminorum formationem, quibus expressio quaesita constat, et numeros, qui terminos illos afficiunt.

De resolutione duarum aequationum inter duas variabiles propositarum per series infinitas.

Datis aequationibus inter duas variabiles:

$$\tau = a'x + a_1 y + a''x^2 + a'_1 xy + a_{11} y^2 + \dots.$$
$$v = b'x + b_1 y + b''x^2 + b'_1 xy + b_{11} y^2 + \dots,$$

ponendo

$$b_1 a_n^{(m)} - a_1 b_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)}, \quad a' b_n^{(m)} - b' a_n^{(m)} = \beta_n^{(m)}, \quad a' b_1 - a_1 b' = \triangle,$$
$$b_1 \tau - a_1 v = t, \quad a' v - b'\tau = u,$$

transformo eas in has simpliciores:

$$t = \triangle x + \alpha'' x^2 + \alpha'_1 xy + \alpha_{11} y^2 + \alpha''' x^3 + \dots.$$
$$u = \triangle y + \beta'' x^2 + \beta'_1 xy + \beta_{11} y^2 + \beta''' x^3 + \dots.$$

Jam ubi functio radicum $f(x, y)$ evolvenda est in seriem

$$f(x, y) = \Sigma\, C_n^{(m)} t^m u^n,$$

posito

$$X = \triangle x + \alpha'' x^2 + \alpha'_1 xy + \alpha_{,,} y^2 + \alpha''' x^3 + \dots$$
$$Y = \triangle y + \beta'' x^2 + \beta'_1 xy + \beta_{,,} y^2 + \beta''' x^3 + \dots$$

fieri debet identice

$$f(x,y) = \Sigma C_n^{(m)} X^m Y^n,$$

quod determinationem coëfficientium $C_n^{(m)}$ suggerit. Quarum expressionem generalem per lemma II. ita invenio.

Posito enim brevitatis causa $X' = \frac{\partial X}{\partial x}$, $X_1 = \frac{\partial X}{\partial y}$, $Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial y}$, in evolutione expressionis $\frac{X'Y_1 - X_1 Y'}{X^m Y^n}$ secundum dignitates descendentes ipsius $\triangle$ instituta, inveniuntur elementorum x, y et positivae et negativae dignitates, neque tamen, uti in lemmate II. vidimus, terminus $\frac{1}{xy}$, nisi sit simul $m=1$, $n=1$, eo autem casu, in eo lemmate vidimus, ipsius $\frac{1}{xy}$ coëfficientem esse $=1$. Itaque multiplicata aequatione identica

$$f(x,y) = \Sigma C_n^{(m)} X^m Y^n$$

per expressionem

$$\frac{X' Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{q+1}},$$

e lemmate II. in altera aequationis parte terminus $\frac{1}{xy}$ non invenietur nisi in ea expressione, in qua $m=p$, $n=q$, quae fit

$$C_q^{(p)} . \frac{X' Y_1 - X_1 Y'}{XY},$$

in qua porro ex eodem lemmate termini $\frac{1}{xy}$ coëfficientem habes $C_q^{(p)}$. Unde iam:

$$41. \quad C_q^{(p)} = \left[f(x,y) \frac{X' Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{q+1}} \right]_{x^{-1} y^{-1}}.$$

Qua formula generali completa problematis solutio continetur.

Ubi $f(x,y) = x^m y^n$, 41. facile in hanc formulam abit:

$$42. \quad C_q^{(p)} = \left[\frac{X' Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{q+1}} \right]_{x^{-(m+1)} y^{-(n+1)}}.$$

Ut exemplum adsit, quomodo e formulis traditis formatio combinatoria termini generalis evolutionis quaesitae inveniatur, formationem ipsius $C_q^{(p)}$ in 42., qualem formula illa suggerit, indicabo.

Apparebit primum, $C_q^{(p)}$ formam induere:

$$C_q^{(p)} = \frac{A}{\triangle^{p+q}} - \frac{A_1}{\triangle^{p+q+1}} + \frac{A_2}{\triangle^{p+q+2}} - \dots \pm \frac{A_{p+q-m-n}}{\triangle^{2p+2q-m-n}},$$

in quibus A_λ functio integra positiva coëfficientium aequationum propositarum α'', α'_1, $\alpha_{,,}$, ... β'', β'_1, ... Sit terminus ipsius A_λ

$$(\alpha_{r_{\prime}}^{r'})^{\mu'}(\alpha_{r_{\prime\prime}}^{r''})^{\mu''}\dots\dots(\beta_{s_{\prime}}^{s'})^{\nu'}(\beta_{s_{\prime\prime}}^{s''})^{\nu''}\dots\dots,$$

fieri debet:

$$\mu'+\mu''+\dots\dots+\nu'+\nu''+\dots\dots=\lambda;$$

porro posito

$$\mu'+\mu''+\dots\dots=a,\quad \nu'+\nu''+\dots\dots=b,\quad \text{unde } a+b=\lambda,$$
$$\mu'r'+\mu''r''+\dots\dots=M,\quad \nu's'+\nu''s''+\dots\dots=N,$$
$$\mu'r_{\prime}+\mu''r_{\prime\prime}+\dots\dots=M',\quad \nu's_{\prime}+\nu''s_{\prime\prime}+\dots\dots=N',$$

fieri debet:

$$M+N=p+a-m,\quad M'+N'=q+b-n.$$

Coëfficientem autem numericum nancisceris:

$$(nN+mM'+mn)\frac{\Pi(p+a-1)\,\Pi(q+b-1)}{\Pi p\,\Pi q}\cdot\frac{\Pi a}{\Pi\mu'\,\Pi\mu''\dots\dots}\cdot\frac{\Pi b}{\Pi\nu'\,\Pi\nu''\dots\dots}.$$

Simul autem in ipsa A_λ términos omnes invenis, qui conditionibus assignatis satisfaciunt.

Observo, ubi formas pleniores adhibuissemus

$$\tau=a'x+a_{\prime}y+a''x^2+a'_1xy+a_{\prime\prime}y^2+\dots\dots$$
$$v=b'x+b_{\prime}y+b''x^2+b'_1xy+b_{\prime\prime}y^2+\dots\dots,$$

formulam nostram generalem

$$C_q^{(p)}=\left[f(x,y)\frac{X'Y_1-X_1Y'}{X^{p+1}\,Y^{q+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

adhuc locum habuisse, siquidem expressio

$$\frac{1}{X^{p+1}\,Y^{q+1}}$$

ad dignitates descendentes elementorum a', $a_{\prime}$ evoluta fuisset; tum vero $C_q^{(p)}$ e pluribus seriebus infinitis compositam fuisse, quae ex evolutione expressionis

$$\frac{1}{(a'x+a_{\prime}y)^m}\cdot\frac{1}{(b_{\prime}y+b'x)^n},$$

ad descendentes dignitates ipsarum a', $b_{\prime}$ instituta, ortum ducunt. Quas in commentatione „de discerptione singulari etc." vidimus omnes summari posse per fractiones, quarum denominatores eiusdem quantitatis $\triangle=a'b_{\prime}-a_{\prime}b'$ dignitates sunt. Cui igitur summationi per transformationem aequationum propositarum indicatam, qua in terminis primae dimensionis altera variabilis tollitur, omnino supersedemus, et via directa expressionem ipsius $C_q^{(p)}$ in terminis finitis obtinemus. Ceterum idem assequeris, ubi loco x, y variabiles ξ, v inducis, ponendo

$$x=b_{\prime}\xi-a_{\prime}v,\quad y=a'v-b'\xi,$$

unde termini lineares fiunt

$$a'x+a_{\prime}y=\triangle\xi,\quad b'x+b_{\prime}y=\triangle v.$$

Docet formula nostra generalis 41., termini generalis evolutionis quaesitae

$$C_q^{(p)} t^p u^q$$

functionem generatricem esse

$$f(x,y)\frac{X'Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{q+1}} t^p u^q;$$

cuius formulae ope facile etiam totius seriei, qua $f(x,y)$ exprimitur, functionem generatricem assignas. Ubi enim evolutio quaesita nonnisi positivas dignitates ipsarum t, u continet, tribuendo numeris p, q valores omnes a 0 usque ad ∞ obtines:

$$43.\quad f(x,y) = \left[f(x,y)\frac{X'Y_1 - X_1 Y'}{(X-t)(Y-u)}\right]_{x^{-1}y^{-1}}.$$

Quoties vero evolutio etiam dignitatibus negativis ipsarum t, u affecta est, poni debet, quae formula etiam illum casum amplectitur:

$$44.\quad f(x,y) = \left[f(x,y)(X'Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-1}y^{-1}},$$

ubi e more nostro per expressionem

$$\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)$$

denotamus seriem utrinque infinitam

$$\Sigma\frac{t^p u^q}{X^{p+1} Y^{q+1}},$$

tributis numeris p, q valores omnes a $-\infty$ ad $+\infty$. (Conf. comm. supra cit.) Posito $f(x,y) = x^m y^n$, fit e 44.:

$$45.\quad x^m y^n = \left[(X'Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-(m+1)}y^{-(n+1)}}.$$

Inventa seriei quaesitae functione generatrice, id commodi nacti sumus, ut iam eadem expressio omnibus modis accommodari possit, quibus evolutionem functionis radicum ordinare placet. Sint enim coëfficientes aequationum propositarum $X - t = 0$, $Y - u = 0$ et ipsae functiones aliarum variabilium v, w, ubi functionem radicum, quae et ipsa variabiles v, w involvit, $\varphi(x,y,v,w)$, secundum dignitates ipsarum v, w evolvere placet, evolvatur functio generatrix secundum has ipsas variabiles; quo facto, ubi terminus generalis illius evolutionis est

$$P_q^{(p)} v^p w^q,$$

in quo $P_q^{(p)}$ solas variabiles x, y continet, erit terminus generalis evolutionis quaesitae

$$[P_q^{(p)}]_{x^{-1}y^{-1}} \cdot v^p w^q.$$

Quae est solutio problematis maxime generalis, datis aequationibus

$$\varphi(x, y, v, w) = 0, \quad \psi(x, y, v, w) = 0,$$

functionem $f(x, y, v, w)$ in seriem secundum dignitates ipsarum v, w progredientem evolvere.

Sint series, quibus radices x, y exprimuntur:

$$x = T, \quad y = U,$$

quibus loco x, y in formula 45. substitutis, obtinetur aequatio identica:

$$T^m U^n = \left[(X' Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-(m+1)} y^{-(n+1)}},$$

quae docet aequatio, in evolutione expressionis

$$(X' Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right),$$

ad dignitates ipsarum x, y ordinata, terminum generalem esse

$$\frac{T^m U^n}{x^{m+1} y^{n+1}},$$

quae expressio perinde ad valores omnes positivos atque negativos numerorum m, n pertinet. Tribuendo igitur numeris m, n valores omnes a $-\infty$ usque ad $+\infty$, eruimus aequationem identicam memorabilem:

$$46. \quad (X' Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{x-T} + \frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U} + \frac{1}{U-y}\right).$$

Propter correlationem, quae inter aequationes $X - t = 0$, $Y - u = 0$ et aequationes $T - x = 0$, $U - y = 0$ obtinet, qua efficitur, ut ex illis hae, ex his illae sequuntur, in theoremate modo invento elementa x, y, X, Y cum elementis t, u, T, U permutari poterunt; quod ut ex ipso theoremate appareat, haec adnoto.

Sequitur enim e formula tradita 46. haec:

$$\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right) = \frac{1}{X' Y_1 - X_1 Y'}\left(\frac{1}{x-T} + \frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U} + \frac{1}{U-y}\right).$$

Secundum ea autem, quae iam in commentatione supra citata observavi, expressionem quidem huiusmodi

$$\frac{1}{x-T} + \frac{1}{T-x}$$

non pro evanescente habemus, sed pro symbolo certae cuiusdam evolutionis; eadem autem expressio, ducta in $x - T$, sive in potestatem altiorem ipsius $x - T$ evanescet. Eodem modo expressio

$$\left(\frac{1}{x-T} + \frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U} + \frac{1}{U-y}\right),$$

ducta in expressionem eiusmodi $(x-T)^m(y-U)^n$, in qua m, n numeri positivi, evanescit. Hinc ubi $\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}$ ad dignitates ascendentes ipsarum $x-T$, $y-U$ evolvimus, reiici poterunt dignitates et producta ipsarum $x-T$, $y-U$, nec remanebit nisi terminus primus evolutionis, sive in expressione

$$\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right)$$

in factore $\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}$ loco x, y substitui poterit T, U. Jam vero, posito $x=T$, $y=U$, fit $X=t$, $Y=u$; unde posito

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T',\quad \frac{\partial T}{\partial u}=T_1,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=U',\quad \frac{\partial U}{\partial u}=U_1,$$

differentiando secundum t, u eruitur:

$$X'T'+X_1U'=1,\quad Y'T'+Y_1U'=0,$$
$$X'T_1+X_1U_1=0,\quad Y'T_1+Y_1U_1=1,$$

ideoque

$$X'=\frac{U_1}{T'U_1-T_1U'},\quad Y'=\frac{-U'}{T'U_1-T_1U'},$$
$$X_1=\frac{-T_1}{T'U_1-T_1U'},\quad Y_1=\frac{T'}{T'U_1-T_1U'}.$$

E quibus formulis sequitur, ubi sit $x=T$, $y=U$, fore

$$X'Y_1-X_1Y'=\frac{1}{T'U_1-T_1U'},\quad \text{sive}\quad \frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}=T'U_1-T_1U'.$$

Cuius aequationis ope obtinemus formulam:

$$\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=(T'U_1-T_1U')\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right),$$

quae etiam e theoremate proposito 46. prodit, elementis x, y, X, Y cum t, u, T, U permutatis. Quam igitur ipsum theorema docet locum habere posse permutationem.

Restat, ut formula 46.

$$(X'Y_1-X_1Y')\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right),$$

quam pro theoremate canonico in hac quaestione habere possumus, ex ipsa natura evolutionum instituendarum, inter quas illa identitatem sistit, comprobetur. Supra quidem in quaestione de reversione serierum sive resolutione aequationis singularis facile succedit idem, quia ex expressione $fx-fy$ factor $x-y$ extrahi potuit; quomodo vero in systemate duarum aequationum simile quid praestari possit, non ita statim patet. Quae tamen accuratius perpendenti hunc in modum succedunt.

Ponatur $X = f(x, y)$, $Y = \varphi(x, y)$, ac consideretur expressio:

$$\left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}+\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}+\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right).$$

Quae expressio evolvatur ad dignitates descendentes ipsius $\triangle$, ita ut

$\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}$ dignitates negativas unius elementi x, reliquarum positivas
$\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}$ - - - - t, - -
$\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}$ - - - - y, - -
$\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}$ - - - - u, - -

contineant. Quibus conditionibus singulas expressiones evolvendi modus omnino definitus est. Jam poni poterit:

$$f(x,y)-f(t,u) = A(x-t)+B(y-u),$$
$$\varphi(x,y)-\varphi(t,u) = C(x-t)+D(y-u),$$

designantibus A, B, C, D functiones integras positivas elementorum x, y sive series infinitas, in quibus nonnisi positivae integrae dignitates elementorum x, y inveniuntur. Quibus observatis, e praescripto evolvendi modo fit:

$$\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}+\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)} = \Sigma\,\frac{B^p}{A^{p+1}}(u-y)^p\left(\frac{1}{(x-t)^{p+1}}+\frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}\right),$$
$$\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}+\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)} = \Sigma\,\frac{C^q}{A^{q+1}}(t-x)^q\left(\frac{1}{(y-u)^{q+1}}+\frac{(-1)^q}{(u-y)^{q+1}}\right),$$

quibus in summis numeris p, q tribuuntur valores omnes a 0 usque ad ∞. Vix opus est, ut repetam, e notatione, de qua convenimus, series quas per $\frac{1}{(x-t)^{p+1}}$, $\frac{1}{(t-x)^{p+1}}$ repraesentamus, eo inter se differre, quod altera secundum negativas ipsius x, altera secundum negativas ipsius t dignitates procedat. Unde expressionem

$$\frac{1}{(x-t)^{p+1}}+\frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}$$

non pro evanescente habemus, quae tamen per dignitatem ipsius $x-t$ altiorem quam p^{tam} multiplicata evanescit. Eodem modo expressio

$$\frac{1}{(y-u)^{q+1}}+\frac{(-1)^q}{(u-y)^{q+1}}$$

per dignitatem ipsius $y-u$ altiorem quam q^{tam} multiplicata evanescit. Unde in summa:

$$\Sigma \frac{B^p C^q}{A^{p+1} D^{q+1}} (u-y)^p (t-x)^q \left(\frac{1}{(x-t)^{p+1}} + \frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}\right)\left(\frac{1}{(y-u)^{q+1}} + \frac{(-1)^q}{(u-y)^{q+1}}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)} + \frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)} + \frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right)$$

evanescent termini omnes, in quibus sive $p > q$, sive $q > p$, quibus reiectis nonnisi remanent, in quibus $p = q$. Unde expressio proposita fit

$$\Sigma \frac{B^p C^p}{A^{p+1} D^{p+1}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right)\left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right)$$

sive

$$\frac{1}{AD-BC}\left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right)\left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right) \text{*)}.$$

Jam ex iis, quae supra observavimus, ubi $\frac{1}{AD-BC}$ ad dignitates positivas ipsarum $x-t$, $y-u$ evolvimus, terminum primum eius evolutionis sive a dignitatibus earum vacuum in locum eius factoris $\frac{1}{AD-BC}$ substituere possumus. Patet autem ex aequationibus

$$f(x,y) - f(t,u) = A(x-t) + B(y-u),$$
$$\varphi(x,y) - \varphi(t,u) = C(x-t) + D(y-u),$$

ubi loco t, u scribimus $x-(x-t)$, $y-(y-u)$, atque $f(t,u)$, $\varphi(t,u)$ secundum dignitates ipsarum $x-t$, $y-u$ evolvimus, terminos a $x-t$, $y-u$ vacuos in evolutione ipsarum A, B, C, D fore respective $f'(x)$, $f'(y)$, $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$; unde loco $\frac{1}{AD-BC}$ scribere licet

$$\frac{1}{f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)} = \frac{1}{X'Y_1 - X_1 Y'}$$

quo facto fit:

$$\left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)} + \frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)} + \frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right) =$$
$$\frac{1}{X'Y_1 - X_1 Y'}\left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right)\left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right).$$

In hac aequatione loco t, u ponamus series T, U, quibus loco x, y in $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ substitutis, fit

$$f(T,U) = t, \quad \varphi(T,U) = u;$$

---

*) Theorema, quo hic pervenimus:

$$\left(\frac{1}{A(x-t)+B(y-u)} + \frac{1}{A(t-x)+B(u-y)}\right)\left(\frac{1}{D(y-u)+C(x-t)} + \frac{1}{D(u-y)+C(t-x)}\right) =$$
$$\frac{1}{AD-BC}\left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right)\left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right)$$

alio modo in commentatione supra citata probatum est.

ubi insuper ponitur $f(x,y)=X$, $\Phi(x,y)=U$, formula antecedens in sequentem abit:

$$\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right),$$

quae per $X'Y_1-X_1Y'$ multiplicata theorema probandum suggerit.

Methodi a nobis traditae non eo casu circumscribuntur, quo evolutio quaesita e solis dignitatibus ipsarum t, u constat, quem unum hactenus consideravimus. In genere autem per artificia particularia reliqui casus ad illum revocantur. Ponamus e. g., evolvendam esse functionem $\log x \log y$, quae habebit evolutio formam

$$\log t \log u + A \log t + B \log u + C,$$

designantibus A, B, C series ad solas dignitates ipsarum t, u progredientes.

Jam ex aequationibus propositis $t=X$, $u=Y$ sequitur

$$\log x . \log y = \log\frac{tx}{X}.\log\frac{uy}{Y} =$$

$$\log t.\log u + \log t.\log\frac{y}{Y} + \log u.\log\frac{x}{X} + \log\frac{y}{Y}.\log\frac{x}{X},$$

qua in expressione $\log\frac{y}{Y}$, $\log\frac{x}{X}$ ad solas dignitates ipsarum x, y ideoque etiam ipsarum t, u evolvi poterunt, ideoque in casum anteriorem redeunt. Unde e formulis propositis obtinetur:

$$A=\left[\frac{X'Y_1-X_1Y'}{X-t}\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)\log\frac{y}{Y}\right]_{x^{-1}y^{-1}}=\log\frac{y}{u},$$

$$B=\left[\frac{X'Y_1-X_1Y'}{Y-u}\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\log\frac{x}{X}\right]_{x^{-1}y^{-1}}=\log\frac{x}{t},$$

$$C=\left[(X'Y_1-X_1Y')\log\frac{x}{X}.\log\frac{y}{Y}\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

$$=\log\frac{y}{u}.\log\frac{x}{t}.$$

Quae obiter monuisse sufficiat.

Formulam generalem supra traditam

$$C_q^{(p)}=\left[f(x,y)\frac{X'Y_1-X_1Y'}{X^{p+1}Y^{q+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

per formulam 11. lemmatis II. etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$47. \qquad C_q^{(p)}=\left[\frac{f_1'}{pq X^p Y^q}-\frac{X_1 f'}{q X^{p+1}Y^q}-\frac{Y' f_1}{p X^p Y^{q+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}},$$

siquidem $f_1'=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $f'=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_1=\frac{\partial f}{\partial y}$. De theoremate sub illa forma proposito facile etiam decurrit, quod Ill. Laplace olim de resolutione

aequationum
$$x = t + \alpha\varphi(x, y), \quad y = u + \beta\psi(x, y)$$
invenit. Ponatur enim $x = t + \xi$, $y = u + v$: aequationes propositae in sequentes mutantur:
$$\alpha = \frac{\xi}{\varphi(t+\xi, u+v)}, \quad \beta = \frac{v}{\psi(t+\xi, u+v)}.$$
Quoties iam functio $f(x, y) = f(t+\xi, u+v)$ in seriem secundum dignitates ipsarum α, β progredientem evolvenda est, cuius terminus generalis
$$C_q^{(p)}\alpha^p\beta^q,$$
fit e formula antecedente:
$$C_q^{(p)} = \left[\frac{1}{pq}\varphi^p\psi^q\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial v} + \frac{1}{q}\varphi^{p-1}\psi^q\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{1}{p}\varphi^p\psi^{q-1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial v}\right]_{\xi^{p-1}v^{q-1}},$$
brevitatis causa loco $\varphi(t+\xi, u+v)$, $\psi(t+\xi, u+v)$, $f(t+\xi, u+v)$ posito φ, ψ, f. Quae e theoremate **Tayloriana** fit:

$$48. \quad C_q^{(p)} = \frac{\partial^{p+q-2}\left[\frac{1}{pq}\varphi^p\psi^q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{q}\varphi^{p-1}\psi^q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{p}\varphi^p\psi^{q-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\Pi(p-1)\,\Pi(q-1)\,\partial x^{p-1}\,\partial y^{q-1}},$$

in qua formula φ, ψ, f designant functiones $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $f(x, y)$, atque post differentiationes exactas ponendum est $x = t$, $y = u$. Quod cum theoremate ab Ill. **Laplace** tradito convenit. Aequationes enim, quas ille considerat,
$$x = F(t + \alpha\varphi(x, y)), \quad y = \Pi(u + \beta\psi(x, y))$$
posito $x = F(x_1)$, $y = \Pi(y_1)$, revocantur ad formam a nobis adhibitam.

Observo adhuc, datis aequationibus $\varphi(x, y, t, u) = 0$, $\psi(x, y, t, u) = 0$, ubi x, y ut functiones ipsarum t, u considerantur, differentialia functionis $f(x, y, t, u)$, secundum t, u sumta per formulas nostras generaliter inveniri. Ponamus enim, loco t, u posito $t+h$, $u+i$ mutari x, y in $x+H$, $y+I$, unde aequationes propositae fiunt:
$$\varphi(x+H, y+I, t+h, u+i) - \varphi(x, y, t, u) = 0,$$
$$\psi(x+H, y+I, t+h, u+i) - \psi(x, y, t, u) = 0,$$
in quibus H, I ut incognitas sive radices consideramus. Quarum functionem $f(x+H, y+I, t+h, u+i)$ per methodos supra traditas in seriem evolvere possumus. Quibus ad dignitates ipsarum h, i ordinatis, ubi terminum generalem invenis $C_q^{(p)}h^p i^q$, erit
$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y, t, u)}{\partial t^p\,\partial u^q} = \Pi p.\Pi q.C_q^{(p)}.$$
Pauca adhuc de systemate trium aequationum inter tres variabiles propositarum adiiciamus.

De resolutione trium aequationum inter tres variabiles propositarum per series infinitas.

Propositis aequationibus:

$$\sigma = ax + by + cz + dx^2 + exy + \dots\dots$$
$$\tau = a'x + b'y + c'z + d'x^2 + e'xy + \dots\dots$$
$$\upsilon = a''x + b''y + c''z + d''x^2 + e''xy + \dots\dots$$

transformo eas in alias hujus formae:

$$s = \triangle x + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \dots\dots$$
$$t = \triangle y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + \dots\dots$$
$$u = \triangle z + \alpha'' x^2 + \beta'' xy + \gamma'' y^2 + \dots\dots$$

in quibus

$$s = (b'c'' - b''c')\sigma + (b''c - bc'')\tau + (bc' - b'c)\upsilon,$$
$$t = (c'a'' - c''a')\sigma + (c''a - ca'')\tau + (ca' - c'a)\upsilon,$$
$$u = (a'b'' - a''b')\sigma + (a''b - ab'')\tau + (ab' - a'b)\upsilon,$$
$$\triangle = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b').$$

Jam ubi radicum x, y, z functio $f(x, y, z)$ in seriem evolvenda est, cuius terminus generalis $C_{p,q,r}\, s^p t^q u^r$, ipsam $C_{p,q,r}$ ope lemmatis III. ita invenio.

Posito

$$X = \triangle x + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \dots\dots$$
$$Y = \triangle y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + \dots\dots$$
$$Z = \triangle z + \alpha'' x^2 + \beta'' xy + \gamma'' y^2 + \dots\dots$$

$$\nabla = \frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

et evoluta expressione $X^m Y^n Z^p \nabla$ ad dignitates descendentes ipsius $\triangle$, vidimus in lemmate III. in evolutione illa coëfficientem termini $\frac{1}{xyz}$ esse $= 0$, nisi sit $m = n = p = -1$, quo casu terminus $\frac{1}{xyz}$ nanciscitur coëfficientem 1. Jam ubi

$$f(x, y, z) = \Sigma\, C_{p,q,r}\, s^p t^q u^r$$

fieri debet identice

$$f(x, y, z) = \Sigma\, C_{p,q,r}\, X^p Y^q Z^r,$$

unde e lemmate citato:

$$49. \quad C_{p,q,r} = \left[\frac{f(x, y, z)\,\nabla}{X^{p+1}\, Y^{q+1}\, Z^{r+1}}\right]_{x^{-1} y^{-1} z^{-1}}.$$

Expressio $C_{p,q,r}$ cum dignitates negativas ipsius $\triangle$ contineat, observo, si loco aequationum transformatarum $s = X$, $t = Y$, $u = Z$ formas pleniores adhibuisses, quas initio proposuimus, expressionem illam $C_{p,q,r}$ quam

formula 47. suppeditat e pluribus seriebus valde complexis compositam fuisse, quae ex evolutione dignitatum negativarum ipsius $\triangle$ proveniunt.

Totam seriem, ubi e solis positivis ipsarum s, t, u dignitatibus constat, invenis:

$$50. \quad f(x,y,z) = \left[\frac{f(x,y,z)\,\nabla}{(X-s)(Y-t)(Z-u)}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

quae formula id commodi habet, quod aliis quibuslibet modis se accommodet, quibus evolutionem functionis $f(x,y,z)$ ordinare placet.

E formula 21. lemmatis III. formulam pro $C_{p,q,r}$ inventam etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$51. \quad pqr\,C_{p,q,r} =$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 f}{X^p Y^q Z^r \partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial . Y^{-q} Z^{-r}}{X^p \partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial . Z^{-r} X^{-p}}{Y^q \partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \frac{\partial . X^{-p} Y^{-q}}{Z^r \partial z}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\
&+\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 X^{-p}}{Y^q Z^r \partial y \partial z} + \frac{\partial Z^{-r}}{Y^q \partial y}\cdot\frac{\partial X^{-p}}{\partial z} + \frac{\partial Y^{-q}}{Z^r \partial z}\cdot\frac{\partial X^{-p}}{\partial y}\right]\\
&+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 Y^{-q}}{Z^r X^p \partial z \partial x} + \frac{\partial X^{-p}}{Z^r \partial z}\cdot\frac{\partial Y^{-q}}{\partial x} + \frac{\partial Z^{-r}}{X^p \partial x}\cdot\frac{\partial Y^{-q}}{\partial z}\right]\\
&+\frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 Z^{-r}}{X^p Y^q \partial x \partial y} + \frac{\partial Y^{-q}}{X^p \partial x}\cdot\frac{\partial Z^{-r}}{\partial y} + \frac{\partial X^{-p}}{Y^q \partial y}\cdot\frac{\partial Z^{-r}}{\partial x}\right]
\end{aligned}\right\}_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$$

Cuius formulae ope theorema ab Ill. Laplace de resolutione trium aequationum inter tres variabiles propositarum olim exhibitum facile probatur. Datis enim aequationibus:

$$\xi = s + \alpha f(\xi, v, \zeta),$$
$$v = t + \beta \varphi(\xi, v, \zeta),$$
$$\zeta = u + \gamma \psi(\xi, v, \zeta),$$

quam ille formam adhibet ponatur:

$$\xi = s + x, \quad v = t + y, \quad \zeta = u + z,$$

unde aequationes datae in has abeunt:

$$\alpha = \frac{x}{f(s+x, t+y, u+z)},$$

$$\beta = \frac{y}{\varphi(s+x, t+y, u+z)},$$

$$\gamma = \frac{z}{\psi(s+x, t+y, u+z)}.$$

Jam ubi ponitur esse

$$F(\xi, v, \zeta) = F(s+x, t+y, u+z) = \Sigma\, C_{p,q,r}\, \alpha^p \beta^q \gamma^r,$$

e formula 51., ponendo $X = \frac{x}{f}$, $Y = \frac{y}{\varphi}$, $Z = \frac{z}{\psi}$, et adhibita pro no-

tatione nostra vulgari differentialium notatione, prodit

$$52. \qquad C_{p,q,r} =$$

$$\frac{\partial^{p+q+r-3}\left\{\begin{array}{l} f^p\varphi^q\psi^r\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \\ +f^p\dfrac{\partial.\varphi^q\psi^r}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}+\varphi^q\dfrac{\partial.\psi^r f^p}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}+\psi^r\dfrac{\partial.f^p\varphi^q}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \\ +\dfrac{\partial F}{\partial x}\left[\varphi^q\psi^r\dfrac{\partial^2.f^p}{\partial y.\partial z}+\varphi^q\dfrac{\partial.\psi^r}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f^p}{\partial z}+\psi^r\dfrac{\partial\varphi^q}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f^p}{\partial y}\right] \\ +\dfrac{\partial F}{\partial y}\left[\psi^r f^p\dfrac{\partial^2\varphi^q}{\partial z\,\partial x}+\psi^r\dfrac{\partial.f^p}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi^q}{\partial x}+f^p\dfrac{\partial\psi^r}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi^q}{\partial z}\right] \\ +\dfrac{\partial F}{\partial z}\left[f^p\varphi^q\dfrac{\partial^2\psi^r}{\partial x\,\partial y}+f^p\dfrac{\partial.\varphi^q}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\psi^r}{\partial y}+\varphi^q\dfrac{\partial f^p}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\psi^r}{\partial x}\right] \end{array}\right\}}{\Pi p.\Pi q.\Pi r.\partial x^{p-1}\partial y^{q-1}\partial z^{r-1}},$$

ubi loco $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $F(x,y,z)$ simpliciter scripsimus f, φ, ψ, F atque post differentiationes exactas ponendum est $x=s$, $y=t$, $z=u$. Quam dedit Ill. Laplace formulam in commentatione supra citata p. 120. Aequationes enim, quas ille adhibet, formam tenentes

$$\xi = \Pi(s+\alpha f(\xi,v,\zeta)),$$
$$v = \mathrm{X}(t+\beta\varphi(\xi,v,\zeta)),$$
$$\zeta = \Omega(u+\gamma\psi(\xi,v,\zeta))$$

ponendo $\xi=\Pi\xi'$, $v=\mathrm{X}v'$, $\zeta=\Omega\zeta'$ in formam supra adhibitam redeunt.

Nec non ubi datis aequationibus

$$f(x,y,z,t,u,v) = 0,$$
$$\varphi(x,y,z,t,u,v) = 0,$$
$$\psi(x,y,z,t,u,v) = 0,$$

x, y, z ideoque etiam functio $F(x,y,z,t,u,v)$ ut functio ipsarum t, u, v consideratur, atque ea suppositione facta differentialia partialia ipsius F secundum t, u, v sumta eruenda sunt, expressionem

$$\frac{\partial^{p+q+r}F}{\partial t^p\,\partial u^q\,\partial v^r}$$

per formulas nostras generaliter exhibere licet.

Quae autem hactenus de duabus, tribus aequationibus inter duas, tres variabiles propositis protulimus, eadem facilitate ad numerum quemlibet aequationum et variabilium extenduntur.

23.
Über mechanische Quadraturen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die von Laplace *Méc. cél. T. IV. p.* 207. gegebene Formel veranlafste mich den allgemeinen Ausdruck für die darin enthaltenen Coëfficienten zu suchen. Man gelangt dazu auf folgendem Wege. Denkt man sich die gegebene Function in eine Reihe Glieder von der Form $H(e^{hx}-e^{-hx})$ entwickelt, so sieht man leicht, dafs die Interpolationsreihe, die allgemein für jedes Glied von dieser Form gilt, ebenfalls für die Function gelte, und dafs man von den constanten Coëfficienten abstrahiren könne. Es sei demnach die Reihe Werthe von y_x, für $x=0, 1, 2, 3, \ldots . n$ folgendermafsen geordnet, mit ihren successiven Differenzen:

x	y_x	$\Delta . y_x$	$\Delta^2 . y_x$	$\Delta^3 . y_x$
0	$1-1$			
1	e^h-e^{-h}	$(e^h-1)(1+e^{-h})$	$(e^h-1)^2(1-e^{-2h})$	
2	$e^{2h}-e^{-2h}$	$(e^h-1)(e^h+e^{-2h})$	$(e^h-1)^2(e^h-e^{-3h})$	$(e^h-1)^3(1+e^{-3h})$
3	$e^{3h}-e^{-3h}$	$(e^h-1)(e^{2h}+e^{-3h})$		
$\vdots$				
$n-1$	$e^{(n-1)h}-e^{-(n-1)h}$	$(e^h-1)(e^{(n-2)h}+e^{-(n-1)h})$	$(e^h-1)^2(e^{(n-2)h}-e^{-nh})$	$(e^h-1)^3(e^{(n-3)h}+e^{-nh})$.
n	$e^{nh}-e^{-nh}$	$(e^h-1)(e^{(n-1)h}+e^{-nh}$		

Für diesen Werth von y_x hat man also:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0-\Delta y_{n-1} &= -(1-e^{-h})(e^{nh}-1)+(1-e^h)(e^{-nh}-1),\\
\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{n-2} &= +(1-e^{-h})^2(e^{nh}-1)-(1-e^h)^2(e^{-nh}-1),\\
\Delta^3 y_0-\Delta^3 y_{n-3} &= -(1-e^{-h})^3(e^{nh}-1)+(1-e^h)^3(e^{-nh}-1),\\
\Delta^4 y_0+\Delta^4 y_{n-4} &= +(1-e^{-h})^4(e^{nh}-1)-(1-e^h)^4(e^{-nh}-1),
\end{aligned}$$

etc.

Nun ist aber $\int_0^n (e^{hx}-e^{-hx})\partial x = \frac{1}{h}(e^{nh}-1)+\frac{1}{h}(e^{-nh}-1)$; und

$\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots . y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n$ nach einer leichten Reduction

$$= \tfrac{1}{2}\frac{e^h+1}{e^h-1}(e^{nh}-1)-\tfrac{1}{2}\frac{e^{-h}+1}{e^{-h}-1}(e^{-nh}-1).$$

Es ist also, wenn man setzt:

$$\int_0^n y_x \partial x = \tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n.$$
$$+ A_1 (\Delta y_0 - \Delta y_{n-1})$$
$$+ A_2 (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2})$$
$$+ A_3 (\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{n-3})$$
$$+ A_4 (\Delta^4 y_0 + \Delta^4 y_{n-4})$$
$$+ \ldots$$

gleichfalls

$$\frac{1}{h} = \tfrac{1}{2} \frac{e^h + 1}{e^h - 1} - A_1 (1 - e^{-h}) + A_2 (1 - e^{-h})^2 - A_3 (1 - e^{-h})^3 + A_4 (1 - e^{-h})^4 - \text{etc.},$$

oder wenn man $1 - e^{-h} = z$ setzt:

$$\frac{1}{-\log \operatorname{nat} (1 - z)} = \tfrac{1}{2} \frac{2 - z}{z} - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - \text{etc.},$$

oder endlich:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 + \frac{1}{5} z^4 + \ldots} = 1 - \tfrac{1}{2} z - A_1 z^2 + A_2 z^3 - A_3 z^4 + A_4 z^5 - \ldots$$

Aufser den fünf von Laplace a. a. O. gegebenen Coëfficienten habe ich selbst noch folgende nach dieser Formel, und zur Sicherheit gegen Rechnungsfehler nach der Formel

$$\pm A_n = \int_0^1 \frac{x \,.\, x - 1 \,.\, x - 2 \ldots x - n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n}$$

berechnet.

$$A_1 = + \frac{1}{12}; \qquad A_7 = + \frac{33953}{3628800};$$
$$A_2 = - \frac{1}{24}; \qquad A_8 = - \frac{8183}{1036800};$$
$$A_3 = + \frac{19}{720}; \qquad A_9 = + \frac{3250433}{479001600};$$
$$A_4 = - \frac{3}{160}; \qquad A_{10} = - \frac{4671}{788480};$$
$$A_5 = + \frac{863}{60480}; \qquad A_{11} = + \frac{13695779093}{2615348736000};$$
$$A_6 = - \frac{275}{24192}; \qquad A_{12} = - \frac{2224234463}{475517952000}.$$

Zwischen den Grenzen $x = -\frac{1}{2}$ und $n + \frac{1}{2}$ ist $\int e^{hx} - e^{-hx}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}h}}{h} (e^{nh} - 1) - \frac{e^{-\frac{1}{2}h}}{-h} (e^{-nh} - 1)$$

und

$$y_0 + y_1 \ldots + y_{n-1} + y_n = \frac{e^h}{e^h - 1} (e^{nh} - 1) - \frac{e^{-h}}{e^{-h} - 1} (e^{-nh} - 1).$$

Wenn man also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} y_x \partial x = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n$$
$$+ B_1(\Delta y_0 - \Delta y_{n-1})$$
$$+ B_2(\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{n-2})$$
$$+ B_3(\Delta^3 y_0 - \Delta^3 y_{n-3})$$
$$+ \ldots$$

so wird

$$\frac{e^{\frac{1}{2}h}}{h} = \frac{e^h}{e^h - 1} - B_1(1 - e^{-h}) + B_2(1 - e^{-h})^2 - B_3(1 - e^{-h})^3 + B_4(1 - e^{-h})^4 - \text{etc.},$$

oder wenn man gleichfalls hier $1 - e^{-h} = z$ setzt:

$$\frac{1}{-\sqrt{(1-z)}\log\text{nat}(1-z)} = \frac{1}{z} - B_1 z + B_2 z^2 - B_3 z^3 + B_4 z^4 - B_5 z^5 + \ldots,$$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{5}z^4 + \text{etc.}} = 1 - B_1 z^2 + B_2 z^3 - B_3 z^4 + \text{etc.}$$

Die numerischen Werthe dieser Coëfficienten, gleichfalls auf zwei Arten berechnet, habe ich gefunden:

$$B_1 = -\frac{1}{24}; \qquad B_7 = -\frac{13528301}{464486400};$$
$$B_2 = +\frac{1}{24}; \qquad B_8 = +\frac{3194621}{116121600};$$
$$B_3 = -\frac{223}{5760}; \qquad B_9 = -\frac{3201305803}{122624409600};$$
$$B_4 = +\frac{103}{2880}; \qquad B_{10} = +\frac{122002655}{4904976384};$$
$$B_5 = -\frac{32119}{967680}; \qquad B_{11} = -\frac{63687408047173}{2678117105664000};$$
$$B_6 = +\frac{1111}{35840}; \qquad B_{12} = +\frac{10179163217133}{446352850944000}.$$

24.

Alia solutio problematis a celeberrimo Gaufs in opere: „Demonstratio attractionis, quam etc." tractati.

(Auct. *Th. Clausen.*)

Methodus, cujus ope summus Geometra problema hoc ad transcendentes ellipticas reducit, tam est elegans, tantaque generalitate gaudet, ut omnia alia hujusmodi problemata solvendi quasi typum praebeat. Si itaque finem tantum solutionis spectas, tanquam peracta videri potest; si vero nexum methodi Gaussianae comparationemque cum methodis antea usitatis requiris, quod sane analysin clarius perspiciendam facit: non omnino superfluae, ni fallor, sequentes pagellae aestimabuntur.

1.

Denotent A, B, C coordinatas orthogonales puncti ab annulo elliptico attracti, ad axes principales centrumque ellipseos relatas, cujus semiaxis major a, b semiaxis minor, e excentricitas est, E autem angulus ab astronomis anomalia excentrica vocatus. Coordinatae puncti ellipseos angulo E respondentes sunt

$$a \cos E, \quad b \sin E,$$

atque desuper $aa(1-ee) = bb$. Jam densitas annuli elliptici, cui crassities aequalis atque infinite parva supponitur, in quovis ellipseos puncto celeritati corporis hanc orbitam describentis inverse proportionalis statuitur, totaque annuli massa unitati aequalis concipitur; quocirca particula cujusvis annuli tempusculo ∂t respondens $\frac{\partial t}{T}$ erit, designante T tempus periodicum. Designata igitur per ϱ distantia puncti attracti a particula annuli elliptici, habetur hujus attractio

$$\frac{\partial . t}{\varrho\varrho . T}$$

vel, valoribus ipsorum ∂t et T per E substitutis, scilicet:

$$\partial t = a^{\frac{3}{2}}(1 - e \cos E)\, \partial E,$$
$$T = 2 a^{\frac{3}{2}} \pi,$$

designante π semicircumferentiam circuli cujus radius $= 1$, attractio haec

$$\frac{1 - e \cos E}{2\pi\varrho\varrho}\, \partial E$$

evadit. Quae in tres secundum axium directiones decomponitur, nempe:

$$1.\quad\begin{cases}\partial\xi = \dfrac{(A-a\cos E)\,(1-e\cos E)\,\partial E}{2\pi\varrho^3},\\[2mm] \partial\upsilon = \dfrac{(B-b\sin E)\,(1-e\cos E)\,\partial E}{2\pi\varrho^3},\\[2mm] \partial\zeta = \dfrac{C\,(1-e\cos E)\,\partial E}{2\pi\varrho^3}.\end{cases}$$

Hisce aequationibus ab $E=0$ usque ad $E=2\pi$ integratis, evadunt ξ, υ, ζ attractiones totius annuli in punctum propositum secundum directiones axium directionibus oppositas.

2.

Primo quidem hoc agitur, ut expressio ipsius $\varrho\varrho$ ad casum ubi $C=0$ reducatur. Hunc in finem ab aequatione

$$\varrho\varrho = aa\cos E^2 + bb\sin E^2 - 2aA\cos E - 2bB\sin E + AA + BB + CC$$

subtrahitur aequatio identica

$$0 = u\cos E^2 + u\sin E^2 - u,$$

designante u quantitatem adhuc indeterminatam, quam vero ita determinare licet, ut fit:

$$2.\quad \varrho\varrho = (aa-u)\cos E^2 + (bb-u)\sin E^2 - 2aA\cos E - 2bB\sin E + AA + BB + CC + u$$
$$= (aa-u)\left(\cos E - \frac{aA}{aa-u}\right)^2 + (bb-u)\left(\sin E - \frac{bB}{bb-u}\right)^2;$$

quibus valoribus comparatis, emergit:

$$\frac{aaAA}{aa-u} + \frac{bbBB}{bb-u} = AA + BB + CC + u,$$

vel

$$\frac{AA}{aa-u} + \frac{BB}{bb-u} = \frac{CC}{u} + 1,$$

quae aequatio evoluta ita se habet:

$$3.\quad u^3 + (AA+BB+CC-aa-bb)\,uu$$
$$+ (aabb - aaBB - aaCC - bbAA - bbCC)\,u + aabbCC = 0.$$

Jam observare licet, tributis u successive valoribus $-\infty$; 0; $+bb$; $+aa$; redire valores aequationis $-\infty$; $+aabbCC$; $-(aa-bb)bbBB$; $+(aa-bb)aaAA$ *); unde facile concluditur radices hujus aequationis omnes esse reales, earumque unam negativam, reliquas vero duas positivas, quarum altera quantitate $+bb$ minor est, altera vero inter bb et aa jacet. Quaenam vero earum ad propositum idonea sit, in sequentibus

---

*) Celeb. Gaufs in tractatu suo p. 12. methodum prolixiorem secutus est limites radicum aequationis hujus assignandi.

patebit; tertia certe est rejicienda, cum hac adoptata $bb-u$ negative evadat. Scribatur nunc:

$$4. \quad \begin{cases} \sqrt{(aa-u)} = a'; & \dfrac{aA}{aa-u} = f\cos\mu; \\ \sqrt{(bb-u)} = b'; & \dfrac{bB}{bb-u} = f\sin\mu; \end{cases}$$

tum aequatio transit in:

$$5. \quad \varrho\varrho = (a'\cos E - a'f\cos\mu)^2 + (b'\sin E - b'f\sin\mu)^2.$$

Hoc itaque modo problema ad casum $C=0$, vel quo punctum attractum in plano ellipseos jacet, reductum est.

3.

Si discerptio quantitatis cujuslibet in duo quadrata habetur, $\varrho\varrho = xx+yy$, notum est assignari posse innumeras alias, scilicet:

$$\varrho\varrho = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2,$$

designante φ angulum quemcumque. Hinc sequitur:

$$6. \quad \varrho\varrho = [a'\cos\varphi\cos E - b'\sin\varphi\sin E - f(a'\cos\varphi\cos\mu - b'\sin\varphi\sin\mu)]^2 \\ + [a'\sin\varphi\cos E + b'\cos\varphi\sin E - f(a'\sin\varphi\cos\mu + b'\cos\varphi\sin\mu)]^2.$$

Statuatur nunc

$$7. \quad \begin{cases} r\sin\varphi = -b'\sin\mu, \\ r\cos\varphi = a'\cos\mu, \end{cases}$$

vel

$$rr = a'a'\cos\mu^2 + b'b'\sin\mu^2,$$

tunc prodit:

$$rr\varrho\varrho = [a'a'\cos\mu\cos E + b'b'\sin\mu\sin E - f(a'a'\cos\mu^2 + b'b'\sin\mu^2)]^2 \\ + [a'b'\sin(E-\mu)]^2,$$

vel, reductionibus paucis factis:

$$8. \quad rr\varrho\varrho = [rr\cos(E-\mu) + \sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\sin(E-\mu) - frr]^2 \\ + [a'b'\sin(E-\mu)]^2.$$

Faciatur nunc similis transformatio, qua in theoria ellipseos anomalia excentrica et vera comparantur:

$$9. \quad \begin{cases} \cos(T-\nu) = \dfrac{\cos(E-\mu)-f}{1-f\cos(E-\mu)}, \\ \sin(T-\nu) = \dfrac{\sqrt{(1-ff)}\sin(E-\mu)}{1-f.\cos(E-\mu)}, \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-\nu) = \sqrt{\left(\dfrac{1+f}{1-f}\right)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-\mu), \end{cases}$$

et vice versa:

$$9.\quad \begin{cases} \cos(E-\mu) = \dfrac{\cos(T-\nu)+f}{1+f\cos(T-\nu)}, \\ \sin(E-\mu) = \dfrac{\sqrt{(1-ff)}\sin(T-\nu)}{1+f\cos(T-\nu)}, \\ \partial E = \dfrac{\sqrt{(1-ff)}\,\partial T}{1+f\cos(T-\nu)}. \end{cases}$$

Ut vero hae substitutiones locum habere possint, necesse est haberi $f<1$. Videamus, an aliqua et quaenam radicum aequationis (3.) ad hoc sit idonea.

Ex aequationibus (4.) sequitur:

$$H = \frac{aa\,AA}{(aa-u)^2} + \frac{bb\,BB}{(bb-u)^2}$$
$$= \frac{AA}{aa-u} + \frac{BB}{bb-u} + \frac{AAu}{(aa-u)^2} + \frac{BBu}{(bb-u)^2};$$

si aequatio (3.) substituitur, prodit:

$$H = 1 + u\left[\left(\frac{A}{aa-u}\right)^2 + \left(\frac{B}{bb-u}\right)^2 + \left(\frac{C}{u}\right)^2\right].$$

Hinc sequitur, si sumta fuerit radix negativa aequationis (3.), f evadere <1, sin minus >1; quapropter illa tantum assumi debet, rejectis duobus reliquis. Si statim ab initio fuisset $C=0$ atque punctum e x t r a curvam situm, facile perspicitur fieri per aequationes (4.) (posito scilicet $u=0$) $f>1$. In eo casu ad aequationem (3.) regrediendum erit, quae posito $C=0$ transit in:

$$u^2 + (AA+BB-aa-bb)u + aa\,bb - aa\,BB - bb\,AA = 0.$$

In eo, de quo agitur casu, est $\frac{AA}{aa}+\frac{BB}{bb}>1$ ideoque terminus ultimus negativus. Quapropter, si in aequationem hanc successive ipsi u valores $-\infty$, 0, $+bb$, $+aa$ tribuuntur, valor hujus aequationis $+\infty$; negativus; $-(aa-bb)BB$; $+(aa-bb)AA$ evadit; unde facile concluditur radicum hujus aequationis alteram esse negativam, alteram vero inter bb et aa sitam. In hoc itaque casu radix hujus aequationis negativa assumi debet, postea vero eodem modo progrediendum est, ac si non fuisset $C=0$.

Hac demonstratione peracta, ad aequationem (8.) regredior, quae aequationibus (9.) substitutis, in

$$rr[1+f\cos(T-\nu)]^2\varrho\varrho$$
$$= [rr\cos(T-\nu) + \sqrt{(1-ff)}\sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\sin(T-\nu)]^2$$
$$+ [a'b'\sqrt{(1-ff)}\sin(T-\nu)]^2$$

et, si eodem modo, quo aequatio (5.) transcribitur,

$$rr[1+f\cos(T-\nu)]^2\varrho\varrho$$
$$=[rr\cos\psi\cos(T-\nu)+\sqrt{(1-ff)}(\sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\cos\psi-a'b'\sin\psi)\sin(T-\nu)]^2$$
$$+[rr\sin\psi\cos(T-\nu)+\sqrt{(1-ff)}(\sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\sin\psi+a'b'\cos\psi)\sin(T-\nu)]^2.$$

Angulus ψ nunc ita determinari potest, ut fiat:

$$10.\quad [1+f\cos(T-\nu)]^2\varrho\varrho = MM\cos T^2+NN\sin T^2$$
$$= [M\cos\nu\cos(T-\nu)-M\sin\nu\sin(T-\nu)]^2$$
$$+ [N\sin\nu\cos(T-\nu)+N\cos\nu\sin(T-\nu)]^2.$$

Statui ita debet:

$$11.\quad \begin{cases} M\cos\nu = r\cos\psi, \\ M\sin\nu = -\dfrac{\sqrt{(1-ff)}}{r}(\sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\cos\psi-a'b'\sin\psi), \\ N\cos\nu = \dfrac{\sqrt{(1-ff)}}{r}(\sin\mu\cos\mu(b'b'-a'a')\sin\psi+a'b'\cos\psi), \\ N\sin\nu = r\sin\psi; \end{cases}$$

unde derivatur:

$$12.\quad \cot 2\psi = \frac{a'a'b'b'+(a'a'-b'b')\sin\mu^2\cos\mu^2-\dfrac{r^4}{1-ff}}{2a'b'(b'b'-a'a')\sin\mu\cos\mu}.$$

4.

Per aequationes (9. et 10.) habetur

$$13.\quad \frac{\partial E}{\varrho^3} = \frac{\sqrt{(1-ff)}[1+f\cos(T-\nu)]^2\partial F}{t^3}$$

designante t quantitatem $\sqrt{(MM\cos T^2+NN\sin T^2)}$, atque cum sit

$$A-a\cos E = A-a\cos\mu\cos(E-\mu)+a\sin\mu\sin(E-\mu),$$
$$B-b\sin E = B-b\sin\mu\cos(E-\mu)-b\cos\mu\sin(E-\mu),$$
$$1-e\cos E = 1-e\cos\mu\cos(E-\mu)+e\sin\mu\sin(E-\mu),$$

facile per aequationes (9.) invenitur:

$$14.\quad \begin{cases} (A-a\cos E)[1+f\cos(T-\nu)]=(A-af\cos\mu)+(Af-a\cos\mu)\cos(T-\nu)+a\sqrt{(1-ff)}\sin\mu\sin(T-\nu), \\ (B-b\sin E)[1+f\cos(T-\nu)]=(B-bf\sin\mu)+(Bf-b\sin\mu)\cos(T-\nu)-b\sqrt{(1-ff)}\cos\mu\sin(T-\nu), \\ C\qquad [1+f\cos(T-\nu)]= C \qquad + Cf \qquad \cos(T-\nu), \\ (1-e\cos E)[1+f\cos(T-\nu)]=(1-ef\cos\mu)+(f-e\cos\mu)\cos(T-\nu)+e\sqrt{(1-ff)}\sin\mu\sin(T-\nu). \end{cases}$$

Cum vero sit integratione a $T=0$ usque ad $T=2\pi$ facta

$$\int\frac{\cos T.\partial T}{t^3} = 0,$$
$$\int\frac{\sin T.\partial T}{t^3} = 0,$$
$$\int\frac{\cos T\sin T\partial T}{t^3} = 0,$$

si inter eosdem limites ponatur,

$$\int\frac{\cos T^2\,\partial T}{2\pi t^3}=P,$$
$$\int\frac{\sin T^2.\,\partial T}{2\pi t^3}=Q,$$

invenitur:

$$\int\frac{\partial T}{2\pi t^3}=P+Q,$$
$$\int\frac{\cos(T-\nu)\,\partial T}{2\pi t^3}=0,$$
$$\int\frac{\sin(T-\nu)\,\partial T}{2\pi t^3}=0,$$
$$\int\frac{\cos(T-\nu)^2\,\partial T}{2\pi t^3}=P\cos\nu^2+Q\sin\nu^2,$$
$$\int\frac{\cos(T-\nu)\sin(T-\nu)\,\partial T}{2\pi t^3}=\sin\nu\cos\nu\,(Q-P),$$
$$\int\frac{\sin(T-\nu)^2\,\partial T}{2\pi t^3}=P\sin\nu^2+Q\cos\nu^2.$$

Ope harum aequationum facile per (13. et 14.) ex aequationibus (1.) derivatur:

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{\sqrt{(1-ff)}}&=(A-af\cos\mu)(1-ef\cos\mu)(P+Q)\\&+(Af-a\cos\mu)(f-e\cos\mu)(P\cos\nu^2+Q\sin\nu^2)\\&+ae(1-ff)\sin\mu^2(P\sin\nu^2+Q\cos\nu^2)\\&+\sqrt{(1-ff)}\sin\mu(Aef+af-2ae\cos\mu)\sin\nu\cos\nu(Q-P),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{v}{\sqrt{(1-ff)}}&=(B-bf\sin\mu)(1-ef\cos\mu)(P+Q)\\&+(Bf-b\sin\mu)(f-e\cos\mu)(P\cos\nu^2+Q\sin\nu^2)\\&-be(1-ff)\sin\mu\cos\mu\,(P\sin\nu^2+Q\cos\nu^2)\\&+\sqrt{(1-ff)}(Bef\sin\mu-bf\cos\mu+b\cos2\mu)\sin\nu\cos\nu(Q-P),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{\sqrt{(1-ff)}}&=C(1-ef\cos\mu)(P+Q)+Cf(f-e\cos\mu)(P\cos\nu^2+Q\sin\nu^2)\\&+Cef\sqrt{(1-ff)}\sin\mu\sin\nu\cos\nu(Q-P).\end{aligned}$$

25.

Zur Theorie der allgemeinen Kuppelung (Joint universel. Universal Joint.) der Wellen.

(Vom Herrn Dr. *Dietlein* zu Berlin.)

In Maschinen mufs öfters eine Welle länger sein, als dafs man sie aus einem einzigen Stücke Holz oder Metall (gewöhnlich Eisen) machen könnte, weshalb sie dann aus mehreren Stücken zusammengesetzt werden mufs. So lange die Drehachsen der einzelnen Stücke in eine und dieselbe gerade Linie fallen, reichen gewöhnliche Schiftungen und eiserne Ringe, wozu allenfalls noch Schienen und Bolzen kommen, hin; müssen aber die Drehachsen von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Stücken zwar in Einer Ebene, aber nicht in Einer geraden Linie liegen, und kann oder will man keine Winkel-Räder zu Hülfe nehmen, so ist diese Art der Verbindung nicht mehr anwendbar. Man bedient sich dann derjenigen, welche man allgemeine Kuppelung nennt, und zwar allgemein, weil sie auch im ersten Fall gebraucht werden kann. An dem Ende einer der beiden Wellen, in dem Durchschnittspuncte ihrer Achsen, bringt man einen Biegel an; dieser enthält 2 Büchsen, deren Achsen in einer und derselben durch den Durchschnittspunct der Achsen der beiden Wellen gehenden geraden Linie liegen; dann macht man entweder im Umfange einer kreisförmigen Scheibe, je um einen Viertelkreis von einander entfernt, oder an den Enden der vier gleichen, rechte Winkel mit einander bildenden Arme eines Kreuzes, 4 Zapfen, welche in die gedachten Büchsen greifen, wie es (Taf. III. Fig. 7., 8. und 10.) vorstellen.

AC (Fig. 9.) sei die Richtung der Achse der Welle, auf deren Umdrehung die Kraft wirkt; BC die Richtung der Achse der Welle, deren Umdrehung die Last zu verhindern strebt; C der Durchschnittspunct beider; a die Ergänzung des Winkels ACB unter welchen sie einander schneiden zu 2 Rechten. Man ziehe DFM normal auf AC, und GKN normal auf BC, so ist DF die Projection der Ebene desjenigen Kreises, welchen die in den Pfannen des an AC befestigten Biegels liegenden Zapfen bei jeder Umdrehung beschreiben, auf die Ebene des Winkels ACB; GK dasselbe für die Welle, deren Achse BC; und $MCN = a$. Man be-

schreibe über DF, aus C, mit dem Halbmesser $CD = r$ (der Entfernung des Punctes von der Drehachse AC, in welchem die ersten beiden Zapfen des Kreuzes die Büchsen im Biegel von AC berühren) den Halbkreis DEF, und über FK, aus C, mit demselben Halbmesser r, den Halbkreis GHK; man stelle sich dann die Ebene von DEF um DF, und die Ebene von GHK um GK so gedreht vor, dafs beide normal auf die Ebene des Winkels ACB sind, so sind die Halbkreise DEF und GHK die Hälften der Wege, welche die Angriffspuncte der Zapfen des Kreuzes, während einer Umdrehung jeder der beiden Wellen durchlaufen. Betrachtet man E als den Anfangspunct des Weges, welchen der Angriffspunct eines in dem zu AC gehörigen Biegel liegenden Zapfens macht, und setzt den Winkel, den CE (der zugehörige Arm des Kreuzes) nach einer gewissen Zeit beschrieben hat, $lCE = \varphi$, zieht dann durch E, normal auf CE, eine Linie EL, und verlängert Cl bis sie die EL in L schneidet, so ist EL, also auch wenn man durch L gleichlaufend mit AEC, LM zieht, $CM = r \operatorname{tang} \varphi$. Während derselben Zeit mufs sich aber auch CG (der auf CE folgende mit seinen Zapfen im Biegel von BC liegende Arm des Kreuzes) eben so viel um BC drehen, als CH; der Winkel von CH (der mit CE zusammenfällt) an gerechnet, heifse ψ: so wird man ψ erhalten, wenn man durch M die Linie MNO gleichlaufend mit BC, durch H die Linie HO gleichlaufend mit GN, und durch den Durchschnittspunct O die Linie CO zieht; dann ist $HCO = \psi$.

Aber $EL = CM = r \operatorname{tang} \varphi$; $CN = HO = r \operatorname{tang} \psi$, und zugleich $CM : CN = 1 : \cos a$, folglich $\operatorname{tang} \varphi : \operatorname{tang} \psi = 1 : \cos a$, und mithin $\operatorname{tang} \psi = \cos a \,.\, \operatorname{tang} \varphi$; oder $\cos a = n$ gesetzt, $\operatorname{tang} \psi = n \operatorname{tang} \varphi$, wo n für jedes System unveränderlich ist.

Um eine Gleichung aufzustellen, welche für jede Lage des Systems das Verhältnifs der Kraft zur Last ausdrückt, sei

P die Kraft, welche im Abstande r von der Drehachse AC wirkt;

M die auf denselben Abstand r reducirte *träge Masse* vom Angriffspuncte der Kraft an;

Q die Last, welche im Abstande r von der Drehachse BC wirkt;

N die auf denselben Abstand r reducirte *träge Masse*, vom Angriffspuncte der Last an;

v die Geschwindigkeit des Puncts E;

w die Geschwindigkeit des Puncts G, welche der des Puncts H gleich ist.

Die Kraft P kann man als aus drei Theilen zusammengesetzt ansehen:
1) aus einem Theile, der mit der Last Q selbst im Gleichgewichte ist;
2) aus einem Theile, der wegen der Beschleunigung der trägen Masse M nöthig ist;
3) aus einem Theile zur Beschleunigung der trägen Masse N.

Der erste Theil ist $=\frac{w}{v}Q$, oder da $w=r\partial\psi$ und $v=r\partial\varphi$, auch $=\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.Q$.

Da der Raum, welcher von den Zapfen des Kreuzes die im Biegel der Welle AC liegen in der unendlich kleinen Zeit durchlaufen wird in welcher v um ∂v zunimmt, $=r\partial\varphi$ ist, so wird der zweite Theil $=\frac{2v\partial v}{4gr\partial\varphi}M$, wenn g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

Setzt man hierin w statt v, ψ statt φ und N statt M, und multiplicirt die so erhaltene Kraft $\frac{2w\partial w}{4gr\partial\psi}N$, da sie im Biegel der Welle BC nöthig wäre, mit $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, um sie auf die Büchse im Biegel der Welle AC zu bringen, so ist der dritte Theil

$$=\frac{2w\partial w}{4gr\partial\psi}.\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}.N=\frac{2w\partial w}{4gr\partial\varphi}.N.$$

Hieraus ergiebt sich

$$P=\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}Q+\frac{2v\partial v}{4gr\partial\varphi}M+\frac{2w\partial w}{4gr\partial\varphi}N.$$

Um $\partial\psi$ und $\partial\varphi$ durch $\operatorname{tang}\varphi$ und $\partial\operatorname{tang}\varphi$ auszudrücken, so ist, weil $\operatorname{tang}\psi=n\operatorname{tang}\varphi$, $\partial\varphi=\frac{\partial\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi^2}$ und $\partial\psi=\frac{\partial\operatorname{tang}\psi}{1+\operatorname{tang}\psi^2}$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{n.\partial\operatorname{tang}\varphi}{1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2}.\frac{1+\operatorname{tang}\varphi^2}{\partial\operatorname{tang}\varphi}=\frac{n(1+\operatorname{tang}\varphi^2)}{1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2}.$$

Dieses giebt

$$P=\frac{n(1+\operatorname{tang}\varphi^2)}{1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2}Q+\frac{2v\partial v(1+\operatorname{tang}\varphi^2)}{4gr.\partial\operatorname{tang}\varphi}M+\frac{2w\partial w(1+\operatorname{tang}\varphi^2)}{4gr.\partial\operatorname{tang}\varphi}N.$$

Auf beiden Seiten mit $\frac{4gr\partial\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi^2}$ multiplicirt und das erste Glied rechter Seite transponirt, giebt

$$4grP\frac{\partial\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi^2}-4grQ\frac{n\partial\operatorname{tang}\varphi}{1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2}=2v\partial vM+2w\partial wN,$$

und integrirt,

$$4grP\varphi-4grQ\operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}\varphi)=v^2M+w^2N+\text{const.}$$

Es ist aber $v = \frac{r\partial\varphi}{\partial t}$ und $w = \frac{r\partial\psi}{\partial t}$, wenn ∂t einen unendlich kleinen Zeitraum bedeutet; also

$$v : w = \partial\varphi : \partial\psi,\quad w = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} v = \frac{n(1+\operatorname{tang}\varphi^2)}{1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2} v,$$

mithin

$$4grP\varphi - 4grQ\operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}\varphi) = v^2 M + \frac{n^2(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2} v^2 N + \text{const.}$$

Für $\varphi = 0$ ist $\operatorname{tang}\varphi = 0$ und v sei $= \alpha$. Dann ist

$$0 = \alpha^2 M + \alpha^2 n^2 N + \text{const.};$$

also vollständig

$$4gr[P\varphi - Q\operatorname{arc\,tang}(n.\operatorname{tang}\varphi)] = (v^2-\alpha^2)M + n^2\left[v^2\frac{(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2} - \alpha^2\right]N,$$

und endlich

$$P = \frac{Q\operatorname{arc\,tang}(n.\operatorname{tang}\varphi)}{\varphi} + \frac{(v^2-\alpha^2)M + n^2\left[v^2\frac{(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2} - \alpha^2\right]N}{4gr\varphi}.$$

Wenn die Maschine immer fortgehen soll, so darf v weder $=\infty$ noch $=0$ werden, sondern es mufs die Geschwindigkeit am Ende jedes Umganges der im Anfange desselben gleich sein. Um diese Bedingung zu erfüllen, mufs für $\varphi = 2\pi$, also für $\operatorname{tang}\varphi = 0$, $v = \alpha$ sein, folglich

$$P = Q.$$

Dann ist

$$4grP[\varphi - \operatorname{arc\,tang}(n.\operatorname{tang}\varphi)] = (v^2-\alpha^2)M + n^2\left[v^2\frac{(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2} - \alpha^2\right]N,$$

oder

$$4grP[\varphi - \operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}\varphi)] + \alpha^2[M+n^2N] = v^2\left[M + n^2\frac{(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2}N\right],$$

mithin

$$v^2 = \frac{4grP[\varphi - \operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}\varphi)] + \alpha^2[M+n^2N]}{M + n^2\frac{(1+\operatorname{tang}\varphi^2)^2}{(1+n^2\operatorname{tang}\varphi^2)^2}N}.$$

Für $\varphi = 0$ also $\operatorname{tang}\varphi = 0$ ist

$$v^2 = \frac{\alpha^2[M+n^2N]}{M+n^2N} = \alpha^2.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ also $\operatorname{tang}\varphi = +\infty$ ist

$$v^2 = \frac{4grP\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] + \alpha^2[M+n^2N]}{M + n^2\frac{\operatorname{tang}\varphi^4}{n^4\operatorname{tang}\varphi^4}N} = \alpha^2\frac{M+n^2N}{M+\frac{N}{n^2}} = \alpha^2\frac{n^2M+n^4N}{n^2M+N}.$$

Mit Ausnahme des Falles wo die Achsen der beiden Wellen in Einer geraden Linie liegen, also wo $a = 0$, oder $\cos a = n = 1$ und

$\frac{n^2 M + n^4 N}{n^2 M + N} = 1$, ist dieser Bruch immer < 1, weil $n < 1$ ist, mithin ist die Geschwindigkeit der Zapfen des Kreuzes, welche im Biegel der Welle BC liegen, am Ende des ersten Viertelkreises $< \alpha$.

Für $\varphi = \pi$ also $\operatorname{tang}\varphi = 0$, ist wie für $\varphi = 0$,

$$v^2 = \alpha^2.$$

Für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ also $\operatorname{tang}\varphi = -\infty$, ist wie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$v^2 = \alpha^2 \frac{n^2 M + n^4 N}{n^2 M + N} < \alpha^2.$$

Für $a = 0$ also $\cos a = n = 1$ ist für jeden Werth von φ,

$$v^2 = \frac{4grP(\varphi - \varphi) + \alpha^2(M+N)}{M+N} = \alpha^2.$$

Für $a = \frac{\pi}{2}$ also $\cos a = n = 0$, ist für jeden Werth von φ,

$$v^2 = \frac{4grP(\varphi - z\pi) + \alpha^2 M}{M},$$

wo z von 0 an jede ganze Zahl bedeuten kann; jedoch können nicht alle Werthe gebraucht werden.

Man setze $\varphi = m\pi$, wo m beliebig ist, so nimmt für die erste halbe Umdrehung der Welle AC der Werth von m von 0 bis 1 zu; für die zweite halbe Umdrehung von 1 bis 2, u. s. w. fort ins Unendliche.

Bringt man m in den obigen Ausdruck für v^2, so erhält man

$$v^2 = \frac{4gr\,P\pi(m - z) + \alpha^2 M}{M}.$$

Soll nun für jedes Verhältniſs der Zahlenwerthe r, P und M, also allgemein, v möglich bleiben, so darf $m - z$ nicht verneint, also z nicht gröſser als m sein. Da z nur ganze Zahlen bedeutet, so kann

für die 1ste halbe Umdrehung der Welle AC, $z = 0$ oder $= 1$ sein;
für die 2te - - - - - $z = 1$ oder $= 2$;

und so weiter, und es ist nur noch auszumitteln welcher von beiden Werthen jedesmal gebraucht werden kann.

Setzt man in der Gleichung $v^2 = \frac{4grP\pi(m - z) + \alpha^2 M}{M}$, $m = 2$ und $z = 0$, so erhält man, da für diesen Fall die Maschine ihre ganzen Umgänge in gleichen Zeiträumen vollbringen, auch $v = \alpha$ sein muſs,

$$\alpha^2 = \frac{4gr\pi P}{M}(2 - 0) + \alpha^2, \text{ oder}$$

$$0 = 8g\pi . \frac{rP}{M}.$$

Dann müfste also entweder $M = \infty$, oder r oder $P = 0$ sein, was nicht möglich ist.

Setzt man aber $m = 2$, $z = 1$, $v = \alpha$, so erhält man

$$\alpha^2 = \frac{4 g r \pi P}{M}(2-1) + \alpha^2, \text{ oder}$$

$$0 = 4 g \pi . \frac{r P}{M};$$

also dasselbe Resultat wie vorher.

Auch die Rechnung zeigt also, dafs die allgemeine Kuppelung auf zwei Wellen deren Achsen einander rechtwinklig schneiden nicht anwendbar ist, sondern dafs a kleiner sein mufs als $\frac{1}{2}\pi$. Für $a = \frac{1}{2}\pi$ würde sich die Welle AC drehen, während die Welle BC in Ruhe bliebe, indem die Pfannen im Biegel der letztern den zu der erstern gehörigen Zapfen die freie Umdrehung gestatten würden, wenn nur die Arme der Biegel einander nicht berühren könnten. Diesen letzten Umstand kann man aber nicht verhindern, wenn $a = \frac{\pi}{2}$ wird, deshalb darf man bei der allgemeinen Kuppelung den Werth von a auch nicht zu nahe an $\frac{\pi}{2}$ bringen; man nimmt dann lieber zwischen dem Kraft- und dem Lastpuncte mehr als zwei Wellen.

Dafs es richtig sei wenn in der allgemeinen Gleichung

$$v^2 = \frac{4 g r P[\varphi - \text{arc tang}(n \text{ tang}\,\varphi)] + \alpha^2 [M + n^2 N]}{M + n^2 \frac{(1+\text{tang}\,\varphi^2)^2}{(1+n^2 \text{ tang}\,\varphi^2)^2} N},$$

für $\varphi = m\frac{\pi}{2}$, $\text{arc tang}(n . \text{tang}\,\varphi) = m\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, davon wird man sich leicht überzeugen, denn nur dann ist allgemein

$$[\varphi - \text{arc tang}(n \text{ tang}\,\varphi)] = 0,$$

also am Ende jeder halben und ganzen Umdrehung

$$v = \alpha,$$

wie es gewöhnlich erforderlich ist. Ein besonderer Beweis scheint also überflüssig.

Soll v unveränderlich, also überall gleich α sein, so ist das veränderliche

$$P = \frac{Q \text{ arc tang}(n \text{ tang}\,\varphi)}{\varphi} + \frac{\alpha^2 n^2 N\left(\frac{(1+\text{tang}\,\varphi^2)^2}{(1+n^2 \text{ tang}\,\varphi^2)^2} - 1\right)}{4 g r \varphi}.$$

Für $\varphi = 0$ also tang $\varphi = 0$, ist

$$P = \frac{Q \operatorname{arc\,tang} 0}{0} + \frac{\alpha^2 n^2 N}{4gr.0}(1-1);$$
$$P = Q.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ also tang $\varphi = \infty$, ist

$$P = \frac{Q\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\alpha^2 n^2 N\left(\frac{\infty^4}{n^4\infty^4} - 1\right)}{4gr.\frac{\pi}{2}},$$

$$P = Q + \frac{\alpha^2 N\left(\frac{1}{n^2} - n^2\right)}{4gr.\frac{\pi}{2}},$$

$$P = Q + \frac{\alpha^2 N(1-n^4)}{4grn^2.\frac{\pi}{2}}.$$

für $n = 1$ ist dabei $P = Q$;

für $n = 0$ ist $\qquad P = Q + \frac{\alpha^2 N}{4gr.\frac{\pi}{2}0}$, also unendlich.

Für $\varphi = \pi$ also tang $\varphi = 0$, ist

$$P = \frac{Q \operatorname{arc\,tang} 0}{\pi} + \frac{\alpha^2 n^2 N(1-1)}{4gr\pi},$$
$$P = Q$$

Für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ also tang $\varphi = -\infty$, ist

$$P = Q + \frac{\alpha^2 N(1-n^4)}{4gr\frac{\pi}{2}.n^2}.$$

Es wäre nun auch noch die Reibung an den Zapfen des Kreuzes in Rechnung zu bringen; allein da dieselbe nur eine unbedeutende Vermehrung von P erfordert und die Rechnung dadurch weitläufiger wird, so mag solches unterbleiben.

26.
Zu den Elementen der Geometrie.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

1.

Die Elemente der Geometrie weisen zwei Aufgaben auf, welche ungeachtet der häufigsten Versuche bis jetzt nicht gehörig gelöset worden sind: die eine ist planimetrisch und besteht in der Aufstellung einer strengen Lehre von den Parallellinien, die zweite ist stereometrisch und betrifft den Beweis der bekannten Regel, nach welcher die Solidität einer Pyramide zu bestimmen ist. Vielleicht hat man in Hinsicht auf die erste Aufgabe erreicht, was irgend erreicht werden kann; aber die zweite genannte Aufgabe gestattet eine Erledigung, welche nichts mehr zu wünschen übrig läſst und der Hauptzweck dieser Abhandlung ist. Das Bedürfniſs einer mehr zusagenden Darstellung dieses stereometrischen Gegenstandes, am meisten gefühlt während des Unterrichts in den Elementen, und das Eingehen auf seine doch nur scheinbare Schwierigkeit führten den Verfasser dahin zurück, beweisen zu müssen, daſs symmetrische Polyëder gleichen Inhalt haben. Es gelang ihm hier die Zurückführung der Symmetrie der Polyëder auf die Congruenz. Eine aus pädagogischer Rücksicht davon gemachte Anzeige (in der Krit. Bibliothek. 1828. No. 17.), welche eine Antwort erwartete, blieb fast ein Jahr lang unbeantwortet, weshalb ich denn im Journale d. Math. Band IV. Heft I. auf den (S. 100.) aufgestellten Lehrsatz aufmerksam machte. Mit dem Erscheinen dieses Heftes des Journals erschien nun aber auch im Neuen Archiv für Philologie und Pädagogik. 1829. No. 12. eine Nachweisung, daſs das so eben genannte Theorem bereits von Durrande in den von Gergonne herausgegebenen *Annales de Mathématiques.* Th. VI. S. 340. etc. behandelt sei. Der Herr Prof. Förstemann in Danzig, welcher diese Nachweisung gegeben hat, sagt:

„In dieser Methode werden zuerst die Polyëder in dreiseitige Pyramiden zerfällt; dann wird jede solche Pyramide, indem man von der Bestimmung des Mittelpuncts der eingeschriebenen (nicht umschriebenen) Kugel ausgeht, in zwölf Theile und zwar vierseitige Pyramiden ge-

theilt. Geschieht eine solche Eintheilung ganz gleichmäfsig an zwei symmetrischen Polyëdern, so werden die Theile des einen den entsprechenden Theilen des anderen congruent."

Diese Methode fällt aber keineswegs mit der zusammen, welche ich, ohne je die *Annales de Mathématiques* gesehen zu haben, angewandt habe, und die erwähnte Nachweisung veranlafst mich jetzt, meine Methode mitzutheilen. Auch mag es wohl allgemein interessant erscheinen, dafs nun auf zwei völlig verschiedene Arten das zu Stande gebracht worden ist, was in den *Éléments de Géometrie* von A. M. Legendre (1794) für unmöglich gehalten wird. (Man sehe die in den neueren Ausgaben verkürzte Note VII.)

2.

Um nun zunächst zu beweisen, dafs symmetrische viereckige Pyramiden gleichen Inhalt haben, dient die folgende Gedankenreihe, welche der Leser auch ohne Hinweisung auf eine Figur verfolgen wird:

I. Für eine viereckige Pyramide giebt es einen, aber nur einen Punct, welcher von den vier Ecken des Körpers gleich weit absteht (oder es kann eine, aber nur eine Kugel um eine viereckige Pyramide geschrieben werden.

II. Wenn man die drei Kanten VA, VB, VC einer viereckigen Pyramide $VABC$ über V hinaus so verlängert, dafs $VA' = VA$, $VB' = VB$ und $VC' = VC$, so ist die neue Pyramide $VA'B'C'$ der gegebenen symmetrisch.

III. Wenn zwei Polyëder einem dritten symmetrisch sind, so sind sie congruent.

IV. Wenn zwei viereckige Pyramiden $ABCD$ und $abcd$ symmetrisch sind und man schreibt Kugeln um dieselben, so sind ihre Radien gleich.

Der Beweis der drei ersten Vordersätze ist einfach; was den Beweis des vierten betrifft, so sei V der Mittelpunct der um $ABCD$ beschriebenen Kugel, und also $VA = VB = VC = VD$. Durch diese Radien ist die Pyramide $ABCD$ in vier andere viereckige zerlegt: $VABC$, $VABD$, $VACD$, $VBCD$. Verlängert man diese Radien, jeden um die eigene Länge, so entstehen (nach II.) vier neue Pyramiden $VA'B'C'$, $VA'B'D'$, $VA'C'D'$, $VB'C'D'$, welche der Reihe nach den vorigen symmetrisch sind und eine Pyramide $A'B'C'D'$ zusammensetzen, durch deren Ecken die Kugel um V ebenfalls geht. Diese Pyramide $A'B'C'D'$ ist symmetrisch mit $ABCD$; daher sind (nach III.) die beiden Pyramiden $A'B'C'D'$ und $abcd$ congruent.

V. Zwei symmetrische Pyramiden $VABC$ und $VA'B'C'$ sind gleich grofs, wenn $VA = VB = VC$ und also auch $V'A' = V'B' = V'C'$ ist.

Von den Scheiteln V und V' lasse man die Perpendikel VQ und $V'Q'$ auf die Grenzflächen ABC und $A'B'C'$, so sind die Dreiecke VQA, VQB, VQC, $V'Q'A'$, $V'Q'B'$, $V'Q'C'$ sämmtlich congruent, also $QA = QB = QC = Q'A' = Q'B' = Q'C'$ und die Puncte Q und Q' sind demnach die Mittelpuncte von Kreisen, welche um die congruenten Dreiecke ABC und $A'B'C'$ geschrieben werden können.

Jede Pyramide ist nun in drei zerlegt, und es ist $VAQB$ sowohl symmetrisch als auch zugleich congruent mit $V'A'Q'B'$; eben so $VAQC$ mit $V'A'Q'C'$ und $VBQC$ mit $V'B'Q'C'$; also ist $VABC = V'A'B'C'$.

VI. Überhaupt sind zwei symmetrische Pyramiden $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gleich grofs.

Man schreibe Kugeln um dieselben, die Mittelpuncte derselben mögen V und V' sein; dann sind die Geraden $VA = VB = VC = VD = V'A' = V'B' = V'C' = V'D'$ (nach IV.). Ferner ist die Pyramide $VABC$ symmetrisch mit $V'A'B'C'$; also ist $VABC = V'A'B'C'$ (nach V.); eben so ist $VABD = V'A'B'D$; $VACD = V'A'C'D'$ und $VBCD = V'B'C'D'$. Hieraus aber folgt unmittelbar, dafs $ABCD = A'B'C'D'$.

Diese Methode der Zerfällung, wodurch ebenfalls zwölf Theile gefunden werden, ist offenbar sonst gänzlich verschieden von der, welche **Durrande** angewandt haben soll, da der Mittelpunct einer um eine viereckige Pyramide geschriebenen Kugel bekanntlich mit dem Mittelpuncte der hineingeschriebenen nicht zusammenfällt.

Was die Ausdehnung des so eben bewiesenen Theorems auf symmetrische Polyëder überhaupt betrifft, so hat sie keine Schwierigkeit.

Anmerk. Der in Band IV. Heft 1. Seite 100. dieses Journals vorkommende Ausdruck $2e - \varepsilon - 4$ bezeichnet die kleinste Menge der viereckigen Pyramiden, in welche der Körper K oder K' zerlegt wird, indem man alle Diagonal-Ebenen durch die Ecke E legt. Nimmt man statt der Ecke E einen Punct im Innern des Körpers, so ist $\varepsilon = 0$.

3.

Legen wir uns die Inhaltsbestimmung eines abgekürzten Parallelepipedums $ABCDdcba$ vor; es seien Aa, Bb, Cc, Dd die vier parallelen Kanten, wodurch die Ecken der nicht parallelen Grundflächen $ABCD$ und $abcd$, welche Parallelogramme sind, verbunden werden.

Der Einfachheit wegen mag die Grundfläche $ABCD$ auf die Kanten Aa, Bb, Cc, Dd senkrecht gerichtet sein.

Man ziehe in den beiden Grundflächen die Diagonalen AC und BD, welche sich in E schneiden mögen, und die Diagonalen ac und bd, welche sich in e schneiden: so ist die Gerade Ee offenbar parallel den Kanten Aa, Bb, Cc, Dd.

Man verlängere Ee um eE', so dafs $eE' = Ee$, lege durch E' eine Ebene $A'B'C'D'$ parallel zu $ABCD$; verlängere auch Aa, Bb, Cc, Dd, und es mag die durch E' gelegte Ebene davon in A', B', C', D' geschnitten werden. Die Körper $ABCDdcba$ und $A'B'C'D'dcba$ sind dann symmetrisch und ergänzen sich zu einem senkrechten Parallelepipedum mit parallelen Grundflächen $ABCD$ und $A'B'C'D'$. Ist der Inhalt der Grundfläche $ABCD = G$, so ist die Solidität dieses senkrechten Parallelepipedums $= G.EE'$; also seine Hälfte $G.Ee$ ist der Ausdruck für die Solidität des Körpers $ABCDdcba$.

4.

Es sei $ABCcba$ ein abgekürztes dreikantiges Prisma, durch dessen parallele Kanten Aa, Bb, Cc die Ecken der beiden nicht parallelen Grundflächen ABC und abc verbunden werden. Die Grundfläche ABC mag wieder auf die Kanten Aa, Bb, Cc senkrecht gerichtet sein; ihre Gröfse sei $= \triangle$; die Solidität des Körpers sei P.

Setzen wir $P = \triangle . l$, so bezeichnet l eine Gerade, welche länger als die kürzeste der Kanten Aa, Bb, Cc und zugleich kürzer als die längste unter ihnen ist.

Man halbire die Seiten der beiden Grundflächen; A', B', C', a', b', c' seien die Mitten der Seiten BC, AC, AB, bc, ac, ab, und ziehe die Geraden AA', BB', CC', welche sich bekanntlich in einem Puncte V schneiden, und auch die Geraden aa', bb', cc', welche sich in v schneiden. Man ziehe noch $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$, wovon die Geraden AA', BB', CC', aa', bb', cc' in A'', B'', C'', a'', b'', c'' geschnitten werden. Es sind dann die Geraden Aa, $A'a'$, $A''a''$, Bb, $B'b'$, $B''b''$, Cc, $C'c'$, $C''c''$, Vv sämmtlich parallel, und man beweiset ohne Schwierigkeit:

$$Aa + Bb + Cc = A'a' + B'b' + C'c' = A''a'' + B''b'' + C''c'' = 3.Vv.$$

Durch diese Construction entsteht ein neues abgekürztes Prisma $A'B'C'c'b'a' = P'$, dessen Grundfläche $A'B'C' = \triangle'$ sei. Die Linie Vv ist das arith-

metische Mittel der Kanten des Körpers P und auch der Kanten des Körpers P', und hat also für beide Körper eine gleiche Bedeutung.

Um das Prisma P' herum liegen noch drei andere abgekürzte dreikantige Prismen, und der Körper P' ergänzt jedes derselben zu einem abgekürzten Parallelepipedum, diese drei Parallelepipeden zusammengenommen sind aber $= P + 2 . P'$. Die Soliditäten derselben finden sich (nach No. 3.):

$$AC'A'B'b'a'c'a = 2\triangle' . A''a'',$$
$$BC'A'B'b'a'c'b = 2\triangle' . B''b'',$$
$$CA'B'C'c'b'a'c = 2\triangle' . C''c'',$$

also

$$P + 2P' = 2\triangle'(A''a'' + B''b'' + C''c'') = 6\triangle' . Vv = (\triangle + 2\triangle') . Vv,$$

und also auch:

$$(P - \triangle . Vv) = 2 . (\triangle' . Vv - P').$$

Setzen wir nun das Vorhandensein einer allgemeinen Regel voraus, nach welcher diejenige Grundfläche, welche auf die drei Kanten senkrecht gerichtet ist, mit dem arithmetischen Mittel dieser Kanten multiplicirt entweder immer die Solidität des Körpers giebt, oder immer zu viel oder immer zu wenig giebt: so sehen wir, daſs die beiden letzten Annahmen ungereimt sind. Denn indem wir annehmen, daſs $P > \triangle . Vv$, also auch $P' > \triangle' . Vv$ sei, folgt aus der Beziehung $P - \triangle . Vv = 2(\triangle' . Vv - P')$, daſs $P' < \triangle' . Vv$ sei. Eben so führt die Annahme $P < \triangle . Vv$, also auch $P' < \triangle' . Vv$ zu einem Widerspruche, und nur die Annahme $P = \triangle . Vv$, also auch $P' = \triangle' . Vv$ kann neben der bewiesenen Formel bestehen.

5.

Aber auch, ohne das Vorhandensein einer solchen allgemeinen Regel zu postuliren, gelangen wir auf die strengste Weise zum Ziele.

Wir dürfen setzen $P = \triangle(Vv + \pi)$ und $P' = \triangle'(Vv + \pi')$, in welchen Ausdrücken π und π' Linien bezeichnen, um welche Vv verlängert oder auch verkürzt werden müſste. Die Substitution dieser Ausdrücke giebt:

$$\triangle . \pi = -2\triangle'\pi',$$

und da $\triangle = 4 . \triangle'$ ist, so haben wir $\pi' = -2\pi$. Wenn also

$$P = \triangle . (Vv + \pi), \text{ so ist } P' = \triangle'(Vv - 2\pi).$$

Wenden wir nun dieselbe Construction, wodurch P' aus P hergeleitet wurde, auf P'' an, so finden wir eben so:

$$P'' = \triangle''(Vv + 4\pi) \text{ und } \triangle'' = \frac{\triangle}{16}.$$

Die Fortsetzung giebt überhaupt:

$$\overset{n}{P} = \overset{n}{\triangle}(Vv + (-2)^n.\pi).$$

Die Grundfläche $\overset{n}{\triangle}$ dieses Körpers ist $= \frac{\triangle}{4^n}$; und seine drei parallelen Kanten $\overset{n}{A}\overset{n}{a}$, $\overset{n}{B}\overset{n}{b}$, $\overset{n}{C}\overset{n}{c}$ sind noch immer so beschaffen, daſs:

$$Vv = \frac{\overset{n}{A}\overset{n}{a} + \overset{n}{B}\overset{n}{b} + \overset{n}{C}\overset{n}{c}}{3}.$$

Die Solidität des Körpers $\overset{n}{P}$ ist aber auch $= \overset{n}{\triangle}.l$, wo l eine Linie bezeichnet, welche länger als die kürzeste und kürzer als die längste der drei Kanten des Körpers $\overset{n}{P}$ und also um so weniger von Vv verschieden sein kann, je gröſser die ganze Zahl n genommen wird, oder welche selbst $= Vv$ ist. Da nun aber

$$l = Vv + (-2)^n.\pi$$

ist, so kann n leicht groſs genug genommen werden (ohne nöthig zu haben diese Zahl unendlich groſs zu nehmen), daſs die Gleichung $l = Vv + (-2)^n.\pi$ ungereimt ist, wofern π eine wirkliche Länge hätte. Daher ist $\pi = 0$ und also $l = Vv$, oder:

$$P = \triangle.Vv \quad \text{(wie in No. 4.)}.$$

Die Modification der so eben bewiesenen Regel für den Fall, daſs keine der beiden Grundflächen auf die Kanten senkrecht gerichtet ist, darf hier der Kürze und ihrer Einfachheit wegen übergangen werden.

5.

Das abgekürzte Prisma P verwandelt sich in eine viereckige Pyramide, deren Höhe $= Cc$ ist, wenn wir die Ebene abc also legen, daſs a mit A und b mit B zusammenfällt.

Wir können aber auch eine viereckige Pyramide $ABCD$ als den Unterschied zweier dreikantiger abgekürzter Prismen darstellen. Es sei D der Scheitel, Dd die Höhe und ABC die Grundfläche der Pyramide. Man verlängere AB willkürlich und ziehe durch C und D zwei andere Gerade parallel zu AB. Durch diese drei parallelen Linien legen wir senkrecht eine Ebene PQR, wovon die verlängerte AB in Q, die durch D gehende Parallele in P und die durch C gehende in R geschnitten werde. Die Pyramide $ABCD$ ist dann der Unterschied der beiden abgekürzten Prismen $PQRDBC$ und $PQRDAC$. Ihre Soliditäten sind (nach No. 4.) ausgedrückt durch $PQR.\left(\frac{PD+QB+RC}{3}\right)$ und $PQR.\left(\frac{PD+QA+RC}{3}\right)$; der Un-

terschied derselben ist also $PQR.\frac{AB}{3}$. Aber der Inhalt des Dreiecks PQR ist $=\frac{QR.Dd}{2}$, also ist die Pyramide $ABCD=\frac{AB.QR}{2}.\frac{Dd}{3}$; da aber $\frac{AB.QR}{2}$ der Inhalt des Dreiecks ABC ist, so hat man endlich:

$$ABCD = ABC.\frac{Dd}{3}$$

zum Ausdrucke der (bekannten) Regel, welche ohne Mühe auf mehreckige Pyramiden ausgedehnt wird.

Diese Herleitung bedurfte also gar nicht der Vorstellung des Unendlichkleinen oder einer ins Unendliche fortgehenden Zerlegung, oder endlich der Summation einer unendlichen Reihe, deren Anwendung im vorliegenden Falle unschicklich ist. Sie empfiehlt sich wegen ihrer Einfachheit und macht daher auf einen Platz in den Elementen der Geometrie Anspruch, vorzugsweise vor denjenigen Darstellungen, in denen die getadelten Hülfsmittel benutzt werden.

Cleve, im März 1829.

27.
Beweis des Lehrsatzes Bd. 3. S. 312. dieses Journals.

(Von einem Ungenannten.)

Der Lehrsatz selbst läfst sich folgendermafsen aussprechen:

Ist ein Vieleck von $4m+2$ Seiten in eine Linie zweiter Ordnung eingeschrieben, und liegen $2m$ Durchschnittspuncte je zweier Gegenseiten desselben in einer Geraden, so liegt auch der $2m+1$te in derselben Geraden.

Der Satz beruht auf dem folgenden, welcher sich in den „Anal. geom. Entwickelungen von Plücker, pag. 183." bewiesen findet:

Wenn in eine Curve zweiter Ordnung zwei Vierecke beschrieben werden, deren drei erste Seiten einer Geraden in denselben drei Puncten begegnen, so vereinigen sich auch die vierten Seiten derselben in einem Puncte dieser Geraden.

Hat man nun z. B. ein Zehneck, bei welchem die Durchschnittspuncte der Seiten 1 und 6, 2 und 7, 3 und 8, 4 und 9 in einer Geraden liegen, und schneidet man von demselben die Seiten 9, 10, 1 und 4, 5, 6 durch Diagonalen α und β ab, so erhält man ein Sechseck, dessen Seiten 2 und 7, 3 und 8, β und α sich paarweise in einer Geraden A begegnen. Ferner findet der obige Satz auf die beiden Vierecke aus den Seiten 9, 10, 1, α und 4, 5, 6, β Anwendung; es liegen aber die Durchschnittspuncte von 4 und 9, 1 und 6, in der Geraden A, also liegt auch der Durchschnittspunct von 5 und 10 in dieser Geraden. Auf dieselbe Art überzeugt man sich, dafs der Satz allgemein ist, indem derselbe für ein Vieleck von $4m+2$ Seiten gelten mufs, wenn er für ein Vieleck von $4m-2$ Seiten gilt.

28.

Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen.

(Von Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. und 14. in den beiden vorigen Heften.)

Dreizehnter Abschnitt.

Entwickelungen der Potenzial-Functionen eines zweitheiligen Arcus nach Potenzen des zweiten Theils.

§. 66.

Was die Entwickelung der Functionen $\mathfrak{Sin}(k+z)$ und $\mathfrak{Cos}(k+z)$ in Reihen, welche nach Potenzen von z fortschreiten, betrifft, so ist dieselbe sehr einfach. Da nemlich $\mathfrak{Cos}(k+z) = \mathfrak{Cos}\,k.\mathfrak{Cos}\,z + \mathfrak{Sin}\,k.\mathfrak{Sin}\,z$ und $\mathfrak{Sin}(k+z) = \mathfrak{Sin}\,k.\mathfrak{Cos}\,z + \mathfrak{Cos}\,k.\mathfrak{Sin}\,z$ ist, so substituire man nur für $\mathfrak{Cos}\,z$ und $\mathfrak{Sin}\,z$ die bekannten nach Potenzen von z fortgehenden Reihen und man hat auf der Stelle:

$$\mathfrak{Cos}(k+z) = \mathfrak{Cos}\,k + \mathfrak{Sin}\,k.\frac{z}{1'} + \mathfrak{Cos}\,k.\frac{z^2}{2'} + \mathfrak{Sin}\,k.\frac{z^3}{3'} + \mathfrak{Cos}\,k.\frac{z^4}{4'} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{Sin}(k+z) = \mathfrak{Sin}\,k + \mathfrak{Cos}\,k.\frac{z}{1'} + \mathfrak{Sin}\,k.\frac{z^2}{2'} + \mathfrak{Cos}\,k.\frac{z^3}{3'} + \mathfrak{Sin}\,k.\frac{z^4}{4'} + \text{etc.}$$

Setzt man, um zu den cyklischen Functionen überzugehen, $k\sqrt{-1}$ für k und $z\sqrt{-1}$ für z, so entstehen die beiden folgenden Reihen:

$$\cos(k+z) = \cos k - \sin k.\frac{z}{1} - \cos k.\frac{z^2}{2'} + \sin k.\frac{z^3}{3'} + \cos k.\frac{z^4}{4'} - - \text{etc.}$$

$$\sin(k+z) = \sin k + \cos k.\frac{z}{1} - \sin k.\frac{z^2}{2'} - \cos k.\frac{z^3}{3'} + \sin k.\frac{z^4}{4'} + - \text{etc.}$$

In den beiden letzten Reihen folgen immer auf zwei Vorzeichen $-$ zwei Vorzeichen $+$ und umgekehrt.

Gröfsere Schwierigkeit bietet aber die Entwickelung des Quotienten $\frac{1}{\cos(k+z)}$ und die davon abhängende der Function $\mathfrak{L}(k+z)$ in eine nach Potenzen von z fortgehende Reihe dar. Diese Entwickelung fordert die Kenntnifs der höheren Differentiale der Function $\frac{1}{\cos k} = U$, und es beginnt daher die Untersuchung mit der Erforschung des Gesetzes, nach welchem diese höheren Differentiale fortgehen, da das Differentiiren selbst

nur ein Übergehen von einem Differentiale zu dem nächst höheren, und also ein recurrirendes ist.

§. 67.

Setzen wir zur Vereinfachung $U=\frac{1}{\cos k}$; $\overset{1}{U}=\frac{\partial U}{\partial k}$; $\overset{2}{U}=\frac{\partial^2 U}{\partial k^2}$; u. s. w. und allgemein $\overset{n}{U}=\frac{\partial^n U}{\partial k^n}$. Werden die ersten Differentialverhältnisse $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, $\overset{4}{U}$, etc. durch das gewöhnliche Differentüren hergeleitet, so erkennt man bald, dafs die Form derselben ziemlich verschieden ist, je nachdem ein solches Verhältnifs von gerader oder ungerader Ordnung ist. Für $\overset{2r}{U}$ findet man im Allgemeinen folgende Form:

$$\overset{2r}{U} = S\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+1)} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

und es sind die Coëfficienten $\varphi(r,0)$, $\varphi(r,1)$, $\varphi(r,2)$ u. s. w. nur noch die einzigen unbekannten Gröfsen.

Um diese Coëfficienten zu finden, ist es nothwendig, den vorgeleg-Ausdruck noch einmal zu differentüren; dies giebt:

$$\overset{2r+1}{U} = S(2\alpha+1).\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+2)}.\sin k \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Das wiederholte Differentüren führt also zu dem Ausdrucke:

$$\overset{2r+2}{U} = \left\{\begin{array}{l} S(2\alpha+1)(2\alpha+2).\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+3)}.\sin k^2 \\ +S(2\alpha+1).\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+1)} \end{array}\right\} \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Wird nun noch $1-\cos k^2$ für das vorkommende $\sin k^2$ gesetzt, so läfst sich der Ausdruck zusammenziehen, wie folgt:

$$\overset{2r+2}{U}=S[2\alpha(2\alpha-1).\varphi(r,\beta)-(2\alpha+1)^2.\varphi(r,\beta-1)].\cos k^{-(2\alpha+1)} \text{ cond. } (\alpha+\beta=r+1).$$

Er fällt also wieder unter die bereits bekannte Form:

$$\overset{2r+2}{U} = S\varphi(r+1,\beta).\cos k^{-(2\alpha+1)} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r+1),$$

und es führt die Identificirung beider Ausdrücke zu der folgenden Coëfficienten-Beziehung:

$$\varphi(r+1,r+1-m) = 2m(2m-1).\varphi(r,r+1-m)-(2m+1)^2.\varphi(r,r-m).$$

Nach dieser ziemlich einfachen Recursionsformel liefsen sich also die unbekannten Coëfficienten berechnen. Man vereinfacht sie aber noch sehr, wenn man setzt:

$$(-1)^{r-m}.\varphi(r,r-m).(2m)' \text{ für } \varphi(r,r-m)$$

und diese Substitution gleichmäfsig durchführt. Die Recursionsformel geht dadurch über in:

$$\varphi(r+1,r+1-m) = \varphi(r,r+1-m)+(2m+1)^2.\varphi(r,r-m)$$

und man hat dann allgemein:

$$\overset{2r}{U} = S(-1)^{\beta}.(2\alpha)'.\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+1)} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Die so eben gefundene Recursionsformel hat die gröſste Ähnlichkeit mit einer bekannten Beziehung, welche unter Combinationsclassen Statt findet, die bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente gebildet sind. Nimmt man nemlich zur Scale die Reihe der Quadrate der auf einander folgenden ersten ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, und bezeichnet man die Scale auf folgende Art:

$$(m) = (1^2, 3^2, 5^2, \ldots . (2m+1)^2),$$

so hat diese Scale offenbar $(m+1)$ Elemente. Soll weiter das Zeichen $\underset{(m)}{\overset{n}{C}}$ die aus den Elementen der geschlossenen Scale (m) bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildete Combinationsclasse des $n$ten Grades bezeichnen, so ist bekanntlich auch:

$$\underset{(m)}{\overset{r+1-m}{C}} = \underset{(m-1)}{\overset{r+1-m}{C}} + (2m+1)^2.\underset{(m)}{\overset{r-m}{C}}.$$

Da nun diese Formel offenbar mit der vorhin gefundenen Recursionsformel zusammenfällt, so folgt aus dieser Übereinstimmung:

$$\varphi(r, r-m) = \underset{(m)}{\overset{r-m}{C}}.$$

Bei diesem Schlusse versteht es sich aber von selbst, daſs er erst seine völlige Begründung erhält, wenn nachgewiesen wird, daſs dieses Resultat auch für die ersten Werthe der Zahlen r und m richtig ist, wovon man sich aber leicht überzeugen wird; denn auch völlig übereinstimmende Recursionsformeln lassen verschiedene Gröſsen aus der Rechnung hervorgehen, wenn die Gröſsen, von welchen die recurrirende Rechnung ausgeht, verschieden sind. Die völlig übereinstimmenden Recursionsformeln im §. 32. und §. 33. sind ein Beispiel der Art.

§. 68.

Wenn man aber den nun bekannten Ausdruck für das höhere Differential:

$$\overset{2r}{U} = S(-1)^{\beta}.(2\alpha)'.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}}.\left(\frac{1}{\cos k}\right)^{2\alpha+1} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

noch einmal differentiirt, so hat man für ein Differentialverhältniſs von ungerader Ordnung allgemein den folgenden Ausdruck:

$$\overset{2r+1}{U} = \sin k.S(-1)^{\beta}.(2\alpha+1)'.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}}.\left(\frac{1}{\cos k}\right)^{2\alpha+2} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Die ersten Specialfälle dieser beiden allgemeinen Formeln sind die nachstehenden:

$$\overset{0}{U} = \frac{1}{\cos k}, \qquad \overset{1}{U} = \frac{\sin k}{\cos k^2},$$
$$\overset{2}{U} = \frac{2}{\cos k^3} - \frac{1}{\cos k}, \qquad \overset{3}{U} = \frac{6 \sin k}{\cos k^4} - \frac{\sin k}{\cos k^2},$$
$$\overset{4}{U} = \frac{24}{\cos k^5} - \frac{20}{\cos k^3} + \frac{1}{\cos k}, \qquad \overset{5}{U} = \frac{120 \sin k}{\cos k^6} - \frac{60 \sin k}{\cos k^4} + \frac{\sin k}{\cos k^2},$$
$$\overset{6}{U} = \frac{720}{\cos k^7} - \frac{840}{\cos k^5} + \frac{182}{\cos k^3} - \frac{1}{\cos k}.$$

Die Ausdrücke werden immer zusammengesetzter, je weiter man fortgeht, und es ist z. B.

$$\overset{12}{U} = \frac{479001600}{\cos k^{13}} - \frac{1037836800}{\cos k^{11}} + \frac{743783040}{\cos k^9} - \frac{197271360}{\cos k^7} + \frac{15159144}{\cos k^5}$$
$$- \frac{132860}{\cos k^3} + \frac{1}{\cos k}.$$

Gestützt auf die beiden obigen, zur independenten Bestimmung dienenden und das allgemeine Gesetz des Fortschritts deutlich aussprechenden Formeln haben wir also für den Quotienten $\frac{1}{\cos(k+z)}$ die Reihe:

$$\frac{1}{\cos(k+z)} = U + \overset{1}{U}.\frac{z}{1} + \overset{2}{U}.\frac{z^2}{2'} + \overset{3}{U}.\frac{z^3}{3'} + \overset{4}{U}.\frac{z^4}{4'} + \text{etc.},$$

welche leicht auf hyperbolische Functionen übertragen werden kann. Bemerkt man ferner, dafs $\partial \mathfrak{L}(k+z) = \frac{\partial z}{\cos(k+z)}$ ist, wenn k als constant und z als veränderlich behandelt wird, so wird man die vorstehende Reihe mit ∂z multipliciren und dann integriren, wodurch man für $\mathfrak{L}(k+z)$ eine Reihe erhalten wird:

$$\mathfrak{L}(k+z) = \mathfrak{L}k + \frac{z}{\cos k} + \overset{1}{U}.\frac{z^2}{2'} + \overset{2}{U}.\frac{z^3}{3'} + \overset{3}{U}.\frac{z^4}{4'} + \overset{4}{U}.\frac{z^5}{5'} + \text{etc.}$$

welche einfacher durch $\mathfrak{L}(k+z) = \mathfrak{L}k + S\,\frac{\overset{\alpha}{U}.z^{\alpha+1}}{(\alpha+1)'}$ ausgedrückt wird.

§. 6.

Unter den besonderen Werthen für k ist offenbar der Werth $k=0$ von Wichtigkeit; denn da hierdurch $\cos k = 1$ und $\sin k = 0$ wird, so sind die Coëfficienten: $\overset{1}{U}$, $\overset{3}{U}$, $\overset{5}{U}$, etc., welche ungerade Zeigezahlen tragen, einzeln Null, weil ihre Ausdrücke den Factor $\sin k$ tragen; auch ist nun $\mathfrak{L}k = 0$. Man erhält also:

$$\mathfrak{L}z = S\left\{\underset{\text{Für } k=0}{\overset{2\alpha}{U}}\right\}.\frac{z^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}.$$

Setzt man weiter $\overset{r}{u} = \overset{2r}{U}$ für $k=0$, wie im §. 48., so erhält man für $\overset{r}{u}$ den allgemeinen zur independenten Bestimmung von $\overset{r}{u}$ dienenden Ausdruck:

$$\overset{r}{u} = S(-1)^{\beta}.(2\alpha)^{\cdot}.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Aus dem für $\overset{12}{U}$ angegebenen Ausdrucke folgt also z. B., da nun $r=6$ ist;

$$\begin{array}{rrr} \overset{12}{U} = & +\ 479001600 & -\ 1037836800 \\ & +\ 743783040 & -\ 197271360 \\ & +\ 15159144 & -\ 132860 \\ & +\ 1 & \\ \hline \text{Summe:} & +1237943785 & -1235241020 \end{array}$$

$$\text{oder } \overset{6}{u} = 2702765 \quad (\text{wie im §. 42.}).$$

Für die in den Ausdrücken $\overset{r}{U}$ und $\overset{r}{u}$ vorkommenden Combinationsclassen aus den Elementen der Scale $(m) = \{1^2, 3^2, 5^2, \ldots (2m+1)^2\}$ werden später andere Ausdrücke nachgewiesen werden, wodurch übrigens ihre Berechnung keinesweges erleichtert wird, — jeder in der Combinationslehre ein wenig Erfahrene wird in Anwendung bekannter combinatorischer Beziehungen im vorliegenden Falle ungleich schneller und sicherer zum Ziele gelangen.

Setzt man aber $k=\frac{\pi}{4}$, so ist $\sin k = \cos k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und man findet die folgenden Zahlen: $\overset{0}{U}=\sqrt{2}$; $\overset{1}{U}=\sqrt{2}$; $\overset{2}{U}=3\sqrt{2}$; $\overset{3}{U}=11\sqrt{2}$; $\overset{4}{U}=57\sqrt{2}$; $\overset{5}{U}=361\sqrt{2}$; $\overset{6}{U}=2763\sqrt{2}$; $\overset{7}{U}=34611\sqrt{2}$; $\overset{8}{U}=330737\sqrt{2}$ u. s. w. Man berechnet diese Zahlen aber leichter recurrirend; setzt man nemlich:

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)} = \left(S(-1)^{\alpha}\overset{\alpha}{a}.\frac{z^{\alpha}}{\alpha'}\right).\sqrt{2},$$

so findet man leicht die folgende Recursionsformel:

$$\overset{n}{a} = \underset{1'}{\overset{1}{[n]}}.\overset{n-1}{a} + \underset{2'}{\overset{2}{[n]}}.\overset{n-2}{a} - \underset{3'}{\overset{3}{[n]}}.\overset{n-3}{a} - \underset{4'}{\overset{4}{[n]}}.\overset{n-4}{a} + \underset{5'}{\overset{5}{[n]}}.\overset{n-5}{a} + \underset{6'}{\overset{6}{[n]}}.\overset{n-6}{a} - - \text{etc.}$$

In dieser Formel wechseln immer zwei Vorzeichen Minus mit zwei Vorzeichen Plus und umgekehrt ab. Man hat also:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}.\left(z+\frac{z^2}{2'}+3.\frac{z^3}{3'}+11.\frac{z^4}{4'}+57.\frac{z^5}{5'}+361.\frac{z^6}{6'}\right.$$
$$\left.+2763.\frac{z^7}{7'}+34611.\frac{z^8}{8'}+330737.\frac{z^9}{9'}+\text{etc.}\right).$$

Was das erste Glied $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ betrifft, so hat man $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1$, also $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ und $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, also ist $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}$, und also

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \log(1+\sqrt{2}).$$

Man findet aber noch leichter den Werth von $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, wenn man in einer von den beiden ersten Formeln des §. 65. für das da vorkommende v setzt den Werth $v = \frac{1}{2}$.

Setzt man in der vorigen Formel $-z$ für z, so hat man eine Reihe, welche von der vorigen subtrahirt wird, und dann giebt:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}+z\right)$$
$$=\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}-z\right)+2\sqrt{2}\left(z+3.\frac{z^3}{3'}+57.\frac{z^5}{5'}+2763.\frac{z^7}{7'}+330737.\frac{z^9}{9'}+\text{etc.}\right).$$

Ähnliche und zum Theil noch einfachere Formeln findet man, wenn $k=\frac{\pi}{6}$ oder $k=\frac{\pi}{3}$ gesetzt wird.

Zusatz. Setzt man $k\sqrt{-1}$ für k und $z\sqrt{-1}$ für z, so gelangt man noch zu einer Reihe für $\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,(k+z)}$. Setzt man nemlich:

$$\overset{2r}{U} = S(-1)^{\beta}(2\alpha)'\overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}}\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^{2\alpha+1} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$
$$\overset{2r+1}{U} = \left(S(-1)^{\beta}(2\alpha+1)'\overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}}\left(\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,k}\right)^{2\alpha+1}\right).\mathfrak{Sin}\,k \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

so hat man

$$\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,(k+z)} = U - \overset{1}{U}.\frac{z^1}{1'} - \overset{2}{U}.\frac{z^2}{2'} + \overset{3}{U}.\frac{z^3}{3'} + \overset{4}{U}.\frac{z^4}{4'} - \overset{5}{U}.\frac{z^5}{5'} - \text{etc.}$$

und

$$l(k+z) = lk + Uz - \overset{1}{U}.\frac{z^2}{2'} - \overset{2}{U}.\frac{z^3}{3'} + \overset{3}{U}.\frac{z^4}{4'} + \overset{4}{U}.\frac{z^5}{5'} + \overset{5}{U}.\frac{z^6}{6'} - \text{etc.}$$

In beiden Reihen folgen auf zwei Glieder mit den Vorzeichen Minus jedesmal zwei Glieder mit den Vorzeichen Plus und umgekehrt.

§. 70.

Noch reicher an Folgerungen ist die Entwickelung von $\tang(k+v)$ in eine nach Potenzen von z fortgehende Reihe. Setzt man nemlich:

$$\overset{0}{z} = \tang k,$$

und bezeichnet man die höheren Differentialverhältnisse, wie folgt: $\overset{1}{z}=\frac{\partial \overset{0}{z}}{\partial k}$ und allgemein $\overset{n}{z}=\frac{\partial^n \overset{0}{z}}{\partial k^n}$, so hat man zunächst: $\overset{1}{z}=\cos k^{-2}$, und man übersieht überhaupt bald, daſs der Ausdruck für $\overset{2r-1}{z}$ folgende Form haben könne:

$$\overset{2r-1}{z} = S(-1)^{\beta}\varphi(r,\beta).\cos k^{-2\alpha} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Differentiirt man ihn, so erhält man:

$$\overset{2r}{z} = S(-1)^{\beta}.2\alpha.\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+1)}.\sin k \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Wird noch einmal differentiirt, so erhält man:

$$\overset{2r+1}{z} = S(-1)^{\beta}2\alpha(2\alpha+1).\varphi(r,\beta).\cos k^{-(2\alpha+2)} + S(-1)^{\beta+1}(2\alpha)^2.\varphi(r,\beta).\cos k^{-2\alpha}$$

mit der beiden Haupttheilen gemeinschaftlichen Bedingungsgleichung $\alpha+\beta = r$. Man kann aber diesen Ausdruck wieder unter die Form:

$$\overset{2r+1}{z} = S(-1)^{\beta}\varphi(r+1,\beta).\cos k^{-2\alpha} \qquad \text{cond.}\ (\alpha+\beta = r+1)$$

bringen und erhält also die Recursionsformel:

$$\varphi(r+1,r+1-m) = (2m-1)(2m-2).\varphi(r,r+1-m) + (2m)^2.\varphi(r,r-m).$$

Setzt man aber $(2m-1)'.2^{2r-2m}.\varphi(r,r-m)$ für $\varphi(r,r-m)$, so geht die Recursionsformel dadurch über in:

$$\varphi(r+1,r+1-m) = \varphi(r,r+1-m) + m^2.\varphi(r,r-m)$$

und nach ihr können dann die unbekannten Vorzahlen im Ausdrucke:

$$\overset{2r-1}{z} = S(-1)^{\beta}.2^{2\beta}.(2\alpha-1)'.\varphi(r,\beta).\left(\frac{1}{\cos k}\right)^{2\alpha} \qquad \text{cond.}\ (\alpha+\beta = r)$$

berechnet werden. Aber man erkennt auch aus ihr, dafs der Coëfficient $\varphi(r,r-m)$ eine aus den Quadraten der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente gebildete Combinationsclasse ist. Nimmt man nemlich die Scale:

$$(m) = (1^2, 2^2, 3^2, \ldots . m^2),$$

welche aus m Elementen besteht, so erhellet auf ähnliche Art, wie im §. 67., dafs allgemein:

$$\varphi(r,r-m) = \underset{(m)}{\overset{r-m}{C}}$$

sei, und man hat also nun:

$$\left.\begin{aligned} \overset{2r-1}{z} &= S(-1)^{\beta}.2^{2\beta}.(2\alpha-1)'.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}}.\left(\frac{1}{\cos k}\right)^{2\alpha} \\ \overset{2r}{z} &= \sin k.S(-1)^{\beta}.2^{2\beta}.(2\alpha)'.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}}.\left(\frac{1}{\cos k}\right)^{2\alpha+1} \end{aligned}\right\} \text{cond.}\ (\alpha+\beta = r).$$

In beiden Ausdrücken darf aber auch noch sogleich $\alpha+1$ für α gesetzt werden, weil das Glied für $\beta = r$ oder $\alpha = 0$ selbst Null ist.

§. 71.

Gestützt auf diese beiden zur independenten Bestimmung dienenden Formeln hat man nun in Anwendung des Taylorschen Satzes:

$$\tang(k+v) = \overset{0}{z} + \overset{1}{z}.\frac{v}{1} + \overset{2}{z}.\frac{v^2}{2'} + \overset{3}{z}.\frac{v^3}{3'} + \overset{4}{z}.\frac{v^4}{4'} + \overset{5}{z}.\frac{v^5}{5'} + \text{etc.}$$

Setzt man zunächst $k=0$, so ist $\sin k = 0$ und $\cos k = 1$; es fallen also von den Gröfsen $\overset{0}{z}, \overset{1}{z}, \overset{2}{z}, \overset{3}{z}$, etc. alle diejenigen weg, welche eine

gerade Zeigezahl tragen, weil sie den Factor $\sin k$ enthalten. Setzt man weiter allgemein:

$$\overset{r-1}{w} = \overset{2r-1}{z} \quad \text{für} \quad k = 0,$$

so findet man für $\operatorname{tang} v$ die nach Potenzen von v fortgehende Reihe:

$$\operatorname{tang} v = v + \overset{1}{w}.\frac{v^3}{3'} + \overset{2}{w}.\frac{v^5}{5'} + \overset{3}{w}.\frac{v^7}{7'} + \overset{4}{w}.\frac{v^9}{9'} + \text{etc.}$$

welche mit der im §. 44. für $\operatorname{tang} x$ gefundenen zusammenfällt; es haben auch die Coëfficienten $\overset{1}{w}$, $\overset{2}{w}$, $\overset{3}{w}$, $\overset{4}{w}$ etc. dieselbe Bedeutung, wie im §. 43. und §. 44. Jetzt haben wir aber für die independente Berechnung dieser Coëfficienten die allgemeine Formel:

$$\overset{r}{w} = S(-1)^\beta . 4^\beta . (2\alpha+1)' . \overset{\beta}{\underset{(\alpha+1)}{C}} \qquad \text{cond.} \ (\alpha + \beta = r).$$

Da nun aber $(2\alpha+1)'$ immer durch 2^α, und in der Regel noch durch eine höhere Potenz von 2 theilbar ist, so ist also das allgemeine Glied durch $2^{2\beta+\alpha} = 2^{2r-\alpha}$ oder eine noch höhere Potenz von 2 theilbar; daher ist überhaupt $\overset{r}{w}$ immer theilbar durch 2^r, aber in der Regel selbst durch eine Potenz von 2, deren Exponent entweder $=2r$ oder doch nur wenig $<2r$ ist.

Die Berechnung der Werthe von $\overset{\beta}{\underset{(\alpha+1)}{C}}$ für eine gegebene Summe $(1+\alpha+\beta = r+1)$ gelingt sehr einfach, indem man die Quadrate der ersten ganzen Zahlen bis zur Zahl r^2 in eine Horizontalreihe nach fallender Gröfse, etwa von der Linken zur Rechten stellt, und ihre allmäligen Summen von der Rechten zur Linken nimmt; diese sind dann schon Combinationsclassen des ersten Grades; unter sie werden von der Rechten zur Linken die Quadratzahlen Glied unter Glied gestellt; die über einander stehenden Zahlen werden multiplicirt, und die Producte wieder allmälig von der Rechten zur Linken addirt; die Summen sind die Combinationsclassen des zweiten Grades; so fährt man überhaupt fort nach folgendem Rechnungs-Schema:

. . . .	25	16	9	4	1	
Combinations-Classen 1sten Grades	55)	30)	14)	5)	1)	Summen.
		16	9	4	1	Elemente.
		480	126	20	1	Producte.
Classen 2ten Grades . .		627)	147)	21)	1)	Summen.
			9	4	1	Elemente.
			1323	84	1	Producte.
Classen 3ten Grades			1408)	85)	1)	Summen.
				4	1	Elemente.
				340	1	Producte.
Classen 4ten Grades				431)	1)	Summen.
					1	Element.
Classe 5ten Grades					1	

Hiernach sind die folgenden Zahlen berechnet worden:

$\underset{(\alpha+1)}{\overset{\beta}{C}}$	$\alpha+\beta+1=11$ $r=10$	$\alpha+\beta+1=10$ $r=9$	$\alpha+\beta+1=9$ $r=8$	$\alpha+\beta+1=8$ $r=7$	$\alpha+\beta+1=7$ $r=6$	$\alpha+\beta+1=6$ $r=5$	$\alpha+\beta+1=5$ $r=4$	$\alpha+\beta+1=4$ $r=3$	$\alpha+\beta+1=3$ $r=2$	$\alpha+\beta+1=2$ $r=1$	$r=0$
$\beta=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\beta=1$	385	285	204	140	91	55	30	14	5	1	
$\beta=2$	48279	25194	12138	5278	2002	627	147	21	1		
$\beta=3$	2458676	846260	251498	61490	11440	1408	85	1			
$\beta=4$	52253971	10787231	1733303	196053	13013	341	1				
$\beta=5$	434928221	46587905	3255330	118482	1365	1					
$\beta=6$	1217854704	53157079	1071799	5461	1						
$\beta=7$	860181300	9668036	21845	1							
$\beta=8$	87099705	87381	1								
$\beta=9$	349525	1									
$\beta=10$	1										

So hat man z. B. für $r=3$ die folgenden Zahlen:

$$\overset{2}{w} = 4^0.7'.1 - 4^1.5'.14 + 4^2.3'.21 - 4^3.1'.1 = 5040 - 6720 + 2016 - 64$$

$$\text{Summe} = +7056 - 6784 = +272.$$

Also findet man $\overset{3}{w} = 272$, wie im §. 43.

Zusatz. Das so eben gezeigte mechanische Rechnungsverfahren kann auch bei der Ermittelung der Werthe der Combinationsclassen, welche in den Formeln des §. 68. und §. 69. vorkommen, und welche aus den Elementen einer anderen Scale gebildet werden müssen, angewandt werden.

§. 72.

Der besondere Fall, wo $k=\frac{\pi}{4}$, verdient ebenfalls eine besondere Beachtung. Setzt man nun noch $\frac{1}{2}x$ für v, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = S\overset{\alpha}{u}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} + S\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}$$

gesetzt, allgemein:

$$\overset{r}{u} = (\tfrac{1}{2})^{2r}.\overset{2r}{z} \quad \text{für} \quad k=\frac{\pi}{4} \quad \text{und}$$

$$\overset{r}{w} = (\tfrac{1}{2})^{2r+1}.\overset{2r+1}{z} \quad \text{für} \quad k=\frac{\pi}{4}.$$

Da aber $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so hat man auf der Stelle:

$$\overset{r}{u} = S(-1)^\beta \frac{(2\alpha)'}{2^\alpha}.\underset{(\alpha)}{\overset{\beta}{C}} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

$$\overset{r}{w} = S(-1)^\beta \frac{(2\alpha+1)'}{2^\alpha}.\underset{(\alpha+1)}{\overset{\beta}{C}} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Da immer $(2\alpha)'$ und also auch $(2\alpha+1)'$ durch 2^α theilbar ist, so sind also die Coëfficienten $\frac{(2\alpha)'}{2^\alpha}$ und $\frac{(2\alpha+1)'}{2^\alpha}$, welche in diesen Ausdrücken vorkommen, ganze Zahlen.

Um nun noch zu zeigen, dafs die Coëfficienten $\overset{r}{u}$ und $\overset{r}{w}$ mit den im §. 42., §. 43. und an noch späteren Stellen eben so bezeichneten dieselben sind, dienen die beiden Formeln:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{2}{\cos x} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\operatorname{tang} x,$$

durch deren Anwendung man findet:

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}x = \frac{1}{\cos x} = S\overset{\alpha}{u}.\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)'} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}x = \operatorname{tang} x = S\overset{\alpha}{w}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'}.$$

Es sind also sowohl zur independenten Berechnung der Coëfficienten $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$, etc., als auch der Coëfficienten $\overset{1}{w}$, $\overset{2}{w}$, $\overset{3}{w}$, etc. zwei allgemeine Formeln angegeben worden, welche, wie man sieht, ziemlich einfach sind.

Vierzehnter Abschnitt.

Geometrische Constructionen für die Beziehungen zwischen den Potenzial-Functionen, ihren Arcus und den vermittelnden Functionen.

Die gleichseitige Hyperbel.

§. 73.

Wie die Beziehungen zwischen den cyklischen Functionen und ihren Arcus am Kreise nachgewiesen werden, ist so allgemein bekannt, dafs es unpassend wäre, hier davon zu handeln; nicht ganz so bekannt ist die geometrische Nachweisung der Beziehungen zwischen den hyperbolischen Functionen an der gleichseitigen Hyperbel, von welcher diese Functionen den Namen hyperbolische erhalten.

Es sei (Taf. IV. Fig. 2.) die Gerade $AB=a$ die Halbaxe der gleichseitigen Hyperbel BM, und es seien die Coordinaten des Punctes M dieser Curve $AP=x$ und $PM=y$, so ist bekanntlich die Gleichung an die Curve:

$$y = \sqrt{(x^2-a^2)}.$$

Wird nun die Fläche des Sectors $ABM=\sigma$ gesetzt, so hat man:

$$\sigma = \triangle APM - \text{Fläche } BPM = \frac{xy}{2} - \int y\,\partial x,$$

oder auch:

$$\partial\sigma = \frac{x\,\partial y - y\,\partial x}{2}.$$

Wird aber die Gleichung an die Curve differentiirt, so hat man $y\,\partial y = x\,\partial x$, also $\partial y = \frac{x}{y}\,\partial x$. Daher findet man:

$$\partial\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial x}{y}, \quad \text{also auch} \quad \sigma = \frac{a^2}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Setzt man nun $k = \mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Cos} = \frac{x}{a}\right)$, so hat man umgekehrt:

$$1. \quad \mathfrak{Cos}\,k = \frac{x}{a}.$$

und man findet

$$\partial k = \frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} \quad (\text{nach §. 18.}).$$

Es ist demnach $\partial\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot\partial k$ und also $\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot k + \text{const.}$ Da nun für $x = a$ die Fläche $\sigma = 0$ werden mufs, und $\mathfrak{Cos}\,k = 1$, also $k = 0$ wird, so hat man const. $= 0$, und es ist demnach:

$$2. \quad \sigma = \frac{a^2}{2}\cdot k$$

Construirt man also mit dem Halbmesser a einen Kreissector, dessen Inhalt so grofs ist als der Inhalt des hyperbolischen Sectors σ, so ist der Quotient, welchen man erhält, wenn man den Bogen des Kreissectors durch seinen Radius a dividirt, der unbenannten Zahl k gleich, oder in anderen Worten: die unbenannte Zahl k ist dem Bogen des Kreissectors gleich, wenn der Radius a zur Einheit genommen wird.

Der Arcus k wird also aus dem bekannten Inhalte des hyperbolischen Sectors eben so gefunden, wie wenn dieser Sector ein cyklischer wäre; denn wenn er ein cyklischer wäre von der Gröfse σ, so hätte man ebenfalls $\sigma = \frac{a^2}{2}\cdot k$, wenn a der Halbmesser ist.

Aus der Gleichung $\mathfrak{Cos}\,k = \frac{x}{a} = \frac{AP}{AB}$ folgt nun aber leicht:

$$3. \quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}\,k = \frac{y}{a} = \frac{PM}{AB} \quad \text{und} \\ \mathfrak{Tang}\,k = \frac{y}{x} = \frac{PM}{AP} \end{cases}$$

§. 74.

Die so eben erhaltenen drei Gleichungen veranlassen nun folgende einfache Construction:

Man schneide von P aus nach dem Scheitel B hin von der Abscisse ein Stück $PD = AB = a$ ab und ziehe die Gerade MD, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck DPM, worin der Winkel an D mit φ bezeichnet werden mag.

Da $PM = y$ und $PD = a$ ist, so findet man

$$MD = x = AP.$$

Daher hat man

$$\cos\varphi = \frac{a}{x}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{a}.$$

Jede dieser Gleichungen führt zusammengehalten mit den Gleichungen (3.) des §. 73. zu einer den Zusammenhang zwischen den Arcus k und φ ausdrückenden neuen Gleichung, nemlich:

$$\varphi = lk, \quad \text{oder umgekehrt:} \quad k = \mathfrak{L}\varphi.$$

Wird der im hyperbolischen Sector befindliche Winkel $BAM = \psi$ gesetzt, so hat man $\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}$, und da die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie der Curve für den Punct M mit der Abscissenlinie bildet $= \frac{\partial y}{\partial x}$ und also $= \frac{x}{y}$ ist, so folgt, dafs dieser Winkel den Winkel ψ zu einem rechten Winkel ergänzt. Hierauf kann eine bequeme Construction der Tangente gegründet werden.

Aus den beiden Gleichungen $\sin\varphi = \frac{y}{x}$ und $\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}$ folgt ferner:

$$\sin\varphi = \operatorname{tang}\psi = \mathfrak{Tang}\,k.$$

Also ist $\psi = \frac{1}{2}l(2k)$ oder $k = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\psi)$, also auch $\mathfrak{L}\varphi = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\psi)$ und also $\varphi = l(\frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\psi))$, oder umgekehrt $\psi = \frac{1}{2}l(2\mathfrak{L}\varphi)$, auf ähnliche Art wie im Zusatze zu §. 40. Eine ausführlichere Behandlung der gleichseitigen Hyperbel kann hier offenbar der Zweck nicht sein.

Die Kettenlinie.

§. 75.

Es seien (Fig. 3.) die Geraden $AP = x$ und $PM = y$ die Coordinaten (für den Anfangspunct A) eines Punctes M einer Curve, deren Gleichung ist:

$$y = a \cdot \mathfrak{Cos}\frac{x}{a}.$$

Die Gröfse a heifse der Parameter der Curve. Man hat für $x=0$ offenbar $y=a$, und es ist also $AV=a$ oder der Parameter. Der Punct V heifse der Scheitel der Curve. Setzt man nemlich $-x$ für x, so bleibt y unverändert, und es theilt also der Punct V die Curve in zwei congruente Arme; die Gerade AW ist demnach eine Axe der Curve. Wenn x gröfser wird, so wird auch y gröfser und es ist y immer positiv. Daher liegt die Curve ganz auf einer Seite der Abscissenlinie PAp und entfernt sich immer mehr von ihr. Später wird gezeigt werden, dafs die Curve die sonst sogenannte **Kettenlinie** ist.

Differentiirt man die Gleichung an die Curve, so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x}=\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}$. Wird aber in M eine Tangente MT an die Curve gelegt, und der Winkel, welchen MT mit einer zur Abscissenlinie parallelen Mm bildet, $=\varphi$ gesetzt, so hat man auch $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\partial y}{\partial x}$, und es ist also:

$$\operatorname{tang}\varphi=\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}.$$

Setzt man also die unbenannte Zahl $\frac{x}{a}=k$, so hat man $\operatorname{tang}\varphi=\mathfrak{Sin}\,k$, und also

$$\varphi=lk,\ \text{oder umgekehrt:}\ k=\mathfrak{L}\varphi\ \text{und}\ x=a.k.$$

Durch diese drei Gleichungen sind die Beziehungen zwischen φ, k und x ausgedrückt. Die Gleichung an die Curve ist auch $y=a.\mathfrak{Cos}\,k$, und also auch:

$$y=\frac{a}{\cos\varphi}.$$

Wird der Bogen $VM=s$ gesetzt, so hat man $\partial s=\surd(\partial x^2+\partial y^2)$, und man findet $\partial s=\partial x\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{a}$; wird die Gleichung integrirt, so hat man:

$$s=a.\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{a}=a\,\mathfrak{Sin}\,k=a.\operatorname{tang}\varphi,$$

weil das Integral für $x=0$ verschwinden mufs. Wird diese Gleichung mit der zwischen x und y verbunden, so findet man:

$$y^2=a^2+s^2.$$

Es ist also immer $y>s$ und es nähern sich diese beiden Gröfsen ins Unendliche dem Verhältnisse der Gleichheit. Wird die Gleichung $s.\cot\varphi=a$ mit der Gleichung $y\cos\varphi=a$ verbunden, so hat man noch:

$$y.\sin\varphi=s.$$

§. 75.

Wird vom Fufspuncte P der Ordinate PM auf die Tangente MT das Loth PS gefällt, so entsteht das rechtwinklige Dreieck MPS, worin der Winkel $MPS = \varphi$ ist.

Die beiden Katheten dieses Dreiecks findet man leicht:

$MS = s =$ Bogen VM und

$PS = a =$ dem Parameter AV, und also constant.

Die Hypothenuse PM ist $= y$ und also $y^2 = a^2 + s^2$, wie vorhin.

Stellt also $KSPL$ ein Lineal in der Form eines Rechtecks, dessen Breite $PS = KL = a$ ist, vor, so kann man die eine Seite dieses Lineals, das mit dem Puncte S sich anfänglich in V und mit dem Puncte P dann in A befindet, an der convexen Seite der Curve drehen oder abdrücken, und die freigewordene Seite SM erscheint dann als von dem Bogen VM abgewickelt, mit dem sie gleich lang ist; die andere Ecke P des Lineals wird durch eine solche Bewegung genöthigt, eine gerade Linie AP zu beschreiben. Es scheint, als ob diese auf die früheren einfachen Formeln gegründete Vorstellungsart der Abwickelung der Kettenlinie, wobei eine gerade Linie zu beschreiben der Punct P veranlafst wird, bisher nicht sei gekannt worden. Vielleicht liefse sich hieraus die Construction eines Instruments herleiten, mittelst dessen man umgekehrt statt der geraden Linie die Kettenlinie selbst beschreiben könnte, so wie man andere Curven z. B. die Kegelschnitte beschreibt. Denn obgleich es interessant sein mag, zu wissen wie man sich der Kettenlinie als einer Leitlinie bedienen könne, um eine gerade Linie zu beschreiben, so ist doch eine solche Art der Beschreibung unnütz.

§. 76.

Wird die Fläche $AVMP = f$ gesetzt, so ist $\partial f = y\,\partial x = a\,\partial x . \mathfrak{Cos}\frac{x}{a}$, und also

$$f = a^2 . \mathfrak{Sin}\frac{x}{a} = a\,s.$$

Daher ist die Fläche $f = VA$. Bogen $VM = PS . SM =$ dem Rechtecke $PSMR$.

Bezeichnet ϱ den Krümmungs-Halbmesser, so ist $\varrho = -\dfrac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$.

Aber $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ und $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a\cos\varphi}$, also hat man, wenn man nur die ab-

solute Gröſse des Krümmungs-Halbmessers mit ϱ bezeichnet:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi^2}.$$

Es ist sonst ϱ negativ, welches bekanntlich anzeigt, daſs die Curve gegen die Abscissenlinie convex ist. Man findet aber auch

$$\varrho = \frac{y^2}{a} = a + \frac{s^2}{a}.$$

Für den Punct V ist also der Krümmungs-Halbmesser $= a =$ dem Parameter AV. Wird die Normale MR bis zum Einschnitte N in die Linie AN verlängert, so ist bekanntlich:

$$PM^2 = MR.MN, \text{ oder } y^2 = a.MN \text{ und also } MN = \frac{y^2}{a},$$

oder einfacher:

$$\varrho = MN.$$

Wird also MN über M hinaus verlängert, und die Verlängerung $MO = MN$ genommen, so ist MO der Krümmungs-Halbmesser auch der Lage nach, und es ist O der Mittelpunct des Krümmungskreises; seine Coordinaten sind AQ und QO, und man findet leicht:

$$AQ = PN - AP \quad\text{und}\quad QO = 2.PM.$$

Man muſs, wenn man auf die Einfachheit der diese Curve betreffenden Beziehungen sieht, gestehen, daſs sie zu den interessantesten Curven gehört, welche die analytische Geometrie bisher als solche ausgezeichnet hat.

§. 77.

Nach diesen rein geometrischen Betrachtungen der mit der Gleichung $y = a.\mathfrak{Cos}\frac{x}{a}$ oder auch $y = a\frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{2}$ zusammengehörenden Curve fehlt noch der Beweis, daſs diese Curve die Kettenlinie sei, welche Benennung sie ihrer statischen Eigenschaft verdankt.

Ein gleichmäſsig dicker und schwerer Faden, welcher vollkommen biegsam ist, formt sich nemlich, wenn seine beiden Enden festgehalten werden, zu einer solchen Curve jedesmal, nur daſs ihr Parameter nicht immer derselbe ist. Diejenigen, welche über die Kettenlinie geschrieben haben, scheinen es nicht gekannt zu haben, daſs man die Gleichung an dieselbe unter die einfache Form $y = a.\mathfrak{Cos}\frac{x}{a}$ bringen könne, wenigstens ist in keinem der statischen Lehrbücher, welche dem Verfasser zu Gesichte kamen, die Gleichung an die Kettenlinie unter diese einfache Form

gebracht worden. Umgekehrt hat man die zu dieser Gleichung gehörige Curve untersucht, ohne dabei anzugeben, daſs diese Curve die Kettenlinie sei. Man findet z. B. im zweiten Theile des *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (*No.* 684. *pag.* 459.) eine, wenn auch nur gedrängte Darstellung der Eigenschaften dieser Curve, ohne die Angabe, daſs sie die Kettenlinie sei; dafür ist die historische Bemerkung hinzugefügt worden, daſs dieselbe Curve von Herrn Schubert (*Nova acta Acad. Petropol. T. IX. pag.* 178.) untersucht worden sei. Aber die Ansicht dieser Abhandlung stand mir nicht zu Gebote. Sollte aber auch in dieser Abhandlung die fragliche Behauptung ausgesprochen und nachgewiesen worden sein, so würde doch ein solcher Beweis nicht in Vieler Händen sein. Wir glauben daher auf ein allgemeiner verbreitetes Werk verweisen zu dürfen, welches jüngst auch ins Deutsche übersetzt worden ist: Lehrbuch der Mechanik von S. D. Poisson, aus dem Franz. übers. von Dr. J. C. Eduard Schmidt, Stuttgart und Tübingen bei Cotta 1825.

Im ersten Theile dieser Übersetzung (No. 142. pag. 155. u. ff.) ist für die Kettenlinie als Differential-Gleichung angegeben worden:

$$A.\sin c.\partial x - A.\cos c.\partial y = h.s.\partial x.$$

Beziehen wir diese Gleichung auf unsere Fig. 3., so ist $m'B = x$, $BC = y$ und Bogen $m'C = s$. Wir hingegen wollen $AD = x$, $DC = y$ und Bogen $VC = \sigma$ setzen. Setzen wir dann noch die constante Länge des Bogens $Vm' = l$, so ist $s = l - \sigma$. Wollen wir diese Abänderung in die Gleichung einführen, so müssen wir auſserdem noch $-\partial x$ für ∂x und $-\partial y$ für ∂y setzen, wodurch wir erhalten:

$$-A\sin c.\partial x + A\cos c.\partial y = -h(l-\sigma)\partial x,$$

oder auch

$$\frac{hl - A\sin c}{h} + \frac{A\cos c}{h}.\frac{\partial y}{\partial x} = \sigma.$$

Setzen wir weiter zur Abkürzung:

$$\alpha = \frac{A\cos c}{h} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{hl - A\sin c}{h},$$

so haben wir die einfachere Gleichung $\beta + \alpha.\frac{\partial y}{\partial x} = \sigma$, welche noch einmal differentiirt giebt:

$$\alpha.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Um nun zu einer Gleichung bloſs zwischen x und y zu gelangen, setzen wir $v = \frac{\partial y}{\partial x}$, so ist $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial x\sqrt{(1+v^2)}$, und also

$$\partial x = \alpha.\frac{\partial v}{\sqrt{(1+v^2)}}.$$

Die Integration nach §. 18. giebt auf der Stelle:

$$\alpha . \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin} = v) = x + \text{const.},$$

oder umgekehrt:

$$\mathfrak{Sin}\left(\frac{x + \text{const.}}{\alpha}\right) = v = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da nun für $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, d. h. im Puncte V auch $x = 0$ sein mufs, so hat man const. $= 0$ und also:

$$\partial y = \alpha . \frac{\partial x}{\alpha} . \mathfrak{Sin}\frac{x}{\alpha} \quad \text{oder} \quad y = \alpha\, \mathfrak{Cos}\frac{x}{\alpha} + \text{const.}$$

Für $x = 0$ mufs man $y = AV$ erhalten, und es ist also $AV = \alpha + \text{const.}$, weswegen:

$$y = \alpha\, \mathfrak{Cos}\frac{x}{\alpha} + AV - \alpha.$$

Bei der zu Anfang der Rechnung vorgenommenen Coordinatenveränderung wurde die Länge von AV unbestimmt gelassen; jetzt können wir AV so bestimmen, dafs die Gleichung am einfachsten wird, welches der Fall ist, wenn $AV = \alpha$ genommen wird. Die Gleichung an die Kettenlinie ist dann, wie behauptet wurde:

$$y = \alpha . \mathfrak{Cos}\frac{x}{\alpha},$$

und die Gröfse α ist ihr Parameter, welcher früher mit a bezeichnet wurde.

Zusatz. Herr Poisson gelangt durch eine ziemlich weitläufige Rechnung zu der Endgleichung:

$$y = \frac{A}{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}(1 - \sin c) . e^{\vartheta x} - \tfrac{1}{2}(1 + \sin c) . e^{-\vartheta x}\right],$$

worin $\vartheta = \frac{h}{A \cos c}$ ist, und welche man nicht ohne Mühe in die unsrige einfachere umrechnen wird.

§. 78.

Zum Ausdrucke der Spannung T an der Stelle C der Curve giebt Poisson ferner die Formel:

$$T = \sqrt{(A^2 - 2Ahs . \sin c + h^2 s^2)}.$$

Setzen wir in derselben für s den Werth $l - \sigma$, so erhält man leicht:

$$T^2 = A^2 + h^2 l^2 - 2Ah \sin c + 2h(A \sin c - hl) . \sigma + h^2 s^2.$$

Es ist aber $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{A^2 - 2Ahl \sin c + h^2 l^2}{h^2}$, und $A \sin c - hl = -h\beta$; also hat man

$$T^2 = h(\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\sigma + \sigma^2) = h . [(\sigma - \beta)^2 + \alpha^2].$$

Da nun nach §. 77. ferner $\sigma - \beta = \alpha . \mathfrak{Sin}\frac{x}{\alpha}$ ist, so finden wir

$$T = h . \alpha . \mathfrak{Cos}\frac{x}{\alpha} \quad \text{oder} \quad T = h . DC.$$

Wird das Gewicht des Bogens $VC = p$ gesetzt, so hat man $p = h.\sigma$, und also $h = p$ für $\sigma = 1$.

Der Ausdruck $T = h.DC$, auf welchen die Formel des Herrn Poisson von uns ist zusammengezogen worden, giebt nun zu erkennen, dafs die Spannungen an den verschiedenen Stellen der Curve den Perpendikeln proportional sind, welche man von ihnen auf die Abscissenlinie Pp fällt. Auch aus diesem Grunde ist die Linie Pp in Beziehung auf die Kettenlinie eine Linie von bemerkenswerther Lage.

§. 79.

Für die Brückenbaukunst ist die Frage von einiger Wichtigkeit, wie eine Kettenlinie construirt werden könne, welche durch zwei gegebene Puncte geht, die vom Scheitel der Curve einen gleichen gegebenen Abstand haben, oder was meist auf dasselbe hinausläuft, wie eine Brücke, welche die nach statischen Lehren vollkommenste Form haben soll, construirt werden könne, wenn die Breite des Flusses und die Höhe des Gewölbes gegeben sind.

Es sei die Breite des Flusses $Mm = 2b$ und die Höhe des Gewölbes $VW = h$.

Wäre der Parameter a der Curve oder der Winkel $mMT = \varphi$ bekannt, so wäre die Aufgabe der Construction so gut als gelöset; diese beiden Gröfsen müssen also vor allen gefunden werden, und dazu dient die Gleichung:

$$a + h = a.\mathfrak{Cos}\frac{b}{a}.$$

Setzen wir wieder $\frac{b}{a} = k$ und den Quotienten $\frac{b}{h} = w$, so ist w bekannt, und die Division giebt $\frac{h}{a} = \frac{k}{w}$, also $h = \frac{ak}{w}$; die Gleichung geht hierdurch über in:

$$a + \frac{ak}{w} = a.\mathfrak{Cos}\,k, \text{ oder einfacher: } 1 + \frac{k}{w} = \mathfrak{Cos}\,k.$$

Man hat also auch $\frac{k}{w} = \mathfrak{Cos}\,k - 1 = 2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}k^2$, und endlich:

$$1. \quad w = \frac{k}{2.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}k^2}.$$

Aus dieser Formel mufs der Werth von k gefunden werden, welches möglich sein mufs, weil $w = \frac{b}{h}$ bekannt ist. Wenn k gefunden ist, so hat man auf der Stelle:

$$2. \quad \varphi = lk \text{ und } a = \frac{b}{k}.$$

Es hält nicht schwer, k in eine nach Potenzen von w fortgehende Reihe zu entwickeln, aber die Rechnung gelingt ohnedies in der Regel ungleich schneller auf andere Art. Man thut aber wohl, schon jetzt cyklische Functionen statt der hyperbolischen in die Formel einzuführen. Setzt man nemlich $\mathfrak{L}\varphi$ für k, so ist

$$\mathfrak{Cos}\, k = \frac{1}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cos}\, k - 1 = \frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = 2\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}k^2.$$

Man hat also auch:

$$3. \quad w = \frac{\cos\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\cdot\mathfrak{L}\varphi,$$

und aus dieser Gleichung soll eigentlich unmittelbar der Winkel φ gefunden werden. Dieses Geschäft wird sehr erleichtert durch eine kleine Hülfstabelle, worin für die aufeinander folgenden, um einen Grad zunehmenden Werthe des Winkels φ die zugehörigen Werthe von w oder von $\log w$, wenn auch nur in fünf Decimalstellen angegeben sind, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, rückwärts aus der bekannten Gröfse von w den zugehörigen Werth von φ bis auf einen Grad genau und auch noch genauer zu bestimmen. Ist der Winkel φ bis dahin bekannt, so wird man ihn bald durch eine oder ein paar Proberechnungen selbst bis auf eine Minute genau finden. Trigonometrische Tafeln mit 5 Decimalziffern reichen zu diesen Proberechnungen hin.

§. 80.

Hat man den Winkel φ schon bis auf eine Minute genau gefunden, so sei $\varphi + \delta''$ der verbesserte Werth von φ, und man hat genau:

$$\log w = \log\cos(\varphi+\delta'') + \log\mathfrak{L}(\varphi+\delta'') - 2\log\sin(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\delta'') - \log 2.$$

Ferner sei

$$\log \overset{1}{w} = \log\cos\varphi + \log\mathfrak{L}\varphi - 2\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi - \log 2.$$

Setzt man nun:

$$1. \quad \log w - \log\overset{1}{w} = t,$$

so hat man offenbar:

$$t = [\log\cos(\varphi+\delta'') - \log\cos\varphi] + [\log\mathfrak{L}(\varphi+\delta'') - \log\mathfrak{L}\varphi]$$
$$- 2[\log\sin(\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{2}\delta'') - \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi].$$

Setzt man nun weiter:

$$\log\cos(\varphi+1'') = \log\cos\varphi - \triangle\log\cos\varphi,$$
$$\log\mathfrak{L}\,(\varphi+1'') = \log\mathfrak{L}\,\varphi + \triangle\log\mathfrak{L}\,\varphi,$$
$$\log\sin(\tfrac{1}{2}\varphi+1'') = \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \triangle\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\log\cos(\varphi+\delta'') - \log\cos\varphi &= -\delta.\triangle\log\cos\varphi,\\
\log\ \mathfrak{L}\ (\varphi+\delta'') - \log\mathfrak{L}\varphi &= \quad \delta.\triangle\log\mathfrak{L}\varphi,\\
\log\sin(\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{2}\delta'') - \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi &= \quad \frac{\delta}{2}.\triangle\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi,
\end{aligned}$$

und man findet nun leicht:

$$2.\qquad \delta = \frac{t}{\triangle\log\mathfrak{L}\varphi - \triangle\log\cos\varphi - \triangle\log\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Die Differenzen $\triangle\log\cos\varphi$ und $\triangle\log\sin\frac{1}{2}\varphi$ sind in den trigonometrischen Tafeln selbst angemerkt, hingegen ist die Differenz $\triangle\log\mathfrak{L}\varphi$ noch zu ermitteln, und dazu dient die Formel:

$$\triangle\log\mathfrak{L}\varphi = \frac{\log\mathfrak{L}(\varphi+1') - \log\mathfrak{L}\varphi}{60},$$

wenn man die alte Winkel-Eintheilung gebraucht; bei Anwendung der neuen Winkel-Eintheilung mufs diese Formel statt des Nenners 60 den Nenner 100 erhalten. Will man die Tabelle für die Werthe von $\mathfrak{L}k$ nicht gebrauchen, so findet man auch:

$$\triangle\log\mathfrak{L}\varphi = \frac{\log\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}.1'\right) - \log\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\right)}{60 \text{ oder } 100},$$

und alle in dieser Formel vorkommende Logarithmen sind briggische.

§. 81.

Um die so eben beschriebene Rechnungsweise durch ein Beispiel zu erläutern, sei $b=100$ und $h=79$. Ferner habe man den Winkel φ schon bis auf eine Sexagesimal-Minute gefunden: $\varphi = 61°\,10'$, also $\frac{\varphi}{2} = 30°\,35'$; $45°+\frac{\varphi}{2} = 75°\,35'$. Daraus findet man nach der Formel:

$$\log\overset{1}{w} = \log\cos\varphi - 2\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \log\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) + 0{,}0611857,$$

$$\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}589\,9546$$

Also

$$\begin{array}{lr}
\log\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) = & 0{,}770\,8186 - 1\\
\text{Dazu } \log\cos\varphi \ldots = & 9{,}683\,2843 - 10\\ \hline
\text{Summe} \ldots\ldots & 9{,}454\,1029 - 10\\
2\log\sin\frac{1}{2}\varphi \ldots & 9{,}413\,0788 - 10\\ \hline
\text{Rest} \ldots\ldots & 0{,}041\,0241\\
\text{Dazu} \ldots\ldots & 0{,}061\,1857\\ \hline
\log\overset{1}{w} = & 0{,}102\,2098\\
\log b = \ldots\ldots & 2{,}000\ 0000\\
\log h = \ldots\ldots & 1{,}897\ 6271\\ \hline
\log w = & 0{,}102\ 3729\\
\log\overset{1}{w} = & 0{,}102\ 2098\\ \hline
t = \ldots & 1631
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}+30''\right) = & 0{,}590\,2166\\
\log\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}+30''\right) = & 0{,}771\,0114 - 1\\
\log\log\operatorname{tang}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right) = & 0{,}770\,8186 - 1\\ \hline
\text{Rest} \ldots\ldots & 1928
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Also } \triangle\log\mathfrak{L}\varphi = \frac{1928}{60} = & 32{,}13\\
-\triangle\log\cos\varphi = & -38{,}2\\
-\triangle\log\sin\frac{1}{2}\varphi = & -35{,}7\\
\triangle\log\mathfrak{L}\varphi = & +32{,}13\\ \hline
& 32{,}13 - 73{,}9 = -41{,}77
\end{array}$$

$$\text{Also } \delta = \frac{1631}{-41{,}77} = \quad -39'' \ldots.$$
$$\varphi = \quad \cdot\, 61^\circ\, 10'\ \ 0''$$

Der verbesserte Werth von φ ist $= 61^\circ\ 9'\, 21''$.

Genauer noch findet man den unbekannten Winkel durch die folgende zweite Correction.

Nun ist

$$\varphi = 61^\circ\, 9'\, 20'' \text{ (gesetzt)},\ \frac{\varphi}{2} = 30^\circ\, 34'\, 40'' \text{ und } 45^\circ + \frac{\varphi}{2} = 75^\circ\ 34'\ 40''$$

$\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = 0{,}589\,7800$	
$\log\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = 9{,}770\,6900 - 10$	
Dazu $\log\cos\varphi$ . .	$= 9{,}683\,4373 - 10$
und	$0{,}061\,1857$
Summe	$9{,}515\,3130 - 10$
$2\log\sin\frac{1}{2}\varphi$ . . .	$9{,}412\,9364 - 10$
$\log \overset{\text{I}}{w}$	$0{,}102\,3766$
$\log w$	$0{,}102\,3729$
$t =$	-37

$\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} + 5''\right) = 0{,}589\,8236{,}5$	
$\log\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} + 5''\right) = 9{,}770\,7222 - 10$	
$\log\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$	$= 9{,}770\,6900 - 10$
Rest	322
Also $\triangle\log\mathfrak{L}\varphi = 32{,}2$	
$-\triangle\log\cos\varphi =$	$-38{,}3$
$-\triangle\log\sin\frac{1}{2}\varphi' =$	$-35{,}6$
Summe . . .	$= 32{,}2 - 73{,}9 = -41{,}7$

$$\text{und } \delta = \frac{-37}{-41{,}7} = 0'',887.$$

Daher hat man $\varphi = 61^\circ\, 9'\, 20'',89$, und dieser Werth ist denn sehr genau. Will man ihn nun noch genauer haben, so mufs man trigonometrische Tafeln mit mehr als sieben Decimalziffern in Anwendung bringen.

Zusatz. Die Formel $w = \frac{k}{2(\mathfrak{Sin}\frac{1}{2}k)^2}$ kann auch auf folgende Art benutzt werden. Setzt man $\mathfrak{Sin}\frac{1}{2}k = \operatorname{tang} l\frac{1}{2}k$ und $k = \mathfrak{L}\varphi$, so hat man nemlich $w = \frac{\mathfrak{L}\varphi}{2(\operatorname{tang} l\frac{1}{2}\mathfrak{L}\varphi)^2}$ und also $\log w = \log\mathfrak{L}\varphi - 2\log\operatorname{tang}(l\frac{1}{2}\mathfrak{L}\varphi) - \log 2$.

§. 82.

Nachdem nun der Winkel φ genau genug gefunden ist, kann man den Parameter a auf doppelte Art finden nach den Formeln:

$$a = \frac{h}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b}\cdot\mathfrak{L}\varphi.$$

Dann hat man $a + h = y = PM$. Die Länge des Bogens $VM = s$ wird berechnet nach den Formeln:

$$s = y\,.\sin\varphi \quad \text{und} \quad s = a\,.\operatorname{tang}\varphi.$$

Hierauf findet man die Länge des Krümmungshalbmessers ϱ für den Punct M nach den Formeln: $\quad \varrho = \frac{y^2}{a} \quad$ und $\quad \varrho = \frac{a}{\cos\varphi^2}$.

Dann kennt man aber die Hauptbestimmungen der Construction der Curve. Wird das im §. 81. vorkommende Beispiel durchgeführt, so hat man:

$$\varphi = 61^\circ\, 9'\, 20'',89;\quad \frac{\varphi}{2} = 30^\circ\, 34'\, 40'',44;\quad 45^\circ + \frac{\varphi}{2} = 75^\circ\, 34'\, 40'',44.$$

$$\begin{array}{rl} \log h = & 1,897\,6271 \\ \log\cos\varphi = & 9,683\,4339 \\ \hline & 1,581\,0610 \\ & -9,713\,9696 \\ \hline \log a = & 1,867\,0914 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi & = 9,706\,4698 - 10 \\ \text{Also: } \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 & = 9,412\,9396 - 10 \\ \log 2 & = 0,301\,0300 \\ \hline \text{Summe}\ \ldots\ldots & 9,713\,9696 - 10 \end{array}$$

Um $\log a$ auf die zweite Art zu berechnen, hat man $\mathfrak{L}\varphi = \frac{1}{\mu}\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$. Aber

$$\begin{array}{rrl} & \log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) & = 0,589\,7838 \\ \text{Also} & \log\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) & = 9,770\,6928 - 10 \\ & \log\frac{1}{\mu} & = 0,362\,2157 \\ \hline & \log\mathfrak{L}\varphi & = 0,132\,9085 \\ & \log b & = 2,000\,0000 \\ \hline \text{Also} & \log a & = 1,867\,0915\ \text{(wie vorhin).} \end{array}$$

Daher hat man:

$$\begin{array}{rl} a = & 73,6362 \\ h = & 79,0000 \\ \hline y = & 152,6362 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log y = & 2,183\,6576 \\ \log\sin\varphi = & 9,942\,4717 \\ \hline \log s = & 2,126\,1293 \\ \text{und}\quad s = & 133,6993 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 1,867\,0915 \\ \log\cos\varphi^2 = & 9,366\,8678 - 10 \\ \hline \log \varrho = & 2,500\,2237 \\ \varrho = & 316,3907 \end{array}$$

Man findet auch $\log s$ und $\log\varrho$, wie folgt:

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1,867\,0914 \\ \log\operatorname{tang}\varphi = & 0,259\,0379 \\ \hline \log s = & 2,126\,1293 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log y^2 = & 4,367\,3152 \\ \log a = & 1,867\,0915 \\ \hline \log\varrho = & 2,500\,2237 \end{array}$$

Will man die Construction der Curve vollenden, so wird man zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 61^\circ\, 9'\, 20'',89$ für gleiche Zunahmen des Winkels φ, welche nicht sehr klein zu sein brauchen, die zugehörigen Werthe der Gröfsen x, y, s, ϱ nach den Formeln des §. 74. und §. 76. berechnen. Sind auf diese Weise mehrere einzelne Puncte der Curve festgelegt, so wird man durch sie eine approximirende Curve legen, welches nun um so leichter ist, weil man die Gröfsen der Krümmungshalbmesser und die Lage der Mittelpuncte der Krümmungskreise kennt. Mit einem

solchen Halbmesser braucht man nur aus dem zugehörigen Mittelpuncte allemal zwischen den willkürlich gewählten Grenzen der Theile der Curve einen Kreisbogen zu beschreiben, so wird dieser, sinnlich betrachtet, mit dem entsprechenden Theile der Curve einerlei sein, oder doch der Unterschied sehr gering, und zwar desto geringer sein, je gröfser die Anzahl der festgelegten Puncte der Curve ist, und so wird sich überhaupt die aus Kreisbogen zusammengesetzte Linie von der Kettenlinie hinlänglich wenig unterscheiden.

Zusatz. Einfacher wird die im §. 79. vorgelegte Aufgabe, wenn die Breite $Mm = 2b$ und als Höhe die Linie $AW = h$ gegeben sind. Man hat dann zur Bestimmung von φ die Gleichung:

$$\frac{b}{h} = \cos\varphi . \mathfrak{L}\varphi,$$

und wie vorhin:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} . \mathfrak{L}\varphi, \text{ oder auch } a = h . \cos\varphi.$$

Die Longitudinale.

§. 82.

Wenn zwei Zahlen φ und k in solcher Beziehung zu einander stehen, dafs $\varphi = lk$ oder umgekehrt $k = \mathfrak{L}\varphi$ ist, so ist bekanntlich immer $k > \varphi$. Werden daher die Abscisse x und der zugehörige Bogen s mit einer constanten Länge a verglichen, welche der Parmeter heifsen mag, so ist auch $\frac{s}{a} > \frac{x}{a}$, wenn für $x = 0$ auch $s = 0$ sein soll. Man kann daher $\frac{s}{a} = k$ und $\frac{x}{a} = \varphi$ setzen, d. h. als Gleichung an die Curve aufstellen:

$$\frac{s}{a} = \mathfrak{L}\frac{x}{a} \text{ oder umgekehrt } \frac{x}{a} = l\frac{s}{a}.$$

Die Curve mag die **Longitudinale** genannt werden. Die aufgestellte Gleichung hat noch nicht die zur genaueren Kenntnifs der Curve erforderliche Gestalt, und es mufs aus ihr endlich eine Gleichung hergeleitet werden, welche den Zusammenhang unter zwei rechtwinkligen Coordinaten eines unbestimmten Punctes der Curve ausdrückt. Man differentiire diese Gleichung, und man erhält $\partial x = \frac{\partial s}{\mathfrak{Cos}\frac{x}{a}}$. Sind nun x und y die beiden Coordinaten eines Punctes der Curve, so ist bekanntlich auch $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, und man findet

$$\partial y = \partial x . \mathfrak{Sin}\frac{s}{a}.$$

Da aber $\mathfrak{Sin}\frac{s}{a} = \operatorname{tang} l\frac{s}{a} = \operatorname{tang}\frac{x}{a}$ ist, so hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tang}\frac{x}{a}.$$

Nun ist aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ auch gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie des Punctes M der Curve, dessen Coordinaten x und y sind, mit der Abscissenlinie bildet, und welcher durch ψ bezeichnet sein mag; also hat man:

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\frac{x}{a} = \operatorname{tang}\varphi,$$

oder einfacher $\psi = \frac{x}{a} = \varphi$. Schneidet man also auf der Peripherie eines Kreises, der mit dem Radius a beschrieben ist, einen Bogen ab, dessen Länge der Abscisse gleicht, so ist der diesem Bogen zugehörige Winkel am Mittelpuncte des Kreises dem Winkel ψ jedesmal gleich; daher sind auch die Werthe der auf einander folgenden Abscissen den zugehörigen Werthen des Winkels ψ proportional.

§. 83.

Und nun ist es leicht, von der Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{a}$ zur Gleichung an die Curve selbst aufzusteigen. Integrirt man nemlich so, dafs mit $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so findet man:

$$y = a \cdot \log\frac{1}{\cos\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad e^{-\frac{y}{a}} = \cos\frac{x}{a} = \cos\varphi.$$

Diese Gleichung giebt nun zu erkennen, dafs zu gleich grofsen, aber entgegengesetzten Abscissen x auch gleich grofse, aber einstimmige Werthe der Ordinate y gehören.

Es stelle (Fig. 4.) die Linie CAD die Longitudinale vor, $AP = x$ und $PM = y$ seien die beiden Coordinaten des Punctes M der Curve, so ist AP zugleich eine Tangente der Curve für ihren Scheitel A; eine Tangente derselben für den Berührungspunct M sei MT, so ist der Winkel $MTP = \psi = \varphi = \frac{x}{a}$.

Da ferner $\log\frac{1}{\cos\varphi}$ unmöglich ist, wenn $\varphi > \frac{\pi}{2}$, so kann die Abscisse x nie gröfser genommen werden, als die Länge eines Quadranten vom Kreise beträgt, dessen Radius der Parameter der Curve a ist. Wird

die Abscisse so groſs genommen, als ein solcher Quadrant, und ist etwa $AV = AW = \frac{\pi}{2}.a$, so ist die Ordinate y zwar nicht unmöglich, aber unendlich groſs. Werden also in den Puncten V und W zwei Perpendikel VN und WO auf der Abscissenlinie errichtet, so sind sie Asymptoten der Curve, die also mit ihren beiden congruenten Armen AD und AC ganz zwischen den Parallelen VN und WO enthalten bleibt und sich ihnen ins Unendliche nähert. Schon daraus darf geschlossen werden, daſs die Krümmung der Curve im Scheitel A am gröſsten ist und daſs dieselbe allmälig geringer wird, je weiter man sich auf einem der Arme vom Scheitel A entfernt. Noch deutlicher tritt diese Kenntniſs hervor aus der Betrachtung des Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser selbst, welcher für den Punct M mit ϱ bezeichnet werde. Man findet leicht:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Der Krümmungshalbmesser für den Scheitel A ist also gleich dem Parameter a.

Die Gleichung $y = a \log \frac{1}{\cos\frac{x}{a}}$ führt endlich auch leicht zum Ausdrucke des Zusammenhanges zwischen y und s. Denn man hat

$$y = a \log \frac{1}{\cos\varphi} = a \log \mathfrak{Cos}\, k,$$

und da $k = \frac{s}{a}$ ist, so hat man auf der Stelle:

$$y = a \log \mathfrak{Cos}\, \frac{s}{a}.$$

Zusatz. Wollte man aus zwei gegebenen Coordinaten x und y die Longitudinale construiren, so müſste man zuerst die Gröſse des Winkels φ aus der Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{\varphi}{-\log\cos\varphi}$$

zu ermitteln suchen, und hätte dann

$$a = \frac{x}{\varphi} = \frac{y}{-\log\cos\varphi}.$$

§. 84.

Will man die Ausdrücke für die Gröſsen x, y und s in Reihen entwickeln, so daſs eine solche Reihe auch nach Potenzen einer dieser Gröſsen fortschreitet, so fallen die meisten dieser Entwickelungen nicht schwer, weil früher umständlich behandelte Reihen dabei sogleich in An-

wendung kommen. Will man aber die Gröfsen x und s in Reihen entwickeln, welche nach Potenzen von y fortschreiten, so kann bei diesen beiden Aufgaben keine der früher behandelten Reihen in Anwendung kommen.

Sieht man auf Fig. 4., worin MQ auf AQ senkrecht oder zu AP parallel ist, und also $AQMP$ ein Rechteck vorstellt, so macht es eine Verwechselung der Coordinaten nothwendig, MQ oder AP als Function von AQ oder PM zu betrachten, und da kann die Aufgabe, MQ in eine nach Potenzen von AQ fortgehende Reihe zu entwickeln, allerdings nicht zwecklos vorgelegt werden. Setzen wir daher nun $AQ = x$, $QM = y$, und, wie vorhin, den Bogen $AM = s$, so haben wir:

$$y = a.\operatorname{arc}\left(\cos = e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \text{und} \quad s = a.\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Cos} = e^{\frac{x}{a}}\right).$$

Erwägt man nun, dafs die Entwickelung eines Arcus, dessen Cosinus gegeben ist, in eine Reihe, welche nach Potenzen des Cosinus fortschreitet, gar nicht gefunden werden kann, so begreift man, warum die beiden verlangten Entwickelungen einige Schwierigkeit haben, und es die Mühe belohnt, hier davon zu handeln. Da die beiden Aufgaben, analytisch genommen, fast dieselben sind, so reicht es hin, die erste Aufgabe vollständig aufzulösen, weil man die gefundenen Resultate leicht übertragen oder für die zweite Aufgabe benutzen kann. Setzen wir zur Abkürzung $\overset{1}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$ und differentiirt man die erste Gleichung, so erhält man:

$$\overset{1}{y} = \left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Aufgabe der Entwickelung ist also auf die in der That ein wenig einfachere der Function $\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ zurückgeführt worden.

§. 85.

Mit der Entwickelung der Potenz $(e^x - 1)^{-1}$ in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe haben sich die Analysten viel beschäftigt, und es kommen bei ihr die sogenannten Bernoullischen Zahlen in Anwendung. Der vielfache Gebrauch dieser Entwickelung, z. B. bei der Herleitung des summatorischen Gliedes einer Reihe aus dem allgemeinen Gliede derselben, rechtfertigt diese Aufmerksamkeit auf sie. Noch gröfsere Schwierigkeit hat aber die Entwickelung einer Potenz von $e^x - 1$, wenn ihr Exponent eine gebrochene Zahl ist, wie im vorliegenden Falle. Überhaupt hängt die Entwickelung der Potenzen von $e^x - 1$ in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe ab von der Kenntnifs der Vorzahlen, welche in

den Entwickelungen der (numerischen) Facultäten nach Potenzen ihres Grundfactors vorkommen. Wird nemlich in Anwendung der Bezeichnung der Facultäten nach Vandermonde allgemein gesetzt:

$$[a, d]^{+n} = a(a-d)(a-2d)\dots(a-nd+d),$$
$$[a, d]^{-n} = \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)\dots(a+nd)},$$

so ist immer, der Exponent n mag eine positive oder negative ganze Zahl sein:

$$[a, d]^{n} = S(-1)^{\alpha}.\,{}^{n}\!\overset{\alpha}{f}.\,a^{n-\alpha}.\,d^{\alpha},$$

und die in dieser Reihe vorkommenden Vorzahlen oder die sogenannten Facultäten-Coëfficienten:

$${}^{n}\!\overset{0}{f},\ {}^{n}\!\overset{1}{f},\ {}^{n}\!\overset{2}{f},\ {}^{n}\!\overset{3}{f} \text{ etc.}$$

sind gewisse Functionen des Exponenten n, welche ein durch die leicht herzuleitende Formel:

$${}^{n+1}\!\overset{r}{f} = {}^{n}\!\overset{r}{f} + n.\,{}^{n}\!\overset{r-1}{f}$$

ausgedrücktes allgemeines Gesetz ihrer Bildung befolgen. Wird der Begriff der Facultäten erweitert, auf ähnliche Art wie der Begriff der Potenzen, so sind auch solche Facultäten $[a, d]^{n}$ zulässig, deren Exponent n ein positiver oder auch negativer Bruch ist. Dann müssen aber für die Facultäten-Coëfficienten Ausdrücke angegeben werden, welche gebraucht werden können ohne Rücksicht darauf, was für eine Zahl der Exponent n der zugehörigen Facultät sei. Solche Ausdrücke sind die folgenden:

$${}^{n}\!\overset{0}{f} = 1,$$
$${}^{n}\!\overset{1}{f} = \frac{n(n-1)}{2} = [n-1]^{1}_{1'}.\,\tfrac{1}{2}n,$$
$${}^{n}\!\overset{2}{f} = [n-1]^{2}_{2'}.\,(\tfrac{1}{4}n^2 - \tfrac{1}{12}n),$$
$${}^{n}\!\overset{3}{f} = [n-1]^{3}_{3'}.\,(\tfrac{1}{8}n^3 - \tfrac{1}{8}n^2),$$
$${}^{n}\!\overset{4}{f} = [n-1]^{4}_{4'}.\,(\tfrac{1}{16}n^4 - \tfrac{1}{8}n^3 + \tfrac{1}{48}n^2 + \tfrac{1}{120}n),$$
$${}^{n}\!\overset{5}{f} = [n-1]^{5}_{5'}.\,(\tfrac{1}{32}n^5 - \tfrac{5}{48}n^4 + \tfrac{5}{96}n^3 + \tfrac{1}{48}n^2),$$
$${}^{n}\!\overset{6}{f} = [n-1]^{6}_{6'}.\,(\tfrac{1}{64}n^6 - \tfrac{5}{64}n^5 + \tfrac{5}{64}n^4 + \tfrac{13}{576}n^3 - \tfrac{1}{96}n^2 - \tfrac{1}{252}n),$$
$${}^{n}\!\overset{7}{f} = [n-1]^{7}_{7'}.\,(\tfrac{1}{128}n^7 - \tfrac{7}{128}n^6 + \tfrac{35}{384}n^5 + \tfrac{7}{1152}n^4 - \tfrac{7}{192}n^3 - \tfrac{1}{72}n^2),$$

$${}^{n}\overset{8}{f}=\overset{8}{[n-1]}_{\overline{8'}}.\left(\tfrac{1}{256}n^{8}-\tfrac{7}{192}n^{7}+\tfrac{35}{384}n^{6}-\tfrac{7}{288}n^{5}-\tfrac{469}{6912}n^{4}-\tfrac{1}{64}n^{3}+\tfrac{101}{8640}n^{2}+\tfrac{1}{240}n\right),$$

$${}^{n}\overset{9}{f}=\overset{9}{[n-1]}_{\overline{9'}}.\left(\tfrac{1}{512}n^{9}-\tfrac{3}{128}n^{8}+\tfrac{21}{256}n^{7}-\tfrac{7}{120}n^{6}-\tfrac{133}{1536}n^{5}+\tfrac{5}{384}n^{4}+\tfrac{101}{1920}n^{3}+\tfrac{3}{160}n^{2}\right),$$

$${}^{n}\overset{10}{f}=\overset{10}{[n-1]}_{\overline{10'}}.\left(\tfrac{1}{1024}n^{10}-\tfrac{15}{1024}n^{9}+\tfrac{35}{512}n^{8}-\tfrac{133}{1536}n^{7}-\tfrac{245}{3072}n^{6}+\tfrac{745}{9216}n^{5}\right.$$
$$\left.+\tfrac{67}{576}n^{4}+\tfrac{47}{2304}n^{3}-\tfrac{13}{576}n^{2}-\tfrac{n}{132}\right),$$

$${}^{n}\overset{11}{f}=\overset{11}{[n-1]}_{\overline{11'}}.\left(\tfrac{1}{2048}n^{11}-\tfrac{55}{6144}n^{10}+\tfrac{55}{1024}n^{9}-\tfrac{319}{3072}n^{8}-\tfrac{847}{18432}n^{7}+\tfrac{3179}{18432}n^{6}\right.$$
$$\left.+\tfrac{121}{768}n^{5}-\tfrac{275}{4608}n^{4}-\tfrac{143}{1152}n^{3}-\tfrac{n^{2}}{24}\right)$$

u. s. w.

Die Berechnung dieser Werthe hat keine Schwierigkeit, wenn sie in gehöriger Weise unternommen wird, und gründet sich auf eine Formel, welche im Anhange hergeleitet wird. Die Möglichkeit der Berechnung dieser Zahlen für jeden Werth von n vorausgesetzt, hat man immer:

$$(e^{x}-1)^{n} = S\,\overset{-a}{[n]}.{}^{-n}\overset{a}{f}.x^{n+a},$$

und man wird in dieser Formel nun $\frac{2x}{a}$ für x und $-\frac{1}{2}$ für n setzen, wodurch man erhält:

$$\overset{1}{y} = \left(S\,2^{a}\,\overset{-a}{[-\tfrac{1}{2}]}.{}^{\frac{1}{2}}\overset{a}{f}.\frac{x^{a-\frac{1}{2}}}{a^{a}}\right).\sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Wird die Reihe mit ∂x multiplicirt und darauf integrirt, so erhält man:

$$y = \left[1-\frac{\overset{1}{k}}{3'}.\frac{x}{a}+\frac{\overset{2}{k}}{5'}.\left(\frac{x}{a}\right)^{2}-\frac{\overset{3}{k}}{7'}.\left(\frac{x}{a}\right)^{3}+\frac{\overset{4}{k}}{9'}.\left(\frac{x}{a}\right)^{4}-\text{etc.}\right].\sqrt{(2ax)},$$

und findet:

$$\overset{r}{k} = (-1)^{r}.2^{r}(2r)'.\overset{-r}{[-\tfrac{1}{2}]}.{}^{\frac{1}{2}}\overset{r}{f},$$

eine Formel, nach welcher die unbekannten Vorzahlen $\overset{1}{k}$, $\overset{2}{k}$, $\overset{3}{k}$, etc. berechnet werden können.

Zusatz. Wenn die Differenz d unter den benachbarten Factoren einer Facultät $=+1$ ist, so kann sie der Kürze wegen in der Bezeichnung wegbleiben, und schon daran erkannt werden. Hiernach ist $\overset{n}{[a,1]}=\overset{n}{[a]}$.

§. 86.

Man kann noch eine andere Formel zur independenten Berechnung der Coëfficienten $\overset{1}{k}$, $\overset{2}{k}$, $\overset{3}{k}$, etc. herleiten. Da nemlich die Werthe der Function ${}^{n}\overset{r}{f}$, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist, sich in Anwendung der Formel

$${}^{n+1}\overset{r}{f} = {}^{n}\overset{r}{f} + n.{}^{n}\overset{r-1}{f}$$

sehr einfach berechnen lassen und also als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so kann man die Werthe der Function ${}^{n}\overset{r}{f}$, im Falle n keine ganze

Zahl ist, aus den vorhin genannten Werthen berechnen, und dazu dient die Formel:

$$\overset{r}{{}^{n}f} = \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-r^2)}{(2r)'}\left(S(-1)^\beta[2r\underset{\beta'}{\overset{\beta}{]}}.\overset{r}{{}^{-\alpha}f}.\frac{n}{n+\alpha}\right) \text{ (cond. } \alpha+\beta=r),$$

welche ebenfalls im Anhange wird hergeleitet werden. In Benutzung dieser Formel findet man:

$$\overset{r}{k} = S(-1)^\beta[2r\underset{\beta'}{\overset{\beta}{]}}.\overset{r}{{}^{-\alpha}f}.\underset{2\alpha+1}{[3,-2]} \qquad \text{(cond. } \alpha+\beta=r).$$

So hat man z. B. für $r=5$ die folgenden Zahlen:

$$\overset{5}{k} = 42525.\frac{3.5.7.9.11}{11} - 10.7770.\frac{3.5.7.9.11}{9} + 45.966.\frac{3.5.7.9.11}{7} - 120.\frac{3.5.7.9.11}{5}$$

$$+210.\frac{3.5.7.9.11}{3} = \begin{array}{rr} 40186125 - & 89743500 \\ 64552950 - & 15717240 \\ 727650 - & 0 \end{array}$$

$$\overset{5}{k} = 105466725 - 105460740 = +5985.$$

§. 87.

Es bleibt nun für die Entwickelung von y in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe nichts mehr hinzuzufügen, als eine Recursionsformel herzuleiten, nach welcher man die Coëfficienten $\overset{1}{k}$, $\overset{2}{k}$, $\overset{3}{k}$ etc. noch bequemer berechnen wird. Zu dem Ende bemerke man, dafs, wenn die Potenz

$$(S\overset{\alpha}{a}x^{p+\alpha q})^n = S\overset{\alpha}{A}x^{np+\alpha q}$$

dem polynomischen Lehrsatze gemäfs gesetzt wird, unter den Coëfficienten der beiden Reihen die einfache Beziehung:

$$S(n\alpha-\beta)\overset{\beta}{A}.\overset{\alpha}{a} = 0 \qquad \text{(cond. } \alpha+\beta=r)$$

Statt findet. Von dieser werden wir hier Gebrauch machen. Setzen wir nemlich:

$$\overset{1}{y} = (e^{\frac{2x}{a}}-1)^{-\frac{1}{2}} = \left(S\frac{\left(\frac{2x}{a}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)'}\right)^{-\frac{1}{2}} = S\overset{\alpha}{A}\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

so haben wir

$$n=-\tfrac{1}{2};\quad \overset{\alpha}{a} = \frac{2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)'} \text{ und } \overset{\beta}{A} = (-1)^\beta.\frac{\overset{\beta}{k}}{(2\beta)'}\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Werden diese Werthe in der allgemeinen Recursionsformel substituirt, so erhält man nach einer geringen Veränderung:

$$S(-1)^\alpha[2r\underset{(\alpha+1)'}{\overset{2\alpha}{]}}.2^\alpha.(2r-\alpha).\overset{\beta}{k} = 0 \qquad \text{(cond. } \alpha+\beta=r).$$

Wird das Glied $\overset{r}{k}$ auf die eine Seite des Gleichheitszeichens allein gebracht, so hat man:

$$\overset{r}{k} = [2r-1]^{1}_{2'}\,2.(2r-1).\overset{r-1}{k} - [2r-1]^{3}_{3'}.2^2.(2r-2)\overset{r-2}{k}\dots$$

$$\dots(-1)^{\alpha+1}[2r-1]^{2\alpha-1}_{(\alpha+1)'}.2^{\alpha}.(2r-\alpha).\overset{r-\alpha}{k}\dots + (-1)^{r+1}[2r-1]^{2r-1}_{(r+1)'}.2^{r}.r.\overset{0}{k}.$$

Die ersten Specialfälle dieser allgemeinen Formel sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{k} &= \overset{0}{k} = 1,\\
\overset{2}{k} &= 9\overset{1}{k} - 2^2.2.\overset{0}{k},\\
\overset{3}{k} &= 25\overset{2}{k} - 10.2^2.4.\overset{1}{k} + 5.2^3.3.\overset{0}{k},
\end{aligned}$$

u. s. w.

Das Rechnen nach diesen Formeln ist so bequem, als es nur gewünscht werden kann, und man findet:

$$\begin{aligned}
\overset{2}{k} &= + \quad 1,\\
\overset{3}{k} &= - \quad 15 = -3.5,\\
\overset{4}{k} &= - \quad 63 = -7.9,\\
\overset{5}{k} &= + \quad 5985 = +5.7.\,9.\,19,\\
\overset{6}{k} &= -158895 = -3^3.5.11.107,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Man hat demnach folgende Reihe:

$$y = \Big[1 - \frac{1}{3'}.\frac{x}{a} + \frac{1}{5'}.\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{15}{7'}.\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{63}{9'}.\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{5985}{11'}.\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \frac{158895}{13'}.\left(\frac{x}{a}\right)^6\dots\Big]\sqrt{(2ax)},$$

oder wenn man die Vorzahlen möglichst vereinfacht:

$$y = \Big[1 - \frac{1}{6}.\frac{x}{a} + \frac{1}{120}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{336}.\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{5760}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{19}{126720}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \frac{107}{26880}.\left(\frac{x}{a}\right)^6\dots\Big]\sqrt{(2ax)}.$$

Diese Reihen können, wie schon gesagt, benutzt werden, um der Gleichung:

$$e^{\frac{x}{a}} = \mathfrak{Cos}\,\frac{s}{a}$$

gemäſs, auch den Bogen s in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe zu entwickeln. Man kann nemlich diese Gleichung auch also schreiben:

$$e^{-\left(\frac{-x}{a}\right)} = \cos\left(\frac{s\sqrt{-1}}{a}\right),$$

und so sieht man, dafs man in den erhaltenen Reihen nur $-\frac{x}{a}$ für $\frac{x}{a}$ und $s\sqrt{-1}$ für y zu setzen hat. So erhält man denn auf der Stelle noch:

$$s = \Big[1 + \tfrac{1}{3'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^1 + \tfrac{1}{5'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^2 - \tfrac{15}{7'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^3 - \tfrac{63}{9'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^4 + \tfrac{5985}{11'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^5$$
$$- \tfrac{158895}{13'}.\left(\tfrac{x}{a}\right)^6 \dots\Big]\sqrt{(2ax)}.$$

Das erste Glied in der für y gefundenen Reihe ist gegen die nachfolgenden desto beträchtlicher, je kleiner die Abscisse $AQ = x$ im Verhältnifs zum Parameter a der Curve ist. Für geringe Werthe von x hat man also näherungsweise $y = \sqrt{(2ax)}$, d. h. die Longitudinale hat in der Nähe ihres Scheitels nur eine geringe Abweichung von einer apollonischen Parabel, welche denselben Parameter mit ihr hat.

§. 88.

Die Beziehung zwischen den durch die Gleichung $k = \mathfrak{L}\varphi$ verbundenen Arcus kann noch auf mehre andere Arten geometrisch construirt werden.

Denkt man sich zwei von einem Puncte ausgehende Curven, welche auf denselben Anfangspunct der Coordinaten und auf dieselben Abscissen bezogen sind, so kann die eine ein Kreisbogen von der Länge $a\varphi$ sein, wenn a den Radius desselben bezeichnet, während die Länge der anderen gröfser als $a\varphi$ und namentlich $= ak = a\mathfrak{L}\varphi$ ist; die Gleichung an diese Curve mufs dann noch ermittelt werden.

Der Halbkreis ABC (Fig. 5.) und die Curve FBE haben den Punct B gemein, D sei der Anfangspunct und $DP = x$ sei die gemeinschaftliche Abscisse der zusammengehörigen Puncte M und N; die Ordinaten seien $PM = z$ und $PN = y$; es wird eine Gleichung zwischen x und y gesucht. Da der Bogen $BM = a\varphi$ ist, wenn der Halbmesser $DA = DB = DC = a$ und der Winkel $BDM = \varphi$ ist, so soll also der Bogen $BN = a.\mathfrak{L}\varphi$ sein. Wird er mit s bezeichnet, so hat man also:

$$s = a.\mathfrak{L}\varphi \quad \text{und} \quad \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Aufserdem hat man $x = a\sin\varphi$ und $z = a\cos\varphi$. Man findet $\partial s = \frac{a\,\partial\varphi}{\cos\varphi}$, und hat also die Gleichung:

$$\partial y^2 = \frac{a^2\,\partial\varphi^2}{\cos\varphi^2} - \partial x^2.$$

Da weiter $\partial x = a\cos\varphi\,\partial\varphi$, so hat man $\partial y = a\,\partial\varphi\sqrt{\left(\frac{1}{\cos\varphi^2} - \cos\varphi^2\right)}$, oder auch:

$$\partial y = a \operatorname{tang}\varphi\, \partial\varphi \sqrt{(1+\cos\varphi^2)},$$

wenn man ∂x eliminirt. Eliminirt man aber φ und $\partial\varphi$, so hat man:

$$\partial y = \frac{x\,\partial x}{a^2-x^2}\sqrt{(2a^2-x^2)}.$$

Setzt man also den Winkel, welchen die Berührungslinie NT der Curve BE im Puncte N mit der Abscissenlinie einschliefst, $=\psi$, so hat man

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{x\sqrt{(2a^2-x^2)}}{a^2-x^2} = \operatorname{tang}\varphi.\sqrt{\left(1+\frac{1}{\cos\varphi^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos\varphi^4}-1\right)}.$$

Vermöge dieser Gleichung läfst sich von den zwei Winkeln φ und ψ der eine aus dem anderen berechnen. Die Gleichung erscheint aber ungleich einfacher in der Gestalt:

$$\cos\varphi^2 = \cos\psi \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = \sin\tfrac{1}{2}\psi.\sqrt{2},$$

und auf diese so einfache Formeln kann man eine leichte geometrische Construction gründen, wodurch man aus dem Winkel φ den Winkel ψ und umgekehrt findet.

Setzt man $\sqrt{(a^2-x^2)} = z = a\cos\varphi$, so hat man:

$$\partial y = -\frac{a\,\partial z}{z}\sqrt{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)}.$$

Also

$$y = -\sqrt{(a^2+z^2)} + a.\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang} = \frac{a}{\sqrt{(a^2+z^2)}}\right) + \text{const.}$$

Da nun für $z=a$ auch $y=a$ werden mufs, so hat man:

$$a = -\sqrt{(2a^2)} + a.\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \text{const.},$$

und also:

$$y-a = a\sqrt{2}-\sqrt{(a^2+z^2)} - a\,\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + a\,\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang}=\frac{a}{\sqrt{(a^2+z^2)}}\right).$$

Aber $\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $z^2 = a^2-x^2$, also hat man

$$y = a(1+\sqrt{2}) - \sqrt{(2a^2-x^2)} - a\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) + a\,\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang}=\frac{a}{\sqrt{(2a^2-x^2)}}\right).$$

Führt man statt x wieder φ ein, so hat man $\sqrt{(2a^2-x^2)} = a\sqrt{(2-\sin\varphi^2)}$ $= a\sqrt{(1+\cos\varphi^2)} = a\sqrt{(1+\cos\psi)} = a\cos\frac{\psi}{2}\sqrt{2}$, und also:

$$y = a\left[1+\sqrt{2}-\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\psi}{2}\sqrt{2} + \mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Tang} = \frac{1}{\cos\frac{\psi}{2}.\sqrt{2}}\right)\right].$$

Man hat auch $y = a\left[1+\sqrt{2}-\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathfrak{Cot}\,k + k\right]$, und zur Bestimmung von k dient dann die Gleichung:

$$\mathfrak{Sin}\,k = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Der Ausdruck verliert noch ein Glied, wenn man $BQ = x$ und $QN = y$ setzt. Man hat dann:

$$y = a\left[\sqrt{2} - \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sin k} + \mathfrak{L}k\right],$$

und der Winkel k wird berechnet nach der Gleichung:

$$\tang k = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Da nun aber

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\;35624 \text{ und}$$
$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}88137\;35870$$

$$\text{also } \sqrt{2} - \mathfrak{L}\frac{\pi}{4} = 0{,}53283\;99754 \text{ ist,}$$

so hat man

$$y = a \,.\, 0{,}53283\;99754 + a\left(\mathfrak{L}k - \frac{1}{\sin k}\right);$$

zur Bestimmung von k dient, wie vorhin, die Gleichung:

$$\tang k = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Obgleich nun, wie man sieht, die Gleichung an die Curve sich in vielerlei Formen darstellen läſst, so erlangt sie dennoch nie einen hohen Grad der Einfachheit; auch hat die Curve keine sehr interessante Eigenschaften; daher mag das über sie Gesagte hinreichen. Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser gewinnt aber noch eine ziemliche Einfachheit; man findet:

$$\varrho = -\frac{a^2\sqrt{(2a^2 - x^2)}}{a^2 - x^2} = -\frac{a\sqrt{(1 + \cos\varphi^2)}}{\cos\varphi^2} = -a\cos\frac{\psi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\psi},$$

oder auch $\varrho = -\frac{a\sin k}{\cos k^2}$, wenn $\tang k = \frac{1}{\cos\varphi}$ gesetzt wird.

Fünfzehnter Abschnitt.

Umformung gegebener Ausdrücke in die Form $\mathfrak{Cos}\, a + \mathfrak{Sin}\, a$; allgemeine Auflösung der cubischen Gleichungen.

§. 89.

Das Rechnen mit Ausdrücken von der Form $\mathfrak{Cos}\, a \pm \mathfrak{Sin}\, a$ ist besonders bequem, wenn Multiplication, Division, Potenziren und Wurzelausziehen die vorgeschriebenen Operationen sind, und es gründet sich auf die nachfolgenden vier allgemeinen Formeln:

$$(\mathfrak{Cos}\, a + \mathfrak{Sin}\, a)(\mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, b) = \mathfrak{Cos}(a+b) + \mathfrak{Sin}(a+b),$$

$$\frac{\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Cos}\,b+\mathfrak{Sin}\,b}=\mathfrak{Cos}(a-b)+\mathfrak{Sin}(a-b),$$
$$(\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Sin}\,a)^n=\mathfrak{Cos}\,na+\mathfrak{Sin}\,na,$$
$$\sqrt[n]{(\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Sin}\,a)}=\mathfrak{Cos}\frac{a}{n}+\mathfrak{Sin}\frac{a}{n},$$

Will man von den vier Rechnungsweisen Nutzen ziehen, so mufs man im Stande sein, jeden vorgelegten Ausdruck unter die Form $\mathfrak{Cos}\,k+\mathfrak{Sin}\,k$ zu bringen.

Ist etwa N eine mögliche Zahl, so setze man sogleich $e^k=N$, d. h. man suche den Exponenten k nach der Formel:

$$k=\log N,$$

und hat dann auf der Stelle

$$N=\mathfrak{Cos}\,k+\mathfrak{Sin}\,k,$$
$$\frac{1}{N}=\mathfrak{Cos}\,k-\mathfrak{Sin}\,k.$$

Man könnte auch, wenn auch nicht immer ganz so einfach, den Exponenten k finden nach der Formel:

$$N=\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}lk\right),$$

nach welcher man zunächst die Gröfse lk und hieraus dann k findet, in Anwendung der Tabelle der Longitudinalzahlen. Wenn $\pm lk$ nicht zu wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist, so wird man nach dieser Formel noch schneller zum Ziele gelangen.

Hat aber die Zahl N die Form:

$$N=P+Q.\sqrt{-1},$$

so setze man

$$P=e^k.\cos\varphi \quad\text{und}\quad Q=e^k.\sin\varphi,$$

und hieraus findet man auf der Stelle:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{P}{Q}.$$

Ist der Winkel φ bereits gefunden, so findet man den Arcus oder Exponenten k nach der Formel:

$$k=\log\left(\frac{P}{\cos\varphi}\right)\quad\text{oder}\quad k=\log\frac{Q}{\sin\varphi}.$$

Wollte man k früher als φ berechnen, so hätte man nach folgender Formel zu rechnen:

$$k=\log\sqrt{(P^2+Q^2)},$$

deren Gebrauch nur dann vorzuziehen ist, wenn die Quadrate P^2 und Q^2 sich bequem berechnen lassen. Sind aber die beiden Arcus k und φ ge-

funden, so hat man auf der Stelle:

$$N = \mathrm{Cos}(k + \varphi\sqrt{-1}) + \mathrm{Sin}(k + \varphi\sqrt{-1}),$$
$$\frac{1}{N} = \mathrm{Cos}(k + \varphi\sqrt{-1}) - \mathrm{Sin}(k + \varphi\sqrt{-1}).$$

Diese und ähnliche Sätze sind aber unter veränderter Beziehung allgemein bekannt, und es lohnt daher die Mühe nicht, dabei länger zu verweilen.

§. 90.

Wichtige Dienste leisten die Potenzialfunctionen, und namentlich die hyperbolischen bei der Auflösung der cubischen Gleichungen von der Form:

$$x^3 = bx + c,$$

unter welche bekanntlich alle unreine cubische Gleichungen gebracht werden können. Es seien die drei Wurzeln der Gleichung x, x', x'', und also $x + x' + x'' = 0$. Nimmt man für eine derselben die folgende Form an:

$$x = v . \mathrm{Cos}\,\varphi,$$

um sie in der Gleichung $x^3 = bx + c$ zu substituiren, so erhält man $v^3 . \mathrm{Cos}\,\varphi^3 = bv\,\mathrm{Cos}\,\varphi + c$, oder auch:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^3 = \frac{b}{v^2}\mathrm{Cos}\,\varphi + \frac{c}{v^3},$$

und da auch:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^3 = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,3\varphi$$

ist, so erhält man durch Identificirung die beiden Gleichungen:

$$\frac{b}{v^2} = \tfrac{3}{4} \quad \text{und} \quad \frac{c}{v^3} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,3\varphi,$$

welche zur Findung der Werthe der beiden Gröfsen v und φ dienen; man hat nemlich:

$$v = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} \quad \text{und} \quad \mathrm{Cos}\,3\varphi = \frac{4c}{v^3} = \frac{\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{(\tfrac{1}{3}b)^3}}.$$

Setzt man also $3\varphi = k$, d. h. $\varphi = \frac{k}{3}$, so hat man:

$$x = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{3}k,$$
$$x' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \mathrm{Cos}(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1}),$$
$$x'' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \mathrm{Cos}(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1}),$$

wenn man den Arcus k berechnet nach der Formel:

$$\mathrm{Cos}\,k = \frac{\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{(\tfrac{1}{3}b)^3}}.$$

Ist nemlich k ein nach dieser Formel bestimmter Arcus, so leisten derselben auch die Arcus $k \pm 2\pi\sqrt{-1}$; $k \pm 4\pi\sqrt{-1}$; $k \pm 6\pi\sqrt{-1}$, etc. ein Genüge. Man braucht aber nur die drei ersten Arcus k, $k + 2\pi\sqrt{-1}$ und $k + 4\pi\sqrt{-1}$, deren dritte Theile in den Formeln für x, x', x''

vorkommen, zu nehmen, weil die übrigen Arcus zu keinen neuen Werthen von x führen.

Der Ausdruck für die Wurzel x'' läfst sich aber noch einfacher darstellen, da $\frac{k}{3}+\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}$, und also $\mathfrak{Cos}\left(\frac{k}{3}+\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}\right)$ $=\mathfrak{Cos}\left(\frac{k}{3}-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}\right)$ ist.

Die drei aufgestellten Formeln enthalten nun die vollständige Auflösung der cubischen Gleichungen unter allen Umständen, d. h. für alle Werthe der Zahlen b und c.

§. 91.

Im Gebrauche der angegebenen Formeln müssen aber mehrere Fälle wohl unterschieden werden, welche aus den besonderen Beschaffenheiten und dem Verhältnisse der in der Gleichung:

$$x^3 = bx + c$$

vorkommenden gegebenen Gröfsen b und c erkannt werden.

1. Wenn b und c positiv sind und $\mathfrak{Cos}\,k=\frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}>1$ ist.

In diesem Falle ist k möglich und es gelten die vorhin gefundenen Formeln unmittelbar. Will man sie aber entwickeln, dann ist

$$\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k\pm\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1}) = \mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k.\cos\tfrac{2}{3}\pi \pm \mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sin\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},$$

oder auch, weil $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ und $\sin\frac{2}{3}\pi=+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist:

$$\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k\pm\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1}) = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sqrt{3}.\sqrt{-1}.$$

Man hat also:

$$x = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)}.\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k,$$

$$x' = -\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)}.\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k+\sqrt{b}.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sqrt{-1} = -\frac{x}{2}+\sqrt{b}.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sqrt{-1},$$

$$x'' = -\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)}.\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k-\sqrt{b}.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sqrt{-1} = -\frac{x}{2}-\sqrt{b}.\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k.\sqrt{-1},$$

und zur Bestimmung von k dient dann die Formel:

$$\mathfrak{Cos}\,k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}.$$

Setzt man also $\mathfrak{L}k$ für k, so hat man auch die Formeln:

$$x = \frac{\sqrt{(\frac{4}{3}b)}}{\cos l(\frac{1}{3}\mathfrak{L}k)},$$

$$x' = -\frac{x}{2}+\sqrt{b}.\operatorname{tang} l(\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k) \quad \text{und} \quad \cos k = \frac{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}{\frac{1}{2}c},$$

$$x'' = -\frac{x}{2}-\sqrt{b}.\operatorname{tang} l(\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k).$$

2. Wenn b positiv, aber c negativ ist, und auch die absolute Gröfse $\mathfrak{Cos}\,k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}} > 1$ gefunden wird.

Nun ist der Arcus k unmöglich, weil $\mathfrak{Cos}\,k$ für ein mögliches k positiv ist. Setzt man daher nun sogleich $k+\pi\sqrt{-1}$ für k, so hat man, weil $\mathfrak{Cos}(k+\pi\sqrt{-1}) = -\mathfrak{Cos}\,k$ ist, für die drei Wurzeln die Ausdrücke:

$$x\ = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)}\,.\,\mathfrak{Cos}\left(\tfrac{1}{3}k+\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}\right);$$
$$x' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)}\,.\,\mathfrak{Cos}(\tfrac{1}{3}k+\pi\sqrt{-1}) = -\sqrt{(\tfrac{4}{3}b)}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k,$$
$$x'' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)}\,.\,\mathfrak{Cos}\left(\tfrac{1}{3}k-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}\right),$$

wenn der Arcus k nach der Formel $\mathfrak{Cos}\,k = \frac{-\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}$ bestimmt wird.

Die Ausdrücke für x'' und x können noch entwickelt werden, da $\mathfrak{Cos}\left(\frac{1}{3}k \pm \frac{\pi}{3}\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{3}k \pm \frac{1}{2}\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{3}k\,.\sqrt{-3}$ ist, so hat man also

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k + \sqrt{b}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1} = -\frac{x'}{2} + \sqrt{b}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1},$$
$$x' = -\sqrt{\left(\frac{4b}{3}\right)}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k,$$
$$x'' = \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k - \sqrt{b}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1} = -\frac{x'}{2} - \sqrt{b}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1},$$

und den Arcus k findet man nach der Formel

$$\mathfrak{Cos}\,k = \frac{-\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}.$$

Will man zu cyklischen Functionen übergehen, so sind die Ausdrücke:

$$x' = \frac{-\sqrt{\left(\frac{4b}{3}\right)}}{\cos l\,\frac{1}{3}\mathfrak{L}k},$$
$$x = -\frac{x'}{2} + \sqrt{b}\,.\,\mathrm{tang}\,l\,\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k\,.\sqrt{-1}, \qquad \text{für} \quad \cos k = \frac{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}{-\frac{1}{2}c}.$$
$$x'' = -\frac{x'}{2} - \sqrt{b}\,.\,\mathrm{tang}\,l\,\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k\,.\sqrt{-1},$$

3. Wenn b negativ ist, so setze man sogleich $k+\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}$ für k, denn es ist bekanntlich $\mathfrak{Cos}(k+\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}) = \frac{\mathfrak{Sin}\,k}{\sqrt{-1}}$, und man erhält dann:

$$x\ = \sqrt{(-\tfrac{4}{3}b)}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{3}k,$$
$$x' = -\frac{x}{2} + \sqrt{-b}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1}, \qquad \text{für} \quad \mathfrak{Sin}\,k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\frac{-b}{3}\right)^3}}.$$
$$x'' = -\frac{x}{2} - \sqrt{-b}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{3}k\,.\sqrt{-1},$$

Geht man zu cyklischen Functionen über, so hat man:

$$x = \sqrt{\left(\frac{-4b}{3}\right)} . \operatorname{tang} l \tfrac{1}{3} \mathfrak{L} k,$$

$$x' = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{-b}}{\cos l \frac{1}{3} \mathfrak{L} k}\sqrt{-1}, \qquad \text{für} \quad \operatorname{tang} k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\frac{-b}{3}\right)^3}}.$$

$$x'' = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{-b}}{\cos l \frac{1}{3} \mathfrak{L} k}\sqrt{-1},$$

4. Wenn endlich zwar b positiv, aber $\mathfrak{Cos}\, k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}} < \pm 1$ ist, dann setze man in sämmtlichen Formeln sogleich $k\sqrt{-1}$ für k, und man erhält:

$$x = 2\sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \cos\tfrac{1}{3}k,$$

$$x' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \cos(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} + \sqrt{b} . \sin\tfrac{1}{3}k,$$

$$x'' = \sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} . \cos(\tfrac{1}{3}k - \tfrac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} - \sqrt{b} . \sin\tfrac{1}{3}k,$$

und zur Bestimmung von k dient dann die Formel $\cos k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$.

Diese letzten Formeln sind allgemein bekannt.

§. 92.

Um die auf die vorigen Formeln gegründete Rechnungsweise für den Fall des Gebrauches der Longitudinalzahlen zu veranschaulichen und um den Grad der Genauigkeit zu zeigen, welcher bei Anwendung der Tabelle für diese Zahlen erreicht wird, legen wir uns als Aufgabe die Auflösung der cubischen Gleichung:

$$x^3 = 20514x - 1988260$$

vor, die aus den Wurzeln: -178; $89 + 57\sqrt{-1}$ und $89 - 57\sqrt{-1}$ gebildet ist. Die durch die Auflösung gefundenen Wurzeln können dann mit diesen Wurzeln verglichen werden. Man hat also:

$$b = +20514 \quad \text{und} \quad c = -1988260.$$

Da nun b positiv und c negativ ist, so kommen von den Formeln des §. 91. entweder die des 2ten oder die des 4ten Falles in Anwendung. Die Rechnung wendet briggische Logarithmen an.

Man hat $\log\sqrt{b} = 2{,}156\,0251$

$\log\sqrt{3} = 0{,}238\,5606$

$\log\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)} = 1{,}917\,4645$; $\log\sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3} = 5{,}752\,3936$

$\log - \frac{1}{2}c = 5{,}997\,4432$

Unterschied $= 9{,}754\,9504 - 10$.

Da dieser Unterschied negativ ist, so gelten also die Formeln des 2ten Falles und nicht die des 4ten. Setzt man also:

$$\log\cos k = 9{,}754\ 9504 - 10,$$

so ist

$$k = 61^\circ\, 48'\, 24'',97 \text{ (der neuen Kreis-Eintheilung).}$$

Aber

$$\mathfrak{L}(61^\circ 48') = 1{,}164\,3790;\ \text{Diff. } 1'' = 27{,}62, \text{ also für } 24'',97 \text{ ist die Differenz:}$$

$$\underline{+\ \ 690 \qquad\qquad = 27{,}62\,.\,24{,}97.}$$

Daher ist $\mathfrak{L}k = 1{,}164\,4480;\quad \tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 0{,}388\,1493$ und

$$l\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 24^\circ\, 11'\, 22'',71.$$

$$\begin{array}{ll}
\log\sqrt{(\tfrac{4}{3}b)} = 2{,}218\,4945 & \log\sqrt{b} = 2{,}156\,0251 \\
\log\cos l\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 9{,}968\,0745 - 10 & \log\operatorname{tang} l\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k = 9{,}599\,8497 - 10 \\
\hline
\log(-x') = 2{,}250\,4200 & \text{Summe} = 1{,}755\,8748 \\
\text{und } \log 178 = 2{,}250\,4200. & \text{und } \log 57 = 1{,}755\,8748.
\end{array}$$

Also

$$\begin{aligned}
x' &= -178, \\
x &= +\ 89 + 57\sqrt{-1}, \\
x'' &= +\ 89 - 57\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Noch ungleich kürzer würde die Rechnung gewesen sein, wenn man $\log(-\tfrac{1}{2}c) - \log\sqrt[2]{\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ nicht $= 0{,}2450496$, sondern $> 0{,}575441382$, oder gar $> 2{,}3047395642$ gefunden hätte, weil man im ersten Falle die Zahl $\tfrac{1}{3}\mathfrak{L}k$ nicht zu berechnen nöthig gehabt hätte in Anwendung der Tafeln der Längezahlen, und weil man im zweiten Falle diese Tafeln gar nicht zu gebrauchen nöthig gehabt hätte.

Wenn einmal die briggischen Logarithmen der hyperbolischen Cosinus, Sinus und Tangenten der Arcus k zwischen den Grenzen $k = 0$ und $k = 2$ ebenfalls berechnet sind, wie sie vom Verfasser bereits für die Arcus berechnet sind, welche > 2 sind, so wird der Gebrauch der Tafeln der Längezahlen zwar nicht nutzlos werden, aber in vielen Fällen zurücktreten, weil in ihnen keine Vermittelung zwischen den hyperbolischen und cyklischen Functionen dann mehr nöthig ist.

Zusatz. Man würde, wenn man $x = v\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{k}{3}$, statt $x = v\,.\,\mathfrak{Cos}\frac{k}{3}$, gesetzt hätte, zu denselben Resultaten, wie im §. 91. gelangt sein. Die Cardanische Formel ist somit überflüssig geworden.

Sechszehnter Abschnitt.

Ausgedehnterer Gebrauch der Potenzial-Functionen in der Integralrechnung.

§. 82.

Schon längst sind die cyklischen oder auch Kreis-Functionen in der Integralrechnung angewandt worden, um vermittelst derselben und der ihnen zugehörigen Arcus Integrale auszudrücken, deren Werthe man sonst aus ungeschlossenen Reihen berechnen müſste.

Man pflegte jedoch bisher zu den Kreisfunctionen nur dann seine Zuflucht zu nehmen, wenn die Integrale in einer anderen Form imaginäre Ausdrücke enthielten, ein Umstand, welcher von den im vorgelegten Integrale vorkommenden beständigen Gröſsen in der Regel herrührt. Man kann sich aber bei solchen Integralen auch der hyperbolischen Functionen mit groſsem Vortheil bedienen, wenn die Theorie derselben als gehörig entwickelt vorausgesetzt werden darf und man im Stande ist, die Werthe dieser Functionen augenblicklich zu bestimmen, falls man eine solche numerische Angabe nöthig hat. Man gewinnt dabei zugleich den nicht gering anzuschlagenden Vortheil. daſs man das Integral eines vorgelegten Differentiales mit unbestimmten Constanten nur in einer Form aufzustellen braucht, alle übrigen oder die verwandten Formen desselben aber so nahe liegen, daſs man selbst ohne alles Rechnen von der einen zu anderen übergehen kann und in vielen Fällen nur statt der durch deutsche Charactere bezeichneten Potenzial-Functionen die gleichlautenden, mit lateinischen Buchstaben oder Vorsylben bezeichneten und umgekehrt zu nehmen hat.

Um diese Behauptungen zu rechtfertigen und den Sinn des Verfahrens zu höherer Deutlichkeit zu bringen, wählen wir noch einige einfachere Aufgaben der Integralrechnung, welche besonders geeignet sind, den gleichmäſsigen Gebrauch der sämmtlichen Potenzialfunctionen zu erläutern, wobei von selbst klar wird, daſs die bisherige Beschränkung auf die cyklischen Functionen ein nachtheiliger, die Einheit des Verfahrens ohne hinreichenden Grund störender und unnütze Weitläufigkeiten herbeiführender Gebrauch ist. Er wird unstreitig von selbst aufhören, sobald man mit hinlänglich ausgedehnten Tafeln ausgerüstet sein wird, welche zur Realisirung der Werthe der hyperbolischen Functionen dienen und welche da-

her von dem Verfasser angefertigt wurden in einem Umfange, der nicht Vieles mehr zu wünschen übrig lassen wird.

§. 94.

Wählen wir zuerst das Integral $y = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}$, welches bekanntlich sehr oft gebraucht wird. Man gebe ihm sogleich die Form:

$$y = A\sqrt{c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(ac+2bcx+c^2x^2)}},$$

oder auch

$$y = A\sqrt{c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{[(ac-b^2)+(b+cx)^2]}}.$$

Setzt man nun:

$$v = \frac{b+cx}{\sqrt{(ac-b^2)}},$$

so findet man leicht $y = \frac{A}{\sqrt{c}}\int \frac{\partial v}{\sqrt{(1+v^2)}}$, und es ist also $y = \frac{A}{\sqrt{c}}.\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Sin}=v)$, wenn wir in diesen Beispielen die dem Integrale noch beizugebende Constante unberücksichtigt lassen. Man giebt dem Ausdrucke ohne Weiteres die bequemere Form:

$$y = \frac{A.k}{\sqrt{c}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{Sin}\,k = \frac{b+cx}{\sqrt{(ac-b^2)}}.$$

Diese Formel giebt nun das gesuchte Integral unter allen Umständen, d. h. für alle Werthe der Zahlen a, b, c und x an; von ihm kann man ohne Mühe zu den verwandten Formen übergehen.

§. 95.

Wenn c positiv und auch $ac-b^2$ positiv ist, dann wird man das Integral in der Form, in welcher es aufgestellt worden, anwenden oder etwa höchstens, $\mathfrak{L}k$ für k setzend, dasselbe verwandeln in:

$$y = \frac{A}{\sqrt{c}}.\mathfrak{L}k \quad \text{für} \quad \tang k = \frac{b+cx}{\sqrt{(ac-b^2)}}.$$

Wenn c zwar positiv, aber $ac-b^2$ negativ ist, dann wird man die Form des Integrals verändern, indem man $k \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ für k setzt, wodurch man, wenn man im Ausdrucke für y die Constante $\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ fallen läfst, und bemerkt, dafs $\mathfrak{Sin}\left(k+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right) = -\mathfrak{Cos}\,k.\sqrt{-1} = \frac{\mathfrak{Cos}\,k}{\sqrt{-1}}$ ist, auf der Stelle erhält:

$$y = \frac{Ak}{\sqrt{c}} \qquad \text{für} \quad \mathfrak{Cos}\,k = \frac{b+cx}{\sqrt{(b^2-ac)}}; \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{A}{\sqrt{c}}\mathfrak{L}k \quad \text{für} \quad \cos k = \frac{\sqrt{(b^2-ac)}}{b+cx}.$$

Zu demselben Resultate würde man auch gelangen in Anwendung der Formel $\int\frac{\partial v}{\sqrt{(v^2-1)}}=\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Cos}=v)$, da man das vorgelegte Integral auch unter diese Form bringen kann.

Wenn endlich c negativ ist, so wird man $\frac{k}{\sqrt{-1}}$ für k setzen und erhalten $y=\frac{Ak}{\sqrt{-c}}$, wo denn der Arcus k bestimmt wird nach der Formel:

$$\cos k=\frac{b+cx}{\sqrt{(b^2-ac)}} \quad \text{oder} \quad \sin k=\frac{b+cx}{\sqrt{(b^2-ac)}}.$$

Dafs hier der Arcus k nach zwei verschiedenen Formeln berechnet werden kann, beruhet auf dem Satze, dafs $\sin\left(k+\frac{\pi}{2}\right)=\cos k$ und die beiden Arcus sich um die Constante $\frac{\pi}{2}$ von einander unterscheiden.

Die beiden Formeln würden unmöglich sein, wenn b^2-ac negativ, oder $ac>b^2$ wäre. Dieser Fall kann aber nicht eintreten; denn da $\sqrt{(a+2bx+cx^2)}$ möglich, also $a+2bx+cx^2$ positiv und daher $c(a+2bx+cx^2)$ nun negativ ist, so ist $ac+2bcx+c^2x^2$ negativ, also auch $ac-b^2+(b+cx)^2$ negativ, und da $(b+cx)^2$ positiv ist, so ist um so mehr $ac-b^2$ negativ und also $b^2>ac$.

Eben so kann man zeigen, dafs, wenn c positiv und $ac-b^2$ negativ ist, die Function $\mathfrak{Cos}\,k=\frac{b+cx}{\sqrt{(b^2-ac)}}>1$ und also k möglich sei.

§. 96.

Eine einfache und unmittelbare Folgerung aus dem Vorhergehenden ist die Integration von:

$$y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{((\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x))}},$$

worin α, β, α' und β' constante Gröfsen sind. Vergleicht man das Product $(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)=\alpha\alpha'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')x+\beta\beta' x^2$ mit $a+2bx+cx^2$, so hat man

$$a=\alpha\alpha'; \quad b=\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{2}, \quad \text{und} \quad c=\beta\beta',$$

und also $b^2-ac=\left(\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{2}\right)^2$ eine positive Gröfse. Daher hat man

$$y=\frac{k}{\sqrt{(\beta\beta')}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{Cos}\,k=\pm\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'+2\beta\beta' x}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Das Vorzeichen $\pm$ kann so gewählt werden, dafs der Ausdruck für $\mathfrak{Cos}\,k$ positiv wird. Der Nenner ist aber positiv, wenn $\alpha\beta'>\beta\alpha'$ oder $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Nehmen wir also an, dafs wirklich $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha'}{\beta'}$ sei, so haben wir:

$$\mathfrak{Cos}\, k = \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha' + 2\beta\beta' x}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Hieraus findet man aber zur Bestimmung des Arcus k die einfachere Formel:

$$\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}k = \sqrt{\left(\frac{x+\frac{\alpha'}{\beta'}}{x+\frac{\alpha}{\beta}}\right)} \quad \text{und} \quad y = \frac{k}{\sqrt{(\beta\beta')}}.$$

Will man also zu cyklischen Functionen übergehen, so hat man:

$$y = \frac{\mathfrak{L}k}{\sqrt{(\beta\beta')}} \quad \text{für} \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k = \sqrt{\left(\frac{x+\frac{\alpha'}{\beta'}}{x+\frac{\alpha}{\beta}}\right)}.$$

In einem verwandten Falle ist das Product $\beta\beta'$ negativ und man geht zu ihm über, indem man $\frac{k}{\sqrt{-1}}$ für k setzt, wodurch man auf der Stelle erhält:

$$y = \frac{k}{\sqrt{(-\beta\beta')}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}k = \sqrt{\left(-\frac{x+\frac{\alpha'}{\beta'}}{x+\frac{\alpha}{\beta}}\right)},$$

und diese Form des Integrals ist denn allgemein bekannt.

§. 97.

Die Integrale $\int\frac{\partial k}{1+e\,\mathfrak{Cos}\,k}$ und $\int\frac{\partial k}{(1+e\,\mathfrak{Cos}\,k)^2}$ gehören zu einem Geschlechte von Integralen, was bei Untersuchungen über die Kegelschnitte und die Bewegungen der himmlischen Körper in ihnen in Anwendung kommt. Man kann diese gebrochenen Functionen in ganze dadurch verwandeln, dafs man einen Arcus φ einführt, der von dem Arcus k so abhängt, wie es die folgende Gleichung ausdrückt:

$$(1+e\,\mathfrak{Cos}\,k).(1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi) = 1-e^2.$$

Wird die Multiplication vollzogen, so erhält man:

$$1. \quad \mathfrak{Cos}\,k = \frac{\mathfrak{Cos}\,\varphi - e}{1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi}.$$

Da $\mathfrak{Cos}\,k + 1 = 2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{k^2}{2} = \frac{(1-e)(1+\mathfrak{Cos}\,\varphi)}{1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi} = \frac{2(1-e).\,\mathfrak{Cos}\,\frac{\varphi^2}{2}}{1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi}$ und

$\mathfrak{Cos}\,k - 1 = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{k^2}{2} = \frac{(1+e)(\mathfrak{Cos}\,\varphi - 1)}{1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi} = \frac{2(1+e).\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varphi^2}{2}}{1-e\,\mathfrak{Cos}\,\varphi}$ ist,

so hat man:

$$2.\quad \mathrm{Cos}\frac{k}{2} = \mathrm{Cos}\frac{\varphi}{2}.\sqrt{\left(\frac{1-e}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)},$$

$$3.\quad \mathrm{Sin}\frac{k}{2} = \mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2}.\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)},$$

$$4.\quad \mathrm{Sin}\,k = \mathrm{Sin}\,\varphi.\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.$$

$$5.\quad \mathrm{Tang}\frac{k}{2} = \mathrm{Tang}\frac{\varphi}{2}.\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.$$

Ist nun die unbestimmte willkürlich gewählte beständige Zahl e positiv und <1, so ist offenbar der Gleichung 5. gemäfs $\mathrm{Tang}\frac{k}{2} > \mathrm{Tang}\frac{\varphi}{2}$, und also der Arcus φ kleiner als der Arcus k.

Die Peziehungen zwischen φ und k können auch umgekehrt werden, und man hat dann

$$6.\quad \mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{\mathrm{Cos}\,k+e}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k},$$

$$7.\quad \mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,k.\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k},$$

$$8.\quad \mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{Sin}\frac{k}{2}.\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k}\right)},$$

$$9.\quad \mathrm{Cos}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{Cos}\frac{k}{2}.\sqrt{\left(\frac{1+e}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k}\right)},$$

$$10.\quad \mathrm{Tang}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{Tang}\frac{k}{2}.\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.$$

§. 98.

Differentiirt man die Gleichung

$$\log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \log \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}k + \log\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)},$$

so erhält man zunächst:

$$\frac{\partial\,\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\partial\,\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}k}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}k},$$

und dann weiter:

$$\frac{\partial\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \frac{\partial k}{\mathrm{Sin}\,k}$$

Hieraus zieht man weiter $\partial k = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}.\partial\varphi$, und man hat also:

$$\frac{\partial k}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k} = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2)}};\quad \frac{\partial k}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,k)^2} = \frac{\partial\varphi\,(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi)}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integration giebt nun auf der Stelle die beiden Formeln:

$$\int\frac{\partial k}{1+e\,\mathrm{Cos}\,k} = \frac{\varphi}{\sqrt{(1-e^2)}};\quad \int\frac{\partial k}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,k)^2} = \frac{\varphi-e\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn die Integrale für $k=0$ und also auch für $\varphi=0$ verschwinden sol-

len. Zur Berechnung des Arcus φ dient dann aber eine von den Formeln 6., 7., 8., 9., 10. des §. 97. Diese Formeln geben aber für φ einen unmöglichen Arcus, wenn $e > 1$ ist. Die Unmöglichkeit fällt aber sogleich weg, wenn man nur $\frac{\varphi}{\sqrt{-1}}$ für φ setzt, und man erhält dann:

$$\int \frac{\partial k}{1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k} = \frac{\varphi}{\sqrt{(e^2-1)}}; \quad \int \frac{\partial k}{(1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k)^2} = \frac{e \sin\varphi - \varphi}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Arcus φ wird dann aber nach einer von den folgenden Formeln berechnet:

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{Cos}\,k + e}{1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k},$$

$$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,k . \sqrt{(e^2-1)}}{1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \mathfrak{Sin}\,\frac{k}{2} . \sqrt{\left(\frac{e-1}{1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k}\right)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \mathfrak{Cos}\,\frac{k}{2} . \sqrt{\left(\frac{e+1}{1 + e\,\mathfrak{Cos}\,k}\right)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2} . \sqrt{\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}.$$

Man sieht hier, wie selbst die cyklischen Functionen bei Rechnungen mit hyperbolischen Functionen nothwendig sind, ohne dafs die Longitudinalzahlen dabei in Anwendung kommen.

Wenn endlich $e = \pm 1$ ist, so versagen die bisherigen Formeln ebenfalls. Man hat aber

$$\int \frac{\partial k}{1 + \mathfrak{Cos}\,k} = \int \frac{\partial k}{2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}k^2} = \mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2},$$

$$\int \frac{\partial k}{1 - \mathfrak{Cos}\,k} = \int \frac{-\partial k}{2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}k^2} = \mathfrak{Cot}\,\frac{k}{2}.$$

Setzt man aber $\mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2}$ oder auch $\mathfrak{Cot}\,\frac{k}{2} = v$, so ist $\partial k = \frac{2\partial v}{1-v^2} = -\frac{2\partial v}{v^2-1}$; ferner ist $\frac{1}{1+\mathfrak{Cos}\,k} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathfrak{Tang}\,\frac{k^2}{2}\right)$ und $\frac{1}{1-\mathfrak{Cos}\,k} = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cot}\,\frac{k^2}{2} - 1\right)$. Man hat also

$$\int \frac{\partial k}{(1 + \mathfrak{Cos}\,k)^2} = \tfrac{1}{2}\int \partial v (1 - v^2) \quad \text{für} \quad v = \mathfrak{Tang}\,\frac{k}{2}, \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\partial k}{(1 - \mathfrak{Cos}\,k)^2} = -\tfrac{1}{2}\int \partial v (v^2 - 1) \quad \text{für} \quad v = \mathfrak{Cot}\,\frac{k}{2};$$

d. h.

$$\int \frac{\partial k}{(1 + \mathfrak{Cos}\,k)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{6}\,\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}k^3,$$

$$\int \frac{\partial k}{(1 - \mathfrak{Cos}\,k)^2} = -\tfrac{1}{6}\,\mathfrak{Cot}\,\tfrac{1}{2}k^3 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Cot}\,\tfrac{1}{2}k.$$

§. 99.

Den so eben mitgetheilten Formeln entsprechen eben so viele andere, die man aber aus ihnen sogleich erhält, wenn man nur $k\sqrt{-1}$ für k und zugleich $\varphi\sqrt{-1}$ für φ setzt.

Man erhält für $e<1$:

$$\int\frac{\partial k}{1+e\cos k}=\frac{\varphi}{\sqrt{(1-e^2)}},\text{ und }\int\frac{\partial k}{(1+e\cos k)^2}=\frac{\varphi-e\sin\varphi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und zur Findung von φ aus k hat man:

$$\cos\varphi=\frac{\cos k+e}{1+e\cos k},\qquad \cos\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1+e}{1+e\cos k}\right)},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin k\,.\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\cos k},\qquad \tang\frac{\varphi}{2}=\tang\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e\cos k}\right)},$$

Ferner hat man für $e>1$:

$$\int\frac{\partial k}{1+e\cos k}=\frac{\varphi}{\sqrt{(e^2-1)}},\text{ und }\int\frac{\partial k}{(1+e\cos k)^2}=\frac{e\,\mathfrak{Sin}\,\varphi-\varphi}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Zur Berechnung des Arcus φ dient dann aber eine der folgenden Formeln:

$$\mathfrak{Cos}\,\varphi=\frac{\cos k+e}{1+e\cos k},\qquad \mathfrak{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi=\cos\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{e+1}{1+e\cos k}\right)},$$

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi=\frac{\sin k\,.\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\cos k},\qquad \mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi=\tang\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}.$$

$$\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi=\sin\frac{k}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{e-1}{1+e\cos k}\right)},$$

Wenn endlich $e=\pm1$ ist, so hat man:

$$\int\frac{\partial k}{1+\cos k}=\tang\frac{k}{2},\qquad\text{und}\qquad \int\frac{\partial k}{1-\cos k}=-\cot\frac{k}{2},$$

$$\int\frac{\partial k}{(1+\cos k)^2}=\tfrac{1}{2}\tang\frac{k}{2}+\tfrac{1}{6}\tang\frac{k^3}{2},\qquad \int\frac{\partial k}{(1-\cos k)^2}=-\tfrac{1}{2}\cot\frac{k}{2}-\tfrac{1}{6}\cot\frac{k^3}{3}.$$

Diese Beispiele, welche man leicht bedeutend vermehren könnte, mögen hinreichen, und den Entschlufs herbeiführen, in den höheren Rechnungen sich der hyperbolischen Functionen eben so bedienen zu wollen, wie man bisher die Kreisfunctionen allein angewandt hat, und diesen letztern also statt der früher üblichen logarithmischen Integrale die durch hyperbolische Functionen ausgedrückten Integrale gegenüber zu stellen.

Anhang.

Erster Abschnitt.

Umformung einer Reihe.

§. 100.

Über die Reihe $P = S\,[a]^{\alpha}_{\alpha'} \cdot \frac{[b]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}} \cdot x^{\alpha}$ hat der Ritter Herr Gaufs eine sehr lehrreiche Abhandlung geschrieben, ohne jedoch in derselben einer Umformung zu gedenken, welche sie gestattet und wodurch sie in eine Reihe von ähnlicher Form umgestaltet wird. Wird mit Q die folgende Reihe bezeichnet:

$$Q = S(-1)^{\alpha}\,[c-a]^{\alpha}_{\alpha'} \cdot \frac{[b]^{\alpha'}}{[c]^{\alpha}}(1+x)^{b-\alpha} \cdot x^{\alpha},$$

so ist zu beweisen, dafs $P = Q$ sei. Die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes liegt am Tage, denn die Formen der Reihen P und Q sind sehr allgemein, da unter a, b, c und x beliebige Zahlen verstanden werden dürfen. Wir wollen hier die Reihe Q so umformen, dafs ihr allgemeines Glied mit dem allgemeinen Gliede der Reihe P zusammenfällt, und entwickeln daher die in Q vorkommende Potenz $(1+x)^{b-\alpha}$ nach steigenden Potenzen von x, um in jedem Gliede die Entwickelung der ihm zugehörigen Potenz von $1+x$ zu substituiren. Dadurch erhalten wir eine Reihe von der Form:

$$Q = 1 + \overset{1}{q} \cdot x + \overset{2}{q} \cdot x^2 + \overset{3}{q} \cdot x^3 \dots \overset{\alpha}{q} \cdot x^{\alpha} \dots = S\overset{\alpha}{q} \cdot x^{\alpha},$$

und es ist allgemein

$$\overset{r}{q} = S(-1)^{\alpha}\,[c-a]^{\alpha}_{\alpha'} \cdot \frac{[b]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}} \cdot [b-\alpha]^{\beta}_{\beta'} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Um diesen Ausdruck zusammenzuziehen, bemerke man, dafs $[b]^{\alpha}[b-\alpha]^{\beta} = [b]^{\alpha+\beta} = [b]^{r}$, und auch $\frac{1}{[c]^{\alpha}} = \frac{[c-\alpha]^{\beta}}{[c]^{r}}$ ist; ferner dafs

$$(-1)^{\alpha} = (-1)^{r} \cdot (-1)^{\beta}, \quad \text{und} \quad (-1)^{\beta}\,[c-\alpha]^{\beta} = [r-c-1]^{\beta}_{\beta'}.$$

Werden diese Werthe im Ausdrucke $\overset{r}{q}$ substituirt, so erhält man offenbar:

$$\overset{r}{q} = (-1)^{r} \cdot \frac{[b]^{r}}{[c]^{r}} \cdot S\,[c-a]^{\alpha}_{\alpha'}\,[r-c-1]^{\beta}_{\beta'} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Nun ist aber allgemein bekannt, dafs dem binomischen Lehrsatze für die Facultäten gemäfs:

$$[v+w]^{r}_{r,} = S\,[v]^{\alpha}_{\alpha,}\,[w]^{\beta}_{\beta,} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r)$$

sei, folglich hat man in Anwendung dieser Formel $v=c-a$ und $w=r-c-1$, und also $v+w=r-a-1$, oder:

$$\overset{r}{q} = (-1)^{r}.[r-a-1]^{r}_{r,}.\frac{[b]^{r}}{[c]^{r}} = [a]^{r}_{r,}.\frac{[b]^{r}}{[c]^{r}}.$$

Da nun dieser Werth von $\overset{r}{q}$ auch der Coëfficient von x^{r} in der Reihe P ist, so ist also die Reihe Q in die Reihe P umgeformt worden. Man könnte offenbar aus der Reihe P umgekehrt die Reihe Q durch Umformung herleiten. Dieser Beweis des von dem Verfasser gefundenen Theorems ist direct und kurz, aber sehr verschieden von der Herleitung, wodurch der Verfasser das Theorem gefunden hat.

§. 101.

Um eine Idee von der Wichtigkeit des Theorems zu geben, mögen ein paar Folgerungen aus demselben hier einen Platz finden. Zuvor wollen wir jedoch die Reihe P bezeichnen mit $F(a,b,c,x)$, dann ist die Reihe $Q=(1+x)^{b}.F\left(c-a,b,c,\frac{-x}{1+x}\right)$, und also

$$F(a,b,c,x) = (1+x)^{b}.F\left(c-a,b,c,\frac{-x}{1+x}\right).$$

Setzen wir $a+v$ für c, so haben wir also auch:

$$F(a,b,a+v,x) = (1+x)^{b}.F(v,b,a+v,z),$$

wenn zur Abkürzung auch noch z gesetzt wird für $\frac{-x}{1+x}$. In Anwendung desselben Lehrsatzes hat man aber auch:

$$F(v,b,a+v,z) = F(b,v,a+v,z) = (1+z)^{v}.F\left(a+v-b,v,a+v,\frac{-z}{1+z}\right),$$

und es ist also:

$$F(a,b,a+v,x) = (1+x)^{b}.(1+z)^{v}.F\left(a+v-b,v,a+v,\frac{-z}{1+z}\right).$$

Nun ist aber $z=\frac{-x}{1+x}$, also $1+z=\frac{1}{1+x}$, und $\frac{-z}{1+z}=\frac{x}{1+x}(1+x)=x$, folglich hat man:

$$F(a,b,a+v,x) = (1+x)^{b-v}.F(a,+v-b,v,a+v,x).$$

Wird nun $b-v=n$ gesetzt, oder $b=n+v$, so hat man:

$$(1+x)^{n} = \frac{F(a,n+v,a+v,x)}{F(v,-n+a,a+v,x)}.$$

Dieser sehr allgemeine Ausdruck für die Potenz $(1+x)^n$, deren Exponent n eine beliebige Zahl sein darf, enthält zwei Gröfsen a und v, welche nach Belieben bestimmt werden dürfen, und ist von Euler bewiesen worden. Derselbe hat seiner Herleitung, welche etwas weitläufig und nicht wohl zu übersehen ist, eine Abhandlung gewidmet, worin er zum Schlusse aus dieser Formel Approximationswerthe einiger Functionen, als $\log(1+x)$ und e^x, herleitet. Hier erscheint diese Formel nur als eine unmittelbare Folgerung aus dem vorigen allgemeinen Theorem.

§. 102.

Da nach §. 100. die Reihe $F\left(a, b, c, \frac{-z}{1+z}\right) = \left(\frac{1}{1+z}\right)^b . F(c-a, b, c, z)$ ist, so setze man $c = -\frac{v}{d}$; $a = -1$, $b = -1$ und $z = -x^2$, und es ist dann

$$\frac{[c-a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}} = \frac{\left[-\frac{v}{d}+1\right]^{\alpha}}{\left[-\frac{v}{d}\right]^{\alpha}} = \frac{\left(1-\frac{v}{d}\right)\left[-\frac{v}{d}\right]^{\alpha-1}}{\left[-\frac{v}{d}\right]^{\alpha-1}.\left(-\frac{v}{d}-\alpha+1\right)} = \frac{d-v}{-v-\alpha d+d} = \frac{v-d}{v-d+\alpha d},$$

und man findet überhaupt:

$$S(-1)^{\alpha}.\frac{\alpha' d^{\alpha}}{[v-d, -d]^{\alpha+1}}.\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^{\alpha+1} = S\frac{x^{2\alpha+2}}{v-d+\alpha d}.$$

Setzt man weiter z. B. $d=2$ und $v-d=w$, so hat man:

$$S\frac{x^{2\alpha+2}}{w+2\alpha} = S(-1)^{\alpha}.\frac{\alpha'.2^{\alpha}}{[w, -2]^{\alpha+1}}.\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^{\alpha+1} \text{*)}.$$

Setzen wir nun noch $w=1$, so ist die Reihe auf der linken Seite $= x\log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$, und man hat also:

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang}=x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{\alpha'.2^{\alpha}}{[1, -2]^{\alpha+1}}.\frac{x^{2\alpha+1}}{(1-x^2)^{\alpha+1}}.$$

Setzt man aber $\mathfrak{Tang}\,k = x$, so ist $1-x^2 = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,x^2}$ und $\frac{x^{2\alpha+1}}{(1-x^2)^{\alpha+1}} = \mathfrak{Tang}\,k^{2\alpha+1}.\mathfrak{Cos}\,k^{2\alpha+1} = (\mathfrak{Tang}\,k.\mathfrak{Cos}\,k)^{2\alpha+1}.\mathfrak{Cos}\,k = \mathfrak{Sin}\,k^{2\alpha+1}.\mathfrak{Cos}\,k$, und man hat also

$$k = \mathfrak{Cos}\,k.S(-1)^{\alpha}\frac{\alpha'.2^{\alpha}}{[1, -2]^{\alpha+1}}.\mathfrak{Sin}\,k^{2\alpha+1}.$$

---

*) Die Herleitung dieser speciellen Formel macht hauptsächlich den Inhalt eines vom Herrn Prof. Dr. Grunert verfafsten Gymnasial-Programmes vom Jahre 1826 aus; der von ihm gewählte Gang ist aber mühselig.

Wird $k\sqrt{-1}$ für k gesetzt, so hat man noch die folgende Reihe

$$k = \cos k \,.\, S(+1)^{\alpha} \frac{\alpha'.2^{\alpha}}{[1,-2]^{\alpha+1}} . \sin k^{2\alpha+1}.$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen sind nun die folgenden:

$$k = \mathfrak{Cos}\,k.\left(\mathfrak{Sin}\,k - \frac{2}{1}.\frac{\mathfrak{Sin}\,k^3}{3} + \frac{2.4}{1.3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,k^5}{5} - \frac{2.4.6}{1.3.5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,k^7}{7} + \text{etc.}\right),$$

$$k = \cos k.\left(\sin k + \frac{2}{1}.\frac{\sin k^3}{3} + \frac{2.4}{1.3}.\frac{\sin k^5}{5} + \frac{2.4.6}{1.3.5}.\frac{\sin k^7}{7} + \text{etc.}\right).$$

Wenn man in der Reihe für $\log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ einige erste Glieder unverändert lassen will, und $\log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n-1}.S.\frac{x^{2\alpha+2}}{2n+1+2\alpha}$ setzt, so kann man den zweiten Theil allein umformen, indem man $w = 2n+1$ setzt, und hat dann

$$\mathfrak{Arc}(\mathfrak{Tang} = x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n-1}.S(-1)^{\alpha}.\frac{\alpha'.2^{\alpha}}{[2n+1,-2]^{\alpha+1}}.\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^{\alpha+1}.$$

Diese Reihe kann ebenfalls leicht auf cyklische Functionen übertragen werden. Man kann überhaupt aus dem im §. 100. bewiesenen Lehrsatze noch sehr viele andere interessante Folgerungen ziehen.

Zweiter Abschnitt.

Der polynomische Lehrsatz ohne die Voraussetzung des binomischen und ohne die Hülfe der höheren Rechnung.

§. 103.

Werden die beiden Reihen $S\overset{\alpha}{a}x^{\alpha}$ und $S\overset{\beta}{c}x^{\beta}$ multiplicirt, so erhält das Product die Form der Reihe $S\overset{\alpha}{A}x^{\alpha}$ und der Coëfficient des allgemeinen Gliedes in ihr ist:

$$\overset{r}{A} = S\overset{\alpha}{a}\overset{\beta}{c} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $r = \alpha+\beta$, so hat man

$$r.\overset{r}{A} = S\alpha.\overset{\alpha}{a}\overset{\beta}{c} + S\beta.\overset{\alpha}{a}\overset{\beta}{c},$$

und die Bedingungsgleichung für α und β ist die vorige. Also ist auch, wenn mit x^r multiplicirt, dann r als veränderlich betrachtet und etwa γ für r gesetzt wird:

$$S\gamma.\overset{\gamma}{A}x^{\gamma} = S\alpha.\overset{\alpha}{a}.\overset{\beta}{c}x^{\gamma} + S\beta.\overset{\alpha}{a}.\overset{\beta}{c}x^{\gamma} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Nun ist weiter

$(S\beta.\overset{\beta}{c}x^\beta)(S\overset{\alpha}{a}x^\beta) = S\beta.\overset{\alpha\,\beta}{a\,c}x^\gamma$ und $(S\alpha.\overset{\alpha}{a}x^\alpha)(S\overset{\beta}{c}x^\beta) = S\alpha.\overset{\alpha\,\beta}{a\,c}x^\gamma$, wenn die Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=\gamma$ für die Ausdrücke auf der rechten Seite beibehalten wird; also hat man:

$$S\gamma.\overset{\gamma}{A}x^\gamma = (S\beta.\overset{\beta}{c}x^\beta)(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha) + (S\alpha.\overset{\alpha}{a}x^\alpha)(S\overset{\beta}{c}x^\beta),$$

und da $S\overset{\gamma}{A}x^\gamma = (S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)(S\overset{\beta}{c}x^\beta)$ ist, so erhält man, wenn Gleiches durch Gleiches dividirt wird:

$$\frac{S\gamma.\overset{\gamma}{A}.x^\gamma}{S\overset{\gamma}{A}x^\gamma} = \frac{S\beta.\overset{\beta}{c}x^\beta}{S\overset{\beta}{c}x^\beta} + \frac{S\alpha.\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha}.$$

Werden also die Reihen $S\overset{\alpha}{a}x^\alpha$, $S\overset{\beta}{c}x^\beta$, $S\overset{\gamma}{A}x^\gamma$ bezeichnet mit p, q, P und die Reihen $S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha$, $S\beta\overset{\beta}{c}x^\beta$, $S\gamma\overset{\gamma}{A}x^\gamma$ mit p', q', P', so entsteht die Reihe p' eben so aus p, wie q' aus q und wie P' aus P, und man hat:

$$\frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} = \frac{P'}{P}, \text{ und außerdem ist } P = p.q.$$

Sind mehrere Reihen p, q, r, s etc., deren Product $=P$ sein mag, mit gleichem Fortschritte der Potenzen von x gegeben, so ist eben so:

$$\frac{P'}{P} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q} + \frac{r'}{r} + \frac{s'}{s} + \text{etc.}$$

Wenn also die Reihen p, q, r, s etc., deren Anzahl $=n$ sein mag, gleich sind, so hat man:

$$P = p^n \quad \text{und} \quad \frac{P'}{P} = n.\frac{p'}{p},$$

d. h. wenn $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^n = S\overset{\alpha}{A}x^\alpha$ ist, so ist:

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha} = n.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha}.$$

§. 104.

Um nun zu Potenzen mit gebrochenen Exponenten überzugehen, setzen wir $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^{\frac{m}{n}} = S\overset{\alpha}{A}x^\alpha$, wobei der Kürze wegen der Beweis übergangen wird, dafs $S\overset{\alpha}{A}x^\alpha$ die Form der Entwickelung habe. Es mufs also $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^m = (S\overset{\alpha}{A}x^\alpha)^n$ sein, und wenn wir $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^m = S\overset{\alpha}{c}x^\alpha$ setzen, so ist also auch $(S\overset{\alpha}{A}x^\alpha)^n = S\overset{\alpha}{c}x^\alpha$. Da weiter m und n nach der Annahme positive ganze Zahlen sind, so ist nach §. 103.

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha} = m.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha}, \text{ und } \frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha} = n.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha}.$$

Daher ist offenbar $\dfrac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha}=\dfrac{m}{n}.\dfrac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha}$ und die am Schlusse des §. 103. gefundene Formel gilt also auch für gebrochene positive Exponenten $\frac{m}{n}$.

Stellt man sich weiter unter n eine positive ganze oder auch gebrochene Zahl, unter $-n$ also eine solche, aber negative Zahl vor, und setzen wir

$$(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^{-n} = S\overset{\alpha}{A}x^\alpha,$$

so soll also $(S\overset{\alpha}{A}x^\alpha).(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^n=1$ sein. Wird aber $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^n=S\overset{\alpha}{c}x^\alpha$ gesetzt, so ist nach dem Vorigen, weil hier der Exponent n positiv ist:

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha} = n.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha}.$$

Das Product $(S\overset{\alpha}{A}x^\alpha)(S\overset{\alpha}{c}x^\alpha)$ mufs $=1$, d. h. $=S\overset{\alpha}{k}x^\alpha$ sein, wenn in dieser Reihe $\overset{0}{k}=1$, $\overset{1}{k}=0$, $\overset{2}{k}=0$, $\overset{3}{k}=0$ etc. ist. Es ist also nach §. 103.

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha}+\frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha} = \frac{S\alpha\overset{\alpha}{k}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{k}x^\alpha} = 0,$$

weil im Zähler des Ausdrucks auch das Glied $0.\overset{0}{k}.x^0=0$ und der Nenner $=1$ ist. Wird aber mit der Gleichung

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha}=n.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha} \text{ die Gleichung } \frac{S\alpha\overset{\alpha}{c}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{c}x^\alpha}=-\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha}$$

verbunden, so erhält man:

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha} = (-n).\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha},$$

und die Formel am Schlusse des §. 103. gilt also auch für negative Exponenten; sie ist mithin allgemein. Die Gedrängtheit des Raumes gestattet es nicht, auf Exponenten von der Form $a+b\sqrt{-1}$ hier einzugehen. In einem von dem Verfasser gelieferten Schulprogramme vom Jahre 1825, woraus Gegenwärtiges ein Auszug ist, ist auch von solchen Exponenten gehandelt worden. Wenn also n eine beliebige Zahl ist, so findet zwischen den Coëfficienten in den durch die Gleichung $(S\overset{\alpha}{a}x^\alpha)^n=S\overset{\alpha}{A}x^\alpha$ verbundenen Reihen die folgende einfache Beziehung Statt:

$$\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x^\alpha} = n.\frac{S\alpha\overset{\alpha}{a}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{a}x^\alpha}.$$

§. 105.

Schafft man in der Gleichung $\frac{S\alpha\overset{\alpha}{A}x^\alpha}{S\overset{\alpha}{A}x} = n.\frac{S\beta\overset{\beta}{a}x^\beta}{S\overset{\beta}{a}x^\beta}$ die Nenner weg, so giebt die Multiplication auf jeder Seite eine Reihe, und werden die beiden Reihen identificirt, so erhält man die noch einfachere und allgemeine Formel:

$$S(n\beta-\alpha).\overset{\alpha}{A}.\overset{\beta}{a} = 0 \qquad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=r),$$

von welcher im §. 87. Anwendung gemacht wurde. Für das Binomialtheorem leitet man hieraus die Recursionsformel für die Berechnung der Coëfficienten her. Wird nemlich:

$$(1+x)^n = S\overset{\alpha}{A}x^\alpha$$

gesetzt, so hat man $\overset{0}{a}=1$, $\overset{1}{a}=1$, $\overset{2}{a}=0$, $\overset{3}{a}=0$, $\overset{4}{a}=0$ etc., und die vorige Formel ist nun:

$$-r\overset{r}{A}.a+(n.1-(r-1)\overset{r-1}{A}.a = 0,$$

oder einfacher:

$$\overset{r}{A} = \frac{n-r+1}{r}.\overset{r-1}{A}.$$

Vermöge dieser einfachen Formel findet man $\overset{1}{A}=n\overset{0}{A}$; $\overset{2}{A}=[n]_{\overline{2'}}^{2}\overset{0}{A}$; $\overset{3}{A}=[n]_{\overline{3'}}^{3}\overset{0}{A}$ etc., und allgemein: $\overset{r}{A}=[n]_{\overline{r'}}^{r}\overset{0}{A}$. Man findet aber leicht $\overset{0}{A}=1$ anderweitig, und so ist

$$(1+x)^n = S[n]_{\overline{\alpha'}}^{\alpha}.x^\alpha$$

als für jeden Exponenten richtig bewiesen. Man könnte nun, nachdem die Newtonsche Formel in dieser Allgemeinheit bewiesen ist, dieselbe benutzen, wie gewöhnlich geschieht, um auch die Formel für die independente Berechnung der Polynomial-Coëfficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc. herzuleiten aus der gefundenen und allgemein gültigen Recursionsformel:

$$\overset{r}{A} = S\left(\frac{n(\alpha+1)-\beta}{r.\overset{0}{a}}\right).\overset{\alpha+1}{a}.\overset{\beta}{A} \qquad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=r-1).$$

Wir aber werden auch die gesuchte Formel unabhängig von dem Binomialtheorem ableiten und die Recursionsformel dabei zum Grunde legen. Hätte in dieser nicht jedes Glied einen ihm eigenthümlichen Factor, oder hätte dieselbe die viel einfachere Gestalt:

$$\overset{r}{A} = S\overset{\alpha+1}{a}.\overset{\beta}{A} \qquad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=r),$$

so würde man sie durch $\overset{0}{A}$ dividiren; sie wäre dann:

$$\frac{\overset{r}{A}}{\overset{0}{A}} = \left(\overset{1}{a}.\frac{\overset{r-1}{A}}{\overset{0}{A}}+\overset{2}{a}.\frac{\overset{r-2}{A}}{\overset{0}{A}}\ldots.+\overset{\alpha}{a}.\frac{\overset{r-\alpha}{A}}{\overset{0}{A}}\ldots.+\overset{r}{a}\right)$$

und hätte die gröfste Ähnlichkeit mit einer bekannten combinatorischen Beziehung unter Inbegriffen sogenannter Variationsformen, die ohne Unterschied des Grades zu gewissen Summen aus den Elementen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc. oder ihren Repräsentanten (1, 2, 3, etc.) gebildet sind. Diese combinatorische Formel ist:

$$ {}^rV = (\overset{1}{a}\,.{}^{r-1}V + \overset{2}{a}\,.{}^{r-2}V \ldots\ldots + \overset{\alpha}{a}\,.{}^{r-\alpha}V \ldots\ldots + \overset{r}{a}), $$

und es bezeichnet dann z. B. ${}^rV$ einen Inbegriff solcher Variationsformen, und zwar aller, welche aus den Elementen $(1, 2, 3, \ldots\ldots r)$ zur Summe r gebildet werden können. (Dieselbe Formel findet man in des Hrn. Hofrath Thibaut „Grundrifs der allgemeinen Arithmetik (pag. 140.)" mit umständlicher Belehrung über ihre Bedeutung und ihre Brauchbarkeit.) Aus dieser Übereinstimmung würde man schliefsen:

$$ \frac{\overset{r}{A}}{\overset{0}{A}} = {}^rV = {}^r_pC, $$

und es bezeichnet dann ${}^r_pC$ einen aus den Elementen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots\ldots \overset{r}{a}$ gebildeten Inbegriff von Combinationsformen zur Summe r (unter unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente); jede Combinationsform wird angesehen als ein Product ihrer Elemente und hat zum Coëfficienten die ihr zukommende Permutationszahl.

§. 106.

Aber, ungeachtet die Recursionsformel nicht die genannte Einfachheit hat, wird dennoch der Quotient $\frac{\overset{r}{A}}{\overset{0}{A}}$ eben so aus den Elementen $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots\ldots \overset{r}{a}$ gebildet sein, wie der Inbegriff ${}^rV$ aus denselben Elementen, nur wird jede zur Summe r gebildete Variationsform einen Coëfficienten erhalten müssen, welcher ein Product so vieler Factoren ist, als die Form Elemente hat, weil ein zur Form hinzukommendes Element der Recursionsformel gemäfs allemal einen solchen Factor $\frac{n(\alpha+1)-\beta}{r\overset{0}{a}}$, welcher aber ein veränderlicher ist, mitbringt. Man könnte, nachdem alle Formen des Inbegriffes ${}^rV$ gebildet wären, für jede Form das ihr zukommende Product von Factoren als ihren Coëfficienten berechnen; noch mehr, da es unter den Variationsformen mehrere giebt, welche, weil sie Permutationsformen einer Combinationsform sind, dieselben Elemente enthalten, so könnte man die ihnen zukommenden Coëfficienten addiren, und die ge-

fundene Summe der genannten Combinationsform zum Coëfficienten geben. Eine solche Combinationsform des Grades ϑ und zur Summe r gebildet, enthalte das Element $\overset{\alpha+1}{a}$ in π Stellen, und die ihr zugehörige Permutationszahl sei N, so wird es unter den N Permutationsformen eine Menge von $N.\frac{\pi}{\vartheta}$ Formen geben, welche das Element $\overset{\alpha+1}{a}$ an der Spitze führen und also mit diesem Elemente zugleich der Recursionsformel gemäfs den Factor $\frac{n(\alpha+1)-\beta}{r\overset{0}{a}}$ erhalten. Der Coëfficient wegen des einen Elementes $\overset{\alpha+1}{a}$ auf der ϑten Stelle wird also $=\frac{N.\pi}{\vartheta}\left(\frac{(\alpha+1)n-\beta}{r.\overset{0}{a}}\right)$, und da nach und nach jedes andere Element der Combinationsform diese Stelle beim Permutiren gleichfalls besetzt, so bekommt also die Form wegen dieser einen Stelle eine Summe von Coëfficienten, die man aus dem so eben aufgestellten allgemeinen dadurch erhält, dafs man, ϑ als constant betrachtet, für α, β und π alle zusammengehörige Werthe setzt, welche den folgenden drei Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$S\pi=\vartheta;\quad S(\alpha+1)\pi=r;\quad \alpha+\beta=r-1.$$

Die Combinationsform erhält also aufser ihrer Permutationszahl N wegen ihrer ϑten Stelle den Coëfficienten:

$$S\frac{\pi}{\vartheta}.\left(\frac{(\alpha+1)n-\beta}{r.\overset{0}{a}}\right)=\frac{n}{r\overset{0}{a}\vartheta}.S(\alpha+1)\pi-\frac{1}{r\overset{0}{a}\vartheta}S\pi\beta.$$

Die Summe $S(\alpha+1)\pi$ ist bekannt und $=r$, und da $\pi(\alpha+1)+\pi\beta=\pi r$, so ist $S(\alpha+1)\pi+S\pi\beta=S\pi r=r.S\pi$, und also $S\pi\beta=r\vartheta-r$. Es ist also die gesuchte Summe: $=\frac{n}{r\overset{0}{a}\vartheta}.r-\frac{r\vartheta-r}{r\overset{0}{a}\vartheta}=\frac{n-\vartheta+1}{\overset{0}{a}\vartheta}$.

Der Factor r im Nenner hebt sich also, worauf sehr viel ankommt, gegen r im Zähler, wodurch die Summe $\frac{n-\vartheta+1}{\vartheta.\overset{0}{a}}$ von ihr unabhängig wird; diese Summe hängt also lediglich von der Stelle in der Form ab; er ist also der allgemeine Factor der Factoren eines Productes, welches die Combinationsform aufser ihrer Permutationszahl N zum Coëfficienten vor sich nimmt. Man erhält diese Factoren, indem man für ϑ der Reihe nach die Werthe $(1, 2, 3, 4, \ldots . \vartheta)$ setzt, und es ist demnach dieser Coëfficient:

$$=\frac{n}{1.\overset{0}{a}}.\frac{n-1}{2.\overset{0}{a}}.\frac{n-2}{3.\overset{0}{a}}.\,\ldots\,.\frac{n-\vartheta+1}{\vartheta\overset{0}{a}}=[n]^{\vartheta}_{\vartheta'}.\left(\frac{1}{\overset{0}{a}}\right)^{\vartheta}.$$

Denselben Coëfficienten erhält aber jede mit ihrer Permutationszahl versehene Combinationsform vom ϑten Grade, d. h. dieser Coëfficient ist der ganzen Classe dieser Formen gemeinschaftlich und ändert sich nur für die übrigen Classen der zur Summe r gebildeten Formen; es ist also:

$$\overset{r}{A} = \overset{0}{A} . S\,[n]^{\vartheta}_{\vartheta'} . \left(\frac{1}{\overset{0}{a}}\right)^{\vartheta} . {}^{r}_{\vartheta}\overset{\vartheta}{C},$$

in welchem Ausdrucke sich das Summenzeichen S bloſs auf die Veränderlichkeit von ϑ bezieht, wofür alle Werthe $\vartheta = (1, 2, 3, \ldots . r)$ gesetzt werden müssen. Der Coëfficient $\overset{0}{A}$ muſs vor der recurrirenden Berechnung bekannt sein, er kann aus der Recursionsformel nicht gefunden werden. Man findet aber leicht: $\overset{0}{A} = (\overset{0}{a})^n$, und hat also;

$$\overset{r}{A} = S\,[n]^{\vartheta}_{\vartheta'} . (\overset{0}{a})^{n-\vartheta} . {}^{r}_{\vartheta}\overset{\vartheta}{C}.$$

Diese Formel ist allgemein bekannt, wie auch alles Übrige, was noch über das Polynomialtheorem vorzubringen wäre. (Man findet dieselbe Formel in des Hrn. Hofrath Thibaut „Grundriſs der allgemeinen Arithmetik p. 200.")

§. 107.

Aus der in §. 104. bewiesenen Formel leitet man leicht eine noch allgemeinere her. Man habe nemlich von einem Polynome P bereits die Potenzen mit den Exponenten f, g, und $f+g$ entwickelt, und es sei:

$$P^f = S\,\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha; \quad P^g = S\,\overset{\alpha}{\varphi}(g) . x^\alpha; \quad P^{f+g} = S\,\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha.$$

Da nun aber $P^{f+g} = (P^f)^{\frac{f+g}{f}}$ ist, so hat man nach §. 104. offenbar:

$$\frac{S\alpha . \overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha} = \frac{f+g}{f} . \frac{S\alpha . \overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}.$$

Auſserdem hat man noch die folgende identische zweite Gleichung:

$$\frac{f+g}{f} . \frac{S\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha} = \frac{f+g}{f} . \frac{S\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit q und die zweite mit p, so erhält man:

$$\frac{S\left\{p\left(\frac{f+g}{f}\right) + \alpha q\right\} . \overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha} = \frac{f+g}{f} . \frac{S(p+\alpha q)\,\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}{S\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha}.$$

Setzt man nun für $S\,\overset{\alpha}{\varphi}(f+g) . x^\alpha$ das Product aus $S\,\overset{\alpha}{\varphi}(f) . x^\alpha$ und $S\,\overset{\alpha}{\varphi}(g) . x^\alpha$, so hat man nach Fortschaffung der Nenner, wenn die beiden

Reihen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens identificirt werden, folgende Beziehung unter den Polynomial-Coëfficienten:

$$\left(p+\frac{rfq}{f+g}\right).\overset{r}{\varphi}(f+g) = S(p+\alpha q).\overset{\alpha}{\varphi}(f).\overset{\beta}{\varphi}(g) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r),$$

welche sehr fruchtbar an Folgerungen ist. Über dieselben sehe man die Analysis von Herrn **Schweins**, worin ebenfalls ein Beweis des Polynomialtheorems ohne die Voraussetzung des Binomialtheorems versucht worden ist. Der von **Klügel** geführte Beweis ist ungenügend. Unter diesen Folgerungen zeichnen wir hier die allgemeinste aus:

$$\frac{p(f+g)+r(qf-pd)}{f(f+g)(g-rd)}.\overset{r}{\varphi}(f+g) = S\frac{p+\alpha q}{(g-\alpha d)(f+\alpha d)}.\overset{\beta}{\varphi}(g-\alpha d).\overset{\alpha}{\varphi}(f+\alpha d),$$

wozu die Bedingungsgleichung $\alpha+\beta=r$ gehört. Man hat nur einen besondern Fall dieser Formel nöthig, um zu beweisen, daſs wenn gesetzt wird:

$$z^n = S\overset{\alpha}{\varphi}(1).x^{p+\alpha q},$$

durch Umkehrung gefunden wird die folgende Reihe:

$$x^m = S\frac{m}{m+\alpha q}.\overset{\alpha}{\varphi}\left(\frac{-m-\alpha q}{p}\right).z^{\frac{n}{p}(m+\alpha q)} \quad \text{und}$$

$$\log x = \log\left(\frac{z^n}{\overset{0}{\varphi}(1)}\right)^{\frac{1}{p}} + S\frac{1}{(\alpha+1)q}.\overset{\alpha+1}{\varphi}\left(-\frac{q}{p}(\alpha+1)\right).z^{\frac{(\alpha+1)nq}{p}}.$$

Diese sehr bekannten Reihen sind nur deswegen hierher gesetzt worden, weil später davon Gebrauch gemacht werden wird.

§. 108.

Wenn die Coëfficienten $\overset{0}{\varphi}1$, $\overset{1}{\varphi}1$, $\overset{2}{\varphi}1$, $\overset{3}{\varphi}1$, etc. als Elemente einer Scale $p=\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc. gegeben sind, so wird ein Polynomial-Coëfficient $\overset{r}{\varphi}n$ lediglich aus den Elementen dieser Scale berechnet, und jedes Lehrbuch der Analysis giebt dazu die auf die Formeln §. 105. und §. 106. gegründete nähere Anweisung. Ist daher allgemein $\overset{r}{\varphi}1$ für jede ganze Zahl r, welche nicht gröſser als r zu sein braucht, bekannt: $\overset{r}{\varphi}1=\overset{r}{a}$, so können die Coëfficienten $\overset{0}{\varphi}n$, $\overset{1}{\varphi}n$, $\overset{2}{\varphi}n$, $\overset{3}{\varphi}n$, ... bis $\overset{r}{\varphi}n$ einschlieſslich berechnet werden. Man nehme nun eine andere Scale $q=(\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots.)$ an, welche von der vorigen p nur darin verschieden ist, daſs das erste Glied $\overset{0}{a}$ der Scale p in q fehlt, und wird in ähnlicher Art gesetzt $\overset{0}{\psi}1=\overset{1}{a}$, $\overset{1}{\psi}1=\overset{2}{a}$, $\overset{2}{\psi}1=\overset{3}{a}$, ... $\overset{r}{\psi}1=\overset{r+1}{a}$, so können die Coëfficienten $\overset{0}{\psi}n$, $\overset{1}{\psi}n$, $\overset{2}{\psi}n$, etc.

ebenfalls aus den Elementen der Scale q berechnet werden. Diese Coëfficienten treten dadurch in Zusammenhang mit den Coëfficienten $\overset{0}{\varphi}n$, $\overset{1}{\varphi}n$, $\overset{2}{\varphi}n$, etc. und über diesen Zusammenhang bleibt noch Einiges zu sagen übrig.

Setzt man die Reihe $P = S\overset{\alpha}{a}x^{\alpha} = S\overset{n}{\varphi}1.x^{\alpha}$ und $Q = S\overset{\alpha+1}{a}.x^{\alpha+1} = S\overset{\alpha+1}{\varphi}1.x^{\alpha+1} = S\overset{\alpha}{\psi}1.x^{\alpha+1}$, so hat man $P^n = S\overset{n}{\varphi}n.x^{\alpha}$ und $Q^n = S\overset{\alpha}{\psi}n.x^{n+\alpha}$, und außerdem ist $P = \overset{0}{a} + Q$. In Anwendung des Binomialtheorems hat man nun offenbar:

$$P^n = (\overset{0}{a})^n.\left(1+\frac{Q}{\overset{0}{a}}\right)^n = S\underset{\overline{\alpha,}}{\overset{\alpha}{[n]}}.\overset{0}{a}^{n-\alpha}.Q^{\alpha}.$$

Da nun aber $Q^{\alpha} = S\overset{\beta}{\psi}\alpha.x^{\alpha+\beta}$ ist, wenn das Summezeichen S hier bloß auf die Veränderlichkeit von β geht, so erhält man, wenn diese Reihe und auch für P^n die Reihe substituirt wird, durch Identificirung der beiden entstehenden Reihen die folgende Formel, welche aber mit der in §. 106. gefundenen im Grunde dieselbe ist.

$$1.\quad \overset{r}{\varphi}n = S\underset{\overline{\alpha,}}{\overset{\alpha}{[n]}}.\overset{0}{a}^{n-\alpha}.\overset{\beta}{\psi}\alpha \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Man kann diese Formel umkehren, so daß die Coëfficienten ψ durch die Coëfficienten φ ausgedrückt werden. Man gelangt aber einfacher zum Ziele, wenn man bedenkt, daß $Q = P - \overset{0}{a}$ und also $Q^m = (-1)^m S(-1)^{\alpha}\underset{\overline{\alpha,}}{\overset{\alpha}{[m]}}P^{\alpha}$ ist. Werden für Q^m und P^{α} die Reihen substituirt, so erhält man:

$$2.\quad \overset{r}{\psi}m = S(-1)^{\beta}\underset{\overline{\beta,}}{\overset{\beta}{[m]}}.\overset{0}{a}^{\beta}.\overset{m+r}{\varphi}\alpha \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Dieser Ausdruck ist jedoch nur dann zu gebrauchen, wenn m eine positive ganze Zahl ist. Aber dieser Ausdruck für $\psi\alpha$ kann in der Formel (1.) substituirt werden, und man erhält dadurch:

$$\overset{r}{\varphi}n = S(-1)^{\gamma}\underset{\overline{\gamma,}}{\overset{\gamma}{[r-\beta]}}\underset{\overline{(r-\beta),}}{\overset{r-\beta}{[n]}}\overset{0}{a}^{n-\delta}.\overset{r}{\varphi}\delta \qquad \text{cond. } (\beta+\gamma+\delta=r).$$

Dieser Ausdruck wird einfacher vorgestellt unter

$$\overset{r}{\varphi}n = S\overset{\lambda}{A}.\overset{0}{a}^{n-\delta}\overset{r}{\varphi}\delta \qquad \text{cond. } (\lambda+\delta=r),$$

und man hat dann:

$$\overset{m}{A} = S(-1)^{\gamma}\underset{\overline{\gamma,}}{\overset{\gamma}{[r-\beta]}}\underset{\overline{(r-\beta),}}{\overset{r-\beta}{[n]}} \qquad \text{cond. } (\beta+\gamma=m).$$

Dieser Ausdruck gestattet aber noch eine bedeutende Zusammenziehung.

Es ist nemlich $[n]^{r-m+\gamma} = [n]^{r-m}\,[n-r+m]^{\gamma}$, und eben so ist $(r-m+\gamma)' = (r-m)'\,[r-m+\gamma]^{\gamma}$, also hat man:

$$\overset{m}{A} = \frac{[n]^{r-m}}{(r-m)'} \cdot S(-1)^{\gamma}\,\frac{[n-r+m]^{\gamma}}{\gamma'} \qquad \text{cond. } (\beta+\gamma=m).$$

Nun ist weiter $(-1)^{\gamma} = (-1)^{m}(-1)^{\beta} = (-1)^{m}\,\frac{[-1]^{\beta}}{\beta'}$, also hat man $\overset{m}{A} = (-1)^{m}\,\frac{[n]^{r-m}}{(r-m)'}\,S\,\frac{[-1]^{\beta}}{\beta'}\,\frac{[n-r+m]^{\gamma}}{\gamma'}$, und in Anwendung des binomischen Lehrsatzes für die Facultäten hat man nun offenbar:

$$\overset{m}{A} = (-1)^{m}\,\frac{[n]^{r-m}}{(r-m)'} \cdot \frac{[n-r+m-1]^{m}}{(m)'} = (-1)^{m}\,\frac{[n]^{r+1}}{(r-m)'\,m'} \cdot \frac{1}{n-r+m}.$$

Wird dieser Ausdruck substituirt, so erhält man

$$\overset{r}{\varphi} n = S(-1)^{\lambda}\,\frac{[n]^{r+1}}{\lambda'\,\delta'} \cdot \frac{\overset{0}{a}{}^{n-\delta}}{n-\delta} \cdot \overset{r}{\varphi}\delta \qquad \text{cond. } (\lambda+\delta=r).$$

Wird endlich noch bemerkt, daſs $\frac{r'}{\lambda'\,\delta'} = \frac{[r]^{\lambda}}{\lambda'} = \frac{[r]^{\delta}}{\delta'}$ ist, so hat man auch:

3. $$\overset{r}{\varphi} n = \frac{1}{r'}\quad (-1)^{\lambda}\,\frac{[r]^{\lambda}}{\lambda'} \cdot \frac{[n]^{r+1}}{n-\delta} \cdot \overset{0}{a}{}^{n-\delta} \cdot \overset{r}{\varphi}\delta \qquad \text{cond. } (\lambda+\delta=r).$$

Die im Ausdrucke vorkommende Facultät $[n]^{r+1}$ ist immer durch $n-\delta$ theilbar und ist darum nicht abgesondert worden, obgleich sie ein für alle Glieder gleicher Factor ist.

Die Berechnung der Coëfficienten $\overset{r}{\varphi} n$ ist durch diese Formel auf die Berechnung eben solcher Coëfficienten, aber mit Potenzen-Exponenten δ, welche positive ganze Zahlen sind, zurückgeführt.

Weiter unten wird eine ähnliche Formel in ungleich gröſserer Allgemeinheit hergeleitet werden.

Dritter Abschnitt.

Potenzen einiger Reihen.

§. 109.

Für die Beziehungen unter den Potenzial-Functionen und ihren Arcus sind einige Reihen angegeben worden, welche mit noch anderen Reihen unter folgender allgemeiner Form enthalten sind:

$$P = S\,\frac{[a,\,d]^{a}}{[e,\,h]^{a}}\,x^{a},$$

deren Potenzen sich im Allgemeinen leichter berechnen lassen, als die Potenzen aller anderen Reihen, welche nicht unter diese Form fallen.

Setzen wir nun $\overset{n}{P} = S\overset{\alpha}{\varphi} n \,.\, x^\alpha$, und also $P = S\overset{\alpha}{\varphi} 1 \,.\, x^\alpha$, so ist allgemein

$$\overset{r}{\varphi} 1 = [a, d]^{r} : [c, h]^{r},$$

und nach §. 107. ist weiter

$$\left(v + \frac{rw}{n+1}\right) \overset{r}{\varphi}(n+1) = S(v + \alpha w)\overset{\alpha}{\varphi} 1 \,.\, \overset{\beta}{\varphi} n \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = r),$$

oder auch

$$= v \,.\, \overset{r}{\varphi} n + S(v + w + \alpha w)\overset{\alpha+1}{\varphi} 1 \,.\, \overset{\beta}{\varphi} n \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = r - 1).$$

Wird nun $v + w = c$ und $w = -h$, also $v = c + h$ gesetzt, so hat man offenbar:

$$\left(c + h - \frac{rh}{n+1}\right) . \overset{r}{\varphi}(n+1) = (c+h) . \overset{r}{\varphi} n + S\frac{[a, d]^{\alpha+1}}{[c, d]^{\alpha}} . \overset{\beta}{\varphi} n \quad \text{cond. } (\alpha + \beta = r - 1).$$

Da aber auch nach §. 107.:

$$v + \frac{(r-1)w}{n+1} . \overset{r-1}{\varphi}(n+1) = S(v + \alpha w) . \overset{\alpha}{\varphi} . \overset{\beta}{\varphi} n \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = r - 1)$$

ist, so setze man $v = a$ und $w = -d$, wodurch man die folgende zweite Gleichung erhält:

$$a - \frac{(r-1)d}{n+1} . \overset{r-1}{\varphi}(n+1) = S\frac{[a, d]^{\alpha+1}}{[c, d]^{\alpha}} . \overset{\beta}{\varphi} n \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = r - 1).$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man also die folgende einfachere:

$$\left(c + h - \frac{rh}{n+1}\right) . \overset{r}{\varphi}(n+1) = \left(a - \frac{(r-1)d}{n+1}\right) \overset{r-1}{\varphi}(n+1) + (c+h) . \overset{r}{\varphi} n,$$

oder auch

$$\overset{r}{\varphi}(n+1) = \frac{(n+1)(c+h)}{(n+1)(c+h) - rh} . \overset{r}{\varphi} n + \frac{(n+1)a - (r-1)d}{(n+1)(c+h) - rh} \overset{r-1}{\varphi}(n+1),$$

auf welche eine recurrirende Berechnung der Polynomialcoëfficienten in den Reihen für die Potenzen von P gegründet werden kann.

§. 110.

Um den Gebrauch dieser Formel an einem nicht unwichtigen Beispiele zu zeigen, legen wir uns die Aufgabe der Umkehrung der Reihe $e^x = S\frac{x^\alpha}{\alpha'}$, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet, vor. Da das Anfangsglied der Reihe $= 1$ ist und kein x enthält, so muſs es auf die andere Seite des $=$ gebracht werden, und man hat also die Potenzen der Reihe $P = e^x - 1 = S\frac{x^{1+\alpha}}{(\alpha+1)'}$ zu dem Ende zu entwickeln.

Diese Reihe fällt wirklich unter die Form der Reihe P im §. 109., für $d=0$, $a=1$, $h=-1$ und $c=2$; denn es ist $[2,-1]^{r}=[1,-1]^{r+1}=(r+1)'$. Man hat also:

$$\overset{r}{\varphi}(n+1)=\{\overset{r}{\varphi}n+\overset{r-1}{\varphi}(n+1)\}.\frac{n+1}{n+r+1} \quad \text{oder} \quad \overset{r}{\varphi}n=\frac{n}{n+r}\{\overset{r}{\varphi}(n-1)+\overset{r-1}{\varphi}n\}.$$

Man schliefst aus dieser Formel, dafs allgemein $\overset{r}{\varphi}n$ den Factor $\frac{n'}{(n+r)'}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}=[n]^{-r}$ enthalten werde. Setzt man daher sogleich: $[n]^{-r}.\overset{r}{\varphi}n$ für $\overset{r}{\varphi}n$, so hat man:

$$(e^x-1)^n = S[n]^{-\alpha}.\overset{\alpha}{\varphi}n.x^{n+\alpha},$$

und die gefundene Recursionsformel geht, wenn jene Substitution gleichmäfsig durchgeführt wird, über in:

$$\overset{r}{\varphi}n=\overset{r}{\varphi}(n-1)+n.\overset{r-1}{\varphi}n.$$

Nun ist aber, wie schon im §. 85. angegeben ist, ${}^{n+1}\overset{r}{f}={}^{n}\overset{r}{f}+n.{}^{n}\overset{r-1}{f}$, und wenn $-n$ für n gesetzt wird: ${}^{-n+1}\overset{r}{f}={}^{-n}\overset{r}{f}+(-n).{}^{-n}\overset{r-1}{f}$, oder auch

$${}^{-n}\overset{r}{f}={}^{-(n-1)}\overset{r}{f}+n.{}^{-n}\overset{r-1}{f},$$

und da diese Recursionsformel mit der für $\overset{r}{\varphi}n$ ganz zusammenfällt, auch die Gleichheit der ersten nach diesen Formeln zu berechnenden Gröfsen nachgewiesen werden kann, so hat man allgemein: $\overset{r}{\varphi}n={}^{-n}\overset{r}{f}$, und es ist demnach:

$$1.\quad (e^x-1)^n = S[n]^{-\alpha}.{}^{-n}\overset{\alpha}{f}.x^{n+\alpha},$$

wie in §. 85. ebenfalls behauptet wurde. Da $e^x-1=\mathfrak{Cos}\,x-1+\mathfrak{Sin}\,x$ $=2\,\mathfrak{Sin}\frac{x^2}{2}+2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\mathfrak{Cos}\frac{x}{2}=2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\left(\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}+\mathfrak{Cos}\frac{x}{2}\right)=2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}.e^{\frac{x}{2}}$ ist, so hat man also auch:

$$2.\quad \left(2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\right)^n=e^{-\frac{nx}{2}}.S[n]^{-\alpha}.{}^{-n}\overset{\alpha}{f}.x^{n+\alpha}.$$

In Anwendung der im §. 107. zur Umkehrung dienenden allgemeinen Formel hat man also: $x^m=S\frac{m}{m+\alpha}\overset{\alpha}{\varphi}(-m-\alpha).(e^x-1)^{m+\alpha}$, und da $\overset{r}{\varphi}n=[n]^{-r}.{}^{-n}\overset{r}{f}$, also $\overset{r}{\varphi}(-m-r)=[-m-r]^{-r}.{}^{m+r}\overset{r}{f}$, und daher $\frac{m}{m+r}.\overset{r}{\varphi}(-m-r)$ $=(-1)^r.[m]^{-r}.{}^{m+r}\overset{r}{f}$ ist, so hat man:

$$3.\quad x^m=S(-1)^{\alpha}[m]^{-\alpha}\,{}^{m+\alpha}\overset{\alpha}{f}.(e^x-1)^{m+\alpha}.$$

Setzt man $e^x - 1 = z$, so ist $e^x = 1 + z$ und $x = \log(1+z)$, also hat man $\{\log(1+z)\}^m = S(-1)^\alpha [m]^{-\alpha} . {}^{m+\alpha}\!\overset{\alpha}{f} . z^{m+\alpha}$, und für $m = 1$ hat man $\log(1+z) = S(-1)^\alpha . \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, wie allgemein bekannt ist. Es fällt die Reihe für $\log(1+z)$ ebenfalls unter die Form der Reihe für P im §. 109., und man hätte also die Potenzen dieser Reihe in ähnlicher Art entwickeln können, wie die Potenzen der Reihe für $e^x - 1$.

§. 111.

Eine andere Folgerung ist die Entwickelung von e^{e^x} in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe. Es ist nemlich:

$$e^{e^x} = e\left(e^{e^x} - 1\right) = e S \frac{(e^x - 1)^\alpha}{\alpha'} = e . S\, [\alpha]^{-\beta}_{\alpha'}\, {}^{-\alpha}\!\overset{\beta}{f}\, x^{\alpha+\beta}.$$

Wird daher $\alpha + \beta = \gamma$ gesetzt, und bemerkt, daſs der Coëfficient $[\alpha]^{-\beta}_{\alpha'} = \frac{1}{(\alpha+\beta)'} = \frac{1}{\gamma'}$ ist, so hat man: $e^{e^x} = e . S\, {}^{-\alpha}\!\overset{\beta}{f} . \frac{x^\gamma}{\gamma'} = e\Big\{1 + 1 . \frac{x}{1} + (1 + {}^{-1}\!\overset{1}{f}) . \frac{x^2}{2'} + (1 + {}^{-2}\!\overset{1}{f} + {}^{-1}\!\overset{2}{f}) . \frac{x^3}{3'} + (1 + {}^{-3}\!\overset{1}{f} + {}^{-2}\!\overset{2}{f} + {}^{-1}\!\overset{3}{f}) . \frac{x^4}{4'} + (1 + {}^{-4}\!\overset{1}{f} + {}^{-3}\!\overset{2}{f} + {}^{-2}\!\overset{3}{f} + {}^{-1}\!\overset{4}{f}) . \frac{x^5}{5'} + \text{etc.}\Big\}$, eine Reihe, deren Fortgang also einem ziemlich einfachen Gesetze unterworfen ist, und deren erste Glieder sind:

$$e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2x^2}{2'} + \frac{5x^3}{3'} + \frac{15x^4}{4'} + \frac{52x^5}{5'} + \frac{203x^6}{6'} + \frac{877x^7}{7'} + \frac{4140x^8}{8'} + \text{etc.}\right).$$

Wenn im Ausdrucke für $\left(2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\right)^n$ der Formel (2.) für die Exponentialgröſse $e^{-\frac{nx}{2}}$ substituirt wird eine Reihe, so giebt die wirkliche Multiplication eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe für $\left(2\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{2}\right)^n$. Setzt man zuvor $2x$ für x, so hat man offenbar auch:

$$(\mathfrak{Sin}\, x)^n = e^{-nx} . S\, [n]^{-\alpha} . 2^\alpha . {}^{-n}\!\overset{\alpha}{f} . x^{n+\alpha}.$$

Man kann diese Reihe unter $(\mathfrak{Sin}\, x)^n = S\, \overset{\alpha}{a} . x^{n+\alpha}$ vorstellen, und hat dann allgemein:

$$\overset{r}{a} = S(-1)^\beta\, [n]^{-\alpha} . 2^\alpha . {}^{-n}\!\overset{\alpha}{f} . \frac{n^\beta}{\beta'} \qquad \text{cond. } (\alpha + \beta = r).$$

Dieser Ausdruck zernichtet sich jedesmal, wenn r eine ungerade Zahl bezeichnet, und hat auch noch andere, zum Theil lästige Eigenschaften, welche darin bestehen, daſs man die Werthe von $[n]^{-\alpha} . {}^{-n}\!\overset{\alpha}{f}$ für solche Werthe von n, welche negative oder auch gebrochene Zahlen sind, nicht eben so

einfach berechnen kann, als wenn n eine positive ganze Zahl ist. Schon für $n = -1$ tritt diese gröfsere Schwierigkeit ein.

§. 112.

Man könnte auf den Gedanken kommen, die höheren Differentialverhältnisse der Potenz $y = (\mathfrak{Sin}\, x)^n$ zu entwickeln, um dann die Taylorsche Reihe anzuwenden. Diese Verhältnisse findet man auch leicht. Es ist nemlich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)\,\mathfrak{Sin}\, x^{n-2} + n^2\,\mathfrak{Sin}\, x^n$, und man findet überhaupt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{2r} y}{\partial x^{2r}} &= S\,[n]^{2\beta} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}} \,.\, \mathfrak{Sin}\, x^{n-2\beta} \\ \frac{\partial^{2r+1} y}{\partial x^{2r+1}} &= S\,[n]^{2\beta+1} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}} \,.\, \mathfrak{Sin}\, x^{n-2\beta-1} \,.\, \mathfrak{Cos}\, k \end{aligned}\right\} \quad \text{cond. } (\alpha + \beta = r).$$

In diesen Ausdrücken, welche offenbar nicht sehr zusammengesetzt sind, bezeichnet allgemein das Zeichen $\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}$ eine aus den Elementen der Scale $(\beta) = [n^2, (n-2)^2, (n-4)^2, \ldots (n-2\beta)^2]$, welche aus $\beta + 1$ Elementen besteht, bei unbedingter Wiederholbarkeit derselben gebildete Combinationsclasse des αten Grades. In Anwendung dieser Ausdrücke hat man sogleich:

$$(\mathfrak{Sin}\,(x + \triangle x))^n = \mathfrak{Sin}\, x^n + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\triangle x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{2'} + \text{etc.}$$

Aber dieser Ausdruck versagt, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Anders verhält es sich mit dem ähnlichen Ausdrucke für $(\mathfrak{Cos}\,(x + \triangle x))^n$; setzt man nemlich $y = (\mathfrak{Cos}\, x)^n$, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{2r} y}{\partial x^{2r}} &= S(-1)^\beta\,[n]^{2\beta} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}} \,.\, \mathfrak{Cos}\, x^{n-2\beta} \\ \frac{\partial^{2r+1} y}{\partial x^{2r+1}} &= S(-1)^\beta\,[n]^{2\beta} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}} \,.\, \mathfrak{Cos}\, x^{n-2\beta-1} \,.\, \mathfrak{Sin}\, x \end{aligned}\right\} \quad \text{cond. } (\alpha + \beta = r).$$

Man erhält diese beiden letzten Ausdrücke aus den beiden vorigen, indem man nur $x + \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ für x setzt, und die Unmöglichkeit wieder fallen läfst. Wenn man weiter in den beiden letzten Formeln $n = -1$ und $x\sqrt{-1}$ für x setzt, so erhält man die im §. 68. angegebenen Ausdrücke. Wird in den beiden letzten Ausdrücken $x = 0$ gesetzt, so fällt nur der zweite weg, aber der erste bleibt.

Schliefslich mag noch bemerkt werden, dafs, da $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{2x} - 1}$ ist, die Entwickelung von $(e^x - 1)^{-1}$ auf die Entwickelung von $(e^x + 1)^{-1}$ in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe zurückgebracht werden kann. Auf diese Weise hat man zwei Formeln zur independenten Berechnung der unbekannten Coëfficienten gefunden, welche allgemein bekannt sind.

Vierter Abschnitt.

Bemerkenswerther Ausdruck für Combinationsclassen, die bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildet sind.

Eine sehr allgemeine Entwickelungsmethode für $\varphi(x+z)$.

§. 113.

Wählt man in einer Scale $(n)=(a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \dots \overset{n}{a})$, welche offenbar $(n+1)$ Elemente von willkürlicher Gröfse begreift, willkürlich eines, um die übrigen Elemente einzeln von ihm zu subtrahiren und eine Potenz mit unveränderlichem Exponenten, die aus jenem einen Elemente gebildet ist, durch das Product der erhaltenen Differenzen zu dividiren, so können solcher Quotienten so viele gebildet werden, als Elemente vorhanden sind, und die Summe dieser Quotienten ist dann ein Ausdruck, welcher mit einer aus den Elementen der Scale (n) bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildeten Combinationsclasse gleichgeltend ist, aber unter gewissen Umständen auch $=1$ und auch $=0$ sein kann.

Unter $\overset{\alpha}{\psi} n$ verstehe man allgemein das Product $(\overset{\alpha}{a}-a)(\overset{\alpha}{a}-\overset{1}{a})\dots$ $\dots(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha-1}{a})(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha+1}{a})\dots(\overset{\alpha}{a}-\overset{n}{a})$, so ist der eben beschriebene Ausdruck:

$$\frac{a^m}{\overset{0}{\psi} n}+\frac{\overset{1}{a}{}^m}{\overset{1}{\psi} n}+\frac{\overset{2}{a}{}^m}{\overset{2}{\psi} n}\dots+\frac{\overset{\alpha}{a}{}^m}{\overset{\alpha}{\psi} n}\dots+\frac{\overset{n}{a}{}^m}{\overset{n}{\psi} n}=\varphi(m,n),$$

und es versteht sich von selbst, dafs unter den Elementen $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots \overset{n}{a}$ keine zwei gleiche vorkommen dürfen, weil sonst wenigstens zwei von den Nennern ψ Null sein würden.

Käme noch ein Element $\overset{n+1}{a}$ zu den Elementen der Scale (n), so hätte man den ähnlichen Ausdruck:

$$\frac{a^m}{\overset{0}{\psi}(n+1)}+\frac{\overset{1}{a}{}^m}{\overset{1}{\psi}(n+1)}\dots+\frac{\overset{\alpha}{a}{}^m}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)}\dots+\frac{\overset{n}{a}{}^m}{\overset{n}{\psi}(n+1)}+\frac{\overset{n+1}{a}{}^m}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)}=\varphi(m,n+1).$$

Da aber $\overset{\alpha}{\psi}(n+1)=(\overset{\alpha}{a}-\overset{n+1}{a}).\overset{\alpha}{\psi} n$ ist, wenn $\alpha<n+1$ ist, so hat man

$$\frac{1}{\overset{\alpha}{\psi} n}=\frac{\overset{\alpha}{a}-\overset{n+1}{a}}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)},$$

und wenn dieser Werth im ersten Ausdrucke gleichmäfsig substituirt wird, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^{m+1}}{\overset{0}{\psi}(n+1)} + \dfrac{\overset{1}{a}{}^{m+1}}{\overset{1}{\psi}(n+1)} \dots + \dfrac{\overset{\alpha}{a}{}^{m+1}}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)} \dots + \dfrac{\overset{n}{a}{}^{m+1}}{\overset{n}{\psi}(n+1)} \\ -\overset{n+1}{a}\,.\left(\dfrac{a^{m}}{\overset{0}{\psi}(n+1)} + \dfrac{\overset{1}{a}{}^{m}}{\overset{1}{\psi}(n+1)} \dots + \dfrac{\overset{\alpha}{a}{}^{m}}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)} \dots + \dfrac{\overset{n}{a}{}^{m}}{\overset{n}{\psi}(n+1)}\right) \end{array}\right\} = \varphi(m,n).$$

Der obere Theil des Ausdruckes von $\varphi(m,n)$ ist offenbar

$$= \varphi(m+1, n+1) - \frac{\overset{n+1}{a}{}^{m+1}}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)},$$

und der untere mit $-\overset{n+1}{a}$ multiplicirte Theil ist

$$= -\overset{n+1}{a}\,.\,\varphi(m, n+1) + \frac{\overset{n+1}{a}{}^{m+1}}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)},$$

also hat man:

$$\varphi(m+1, n+1) = \varphi(m,n) + \overset{n+1}{a}\,.\,\varphi(m, n+1),$$

und schon aus dieser Formel würde man schliefsen können, dafs allgemein $\varphi(m,n) = \overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}$ sei, wenn unter $\overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}$ eine aus den $(n+1)$ Elementen der Scale (n) bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildete Combinationsclasse des $(m-n)$ten Grades verstanden wird.

§. 114.

Um aber den Schlufs hier evidenter zu machen, leiten wir aus der gefundenen Formel eine andere her. Es bezeichne $\varphi_\alpha(m,n)$ dasselbe, wie $\varphi(m,n)$, nur mit dem Unterschiede, dafs $\varphi_\alpha(m,n)$ aus den übrigen Elementen der Scale (n) gebildet sei, welche bleiben, wenn das Element $\overset{\alpha}{a}$ zuvor aus ihr weggelassen ist, und eben so bezeichne $\varphi_\varepsilon(m,n)$ einen Ausdruck, welcher aus den Elementen der Scale (n) gebildet ist, wenn das Element $\overset{\varepsilon}{a}$ zuvor aus ihr weggelassen ist. In Anwendung dieser Bezeichnung hat man nach §. 113.:

$$\varphi(m,n) = \varphi_\alpha(m-1,n) + \overset{\alpha}{a}\,.\,\varphi(m-1,n) \quad \text{und}$$

$$\varphi(m,n) - \varphi_\varepsilon(m-1,n) + \overset{\varepsilon}{a}\,.\,\varphi(m-1,n).$$

Sind nun α und ε verschieden von einander (jede ist nicht $> n$), so findet man durch Subtraction:

$$0 = \varphi_\alpha(m-1,n) - \varphi_\varepsilon(m-1,n) + (\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a})\,\varphi(m-1,n),$$

und wenn $m+1$ für m gesetzt wird, so hat man:

$$1. \quad \varphi(m,n) = \frac{\varphi_\varepsilon(m,n) - \varphi_\alpha(m,n)}{\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}}.$$

Eine ähnliche Formel betrifft Combinationsclassen, welche bei unbedingter Wiederholbarkeit aus deu Elementen gewisser Scalen gebildet sind. Wird nemlich unter (n, α) die Scale n, wenn das Element $\overset{\alpha}{a}$ aus ihr gestofsen ist, verstanden und unter (n, ε) die Scale n nach Wegwerfung des Elementes $\overset{\varepsilon}{a}$ aus ihr, so hat man bekanntlich:

$$\overset{r+1}{\underset{(n)}{C}} = \overset{r+1}{\underset{(n,\,\alpha)}{C}} + \overset{r}{\underset{(n)}{C}}.\overset{\alpha}{a} \quad \text{und} \quad \overset{r+1}{\underset{(n)}{C}} = \overset{r+1}{\underset{(n,\,\varepsilon)}{C}} + \overset{r}{\underset{(n)}{C}}.\overset{\varepsilon}{a},$$

und also auch:

$$2. \qquad \overset{r}{\underset{(n)}{C}} = \frac{\overset{r+1}{\underset{(n,\,\varepsilon)}{C}} - \overset{r+1}{\underset{(n,\,\alpha)}{C}}}{\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}}.$$

Nun ist aber nach §. 113. offenbar $\varphi(m, 1) = \frac{\overset{0}{a}{}^m}{\overset{0}{a} - \overset{1}{a}} + \frac{\overset{1}{a}{}^m}{\overset{1}{a} - \overset{0}{a}} = \frac{\overset{0}{a}{}^m - \overset{1}{a}{}^m}{\overset{0}{a} - \overset{1}{a}}$, und $\overset{m-1}{\underset{(1)}{C}} = \overset{0}{a}{}^{m-1} + \overset{0}{a}{}^{m-2}.\overset{1}{a}{}^1 + \overset{0}{a}{}^{m-3}.\overset{1}{a}{}^2 + \overset{0}{a}{}^{m-4}.\overset{1}{a}{}^3 \ldots\ldots + \overset{0}{a}{}^1.\overset{1}{a}{}^{m-2} + \overset{1}{a}{}^{m-1}$, und wird diese aus m Gliedern bestehende Reihe summirt, so hat man ebenfalls $\frac{\overset{0}{a}{}^m - \overset{1}{a}{}^m}{\overset{0}{a} - \overset{1}{a}}$ zur Summe, und es ist also zunächst: $\varphi(m, 1) = \overset{m-1}{\underset{(1)}{C}}$, welches der obigen Behauptung im §. 113. gemäfs ist. Und nun dienen die Formeln (1. und 2.) zur Fortsetzung des Beweises. Da nemlich die Scalen $(2, 2)$ und $(2, 1)$ ebenfalls nur zwei Elemente und also nicht mehr als die Scale $(1) = \overset{0}{a}, \overset{1}{a}$ enthalten, so hat man, weil $\varphi(m, 1) = \overset{m-1}{\underset{(1)}{C}}$ ist,

$$\text{auch } \varphi_2(m, 2) = \overset{m-1}{\underset{(2,\,2)}{C}} \text{ und } \varphi_1(m, 2) = \overset{m-1}{\underset{(2,\,1)}{C}}.$$

Daher ist nach der Formel (1.): $\varphi(m, 2) = \frac{\varphi_2(m, 2) - \varphi_1(m, 2)}{\overset{1}{a} - \overset{2}{a}} = \frac{\overset{m-1}{\underset{(2\,2)}{C}} - \overset{m-1}{\underset{(2,\,1)}{C}}}{\overset{1}{a} - \overset{2}{a}}$, welcher Ausdruck nach Formel (2.) $= \overset{m-2}{\underset{(2)}{C}}$ ist; man hat also auch

$$\varphi(m, 2) = \overset{m-2}{\underset{(2)}{C}}.$$

Der Fortgang ist so einfach, dafs man die Richtigkeit der Behauptung: $\varphi(m, n) = \overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}$ schon ganz übersieht. Aus dieser Gleichung könnte man auch schon schliefsen, dafs $\varphi(n, n) = 1$ sein werde, weil $\overset{0}{\underset{(n)}{C}} = 1$ ist, und und dafs $\varphi(m, n) = 0$ sein werde, wenn $m < n$ angenommen wird.

§. 115.

Um nun die Richtigkeit dieser letzten Behauptungen ganz ins Klare zu setzen, bemerken wir, dafs für den Fall $n < m$ das vorhin gefundene Resultat benutzt werden darf, und dafs also namentlich

$$\Phi(n, n-1) = \underset{(n-1)}{\overset{1}{C}} = a + \overset{1}{a} + \overset{2}{a} \ldots + \overset{n-1}{a} \text{ sei,}$$

oder einfacher $\Phi(n, n-1) = (n-1)$. Wird nun unter (n, α) wieder die Scale $(a + \overset{1}{a} \ldots + \overset{\alpha}{a} \ldots + \overset{n}{a})$ nach Auslöschung des Elementes $\overset{\alpha}{a}$ in ihr verstanden, so haben wir also auch, weil die Scale (n, α) nicht mehr Elemente enthält, als die Scale $(n-1)$:

$$\Phi_\alpha(n, n) = (n, \alpha) \quad \text{und} \quad \Phi_\varepsilon(n, n) = (n, \varepsilon).$$

Da nun aber $(n, \alpha) = (n) - \overset{\alpha}{a}$ und $(n, \varepsilon) = (n) - \overset{\varepsilon}{a}$ ist, so haben wir $\Phi_\varepsilon(n, n) - \Phi_\alpha(n, n) = \overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}$, und da nach §. 114. Formel (1.)

$$\Phi(n, n) = \frac{\varphi_\varepsilon(n, n) - \varphi_\alpha(n, n)}{\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}}$$

ist, so ist also auch offenbar

$$\Phi(n, n) = \frac{\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}}{\overset{\alpha}{a} - \overset{\varepsilon}{a}} = +1.$$

Um nun noch schliefslich zu beweisen, dafs $\Phi(m, n) = 0$ sei, wenn $m < n$ genommen wird, dient die Formel:

$$\Phi(m+1, n+1) = \Phi(m, n) + \overset{n+1}{a} \,.\, \Phi(m, n+1).$$

Setzen wir in derselben $m = n$, so haben wir

$$\Phi(n+1, n+1) = \Phi(n, n) + \overset{n+1}{a} \,.\, \Phi(n, n+1),$$

und da $\Phi(n, n) = \Phi(n+1, n+1) = 1$ ist, so hat man $\overset{n+1}{a} \,.\, \Phi(n, n+1) = 0$, und also $\Phi(n, n+1) = 0$. Setzen wir nun aber in der Formel

$$\Phi(m+1, n) = \Phi(m, n-1) + \overset{n}{a} \,.\, \Phi(m, n) \quad \text{die Zahl} \quad n = m+2,$$

so haben wir $\Phi(m+1, m+2) = \Phi(m, m+1) + \overset{m+2}{a}\, \Phi(m, m+2)$, so ist nach dem so eben Gefundenen $\Phi(m+1, m+2) = \Phi(m, m+1) = 0$, und also $\Phi(m, m+2) = 0$. Wird weiter $n = (m+3, m+4$, etc.) gesetzt, so findet man $\Phi(m, m+3) = 0$, $\Phi(m, m+4) = 0$ etc., und es ist also allgemein $\Phi(m, m+k) = 0$, wenn k eine positive ganze Zahl bedeutet, welche > 0 ist.

In Anwendung dieses nun vollständig bewiesenen sehr fruchtbaren combinatorischen Theorems können die mehreren im Werke vorkommenden Com-

binationsclassen augenblicklich in analytische Ausdrücke umgesetzt werden. Wer also, aus was immer für Gründen, die Einmischung combinatorischer Begriffe meidet, kann davon Gebrauch machen für den genannten Zweck; er wird sich aber bald überzeugen, daſs die geforderte Rechnung mit bestimmten Zahlen dadurch nicht erleichtert, sondern umgekehrt erschwert wird. Wir machen aber von dem Theoreme einen andern Gebrauch.

§. 116.

Wenn man die Scale $(n) = (a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots . \overset{n}{a})$ um ein Element $\overset{n+1}{a} = x$ vermehrt, so ist also, nach dem so eben Bewiesenen:

$$\varphi(m, n+1) = 0,$$

wenn m nur nicht gröſser als n ist, und man hat also:

$$\frac{a^m}{\overset{0}{\psi}(n+1)} + \frac{\overset{1}{a}{}^m}{\overset{1}{\psi}(n+1)} \ldots . + \frac{\overset{\alpha}{a}{}^m}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)} \ldots . + \frac{\overset{n}{a}{}^m}{\overset{n}{\psi}(n+1)} = -\frac{x^m}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)}.$$

Wird das letzte Glied von seinem Nenner befreit, und bemerkt, daſs

$$\frac{\overset{n+1}{\psi}(n+1)}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)} = \frac{(x-a)(x-\overset{1}{a})\ldots .(x-\overset{\alpha-1}{a})(x-\overset{\alpha}{a})(x-\overset{\alpha+1}{a})\ldots .(x-\overset{n}{a})}{(\overset{\alpha}{a}-a)(\overset{\alpha}{a}-\overset{1}{a})\ldots .(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha-1}{a})(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha+1}{a})\ldots .(\overset{\alpha}{a}-\overset{n}{a})(\overset{\alpha}{a}-x)},$$

und also nach Aufhebung des gemeinschaftlichen Factors $x-\overset{\alpha}{a}$ im Zähler und Nenner $= -\dfrac{(x-a)(x-\overset{1}{a})\ldots .(x-\overset{\alpha-1}{a})(x-\overset{\alpha+1}{a})\ldots .(x-\overset{n}{a})}{(\overset{\alpha}{a}-a)(\overset{\alpha}{a}-\overset{1}{a})\ldots .(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha-1}{a})(\overset{\alpha}{a}-\overset{\alpha+1}{a})\ldots .(\overset{\alpha}{a}-\overset{n}{a})}$ ist, welcher Ausdruck mit $-\overset{\alpha}{X}$ bezeichnet werden mag, so hat man die folgende ziemlich einfache Gleichung:

$$\overset{0}{X}.a^m + \overset{1}{X}.\overset{1}{a}{}^m + \overset{2}{X}.\overset{2}{a}{}^m \ldots . + \overset{\alpha}{X}.\overset{\alpha}{a}{}^m \ldots . + \overset{n}{X}.\overset{n}{a}{}^m = x^m.$$

Die Gröſsen $\overset{0}{X}$, $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$ etc. sind in ähnlicher Art gebildet, wie die Gröſse $\overset{\alpha}{X}$ und es ist z. B.

$$\overset{0}{X} = \frac{(x-\overset{1}{a})(x-\overset{2}{a})\ldots .(x-\overset{n}{a})}{(a-\overset{1}{a})(a-\overset{2}{a})\ldots .(a-\overset{n}{a})}.$$

Man muſs aber nicht vergessen, daſs die gefundene Gleichung nur dann ihre Richtigkeit hat, wenn m nicht $> n$ ist.

Die Gröſse $\overset{\alpha}{X}$ ist $=1$ für $x = \overset{\alpha}{a}$ und ist $=0$, wenn x gleich einem von a verschiedenen Elemente der Scale $(n) = a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots . \overset{n}{a}$ ist.

§. 117.

Wenn eine Function von x eine rationale ganze von geschlossener Form ist, und dieselbe unter der Form:

$$fx = A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \ldots + \overset{\alpha}{A}x^\alpha \ldots + \overset{n}{A}x^n,$$

welche vom $n$ten Grade ist, dargestellt werden kann, so kann man den arithmetischen Ausdruck dieser Function finden, wenn man zu $n+1$ verschiedenen Werthen von x, welche in der Scale $(n) = a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n}{a}$ enthalten sind, die zugehörigen Werthe der Function fx kennt.

Man könnte ja auch für x in dem für fx aufgestellten Ausdrucke nach einander die in der Scale (n) enthaltenen Elemente als Werthe substituiren, und fände dann $(n+1)$ Gleichungen des ersten Grades, woraus die eben so vielen unbekannten Coëfficienten $A, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots \overset{n}{A}$ sicher berechnet werden könnten, da die für x substituirten Werthe der Annahme gemäfs sämmtlich verschieden von einander sind und also keine identische Gleichungen vorkommen. Ein solche Gleichung wäre z. B.

$$f\overset{\alpha}{a} = A + \overset{1}{A}\overset{\alpha}{a}^1 + \overset{2}{A}\overset{\alpha}{a}^2 \ldots + \overset{\beta}{A}\overset{\alpha}{a}^\beta \ldots + \overset{n}{A}.\overset{\alpha}{a}^n.$$

Man gelangt aber ungleich rascher zum gesuchten Ausdrucke für fx, wenn man die vorstehende Gleichung mit $\overset{\alpha}{X}$ multiplicirt, dann für α die aufeinander folgenden Werthe $\alpha = 0, 1, 2, \ldots n$ setzt und die entstehenden einzelnen Gleichungen addirt. Dadurch erhält man:

$$S\overset{\alpha}{X}f\overset{\alpha}{a} = A.S\overset{\alpha}{X} + \overset{1}{A}.S\overset{\alpha}{X}\overset{\alpha}{a}^1 \ldots + \overset{\beta}{A}.S\overset{\alpha}{X}\overset{\alpha}{a}^\beta \ldots + \overset{n}{A}.S\overset{\alpha}{X}\overset{\alpha}{a}^n,$$

wenn sich das Summezeichen S auf die Veränderlichkeit von α, nach der Bedingung α nicht $> n$, bezieht. In Anwendung des im §. 116. bewiesenen Satzes hat man also:

$$S\overset{\alpha}{X}.f\overset{\alpha}{a} = A + \overset{1}{A}x^1 \ldots + \overset{\beta}{A}.x^\beta \ldots + \overset{n}{A}.x^n,$$

oder einfacher:

$$fx = \overset{0}{X}.f\overset{0}{a} + \overset{1}{X}.f\overset{1}{a} + \overset{2}{X}.f\overset{2}{a} \ldots + \overset{\alpha}{X}.f\overset{\alpha}{a} \ldots + \overset{n}{X}.f\overset{n}{a}.$$

Wollte man diesen Ausdruck nach Potenzen von x entwickeln, welches aber unnöthig ist, so würde er unter die im Anfange für fx gewählte Form fallen und eine Form des $n$ten Grades sein.

Wenn die Function fx nicht in einer Form des $n$ten Grades dargestellt werden kann, sondern eine Form eines noch höheren Grades ist, oder gar ins Unendliche fortgeht, oder endlich gar nicht einmal den gewählten einfachen Fortschritt nach Potenzen von x haben kann und gleichwohl nur $(n+1)$ Werthe der Function bekannt sind, so ist der auf die vorige Weise gefundene Ausdruck für fx unrichtig oder nur näherungs-

weise richtig. In diesem Falle sinkt die Formel zu einer Interpolationsformel herab und Lagrange hat dieselbe auch als solche zuerst gefunden, aber auf ganz andere Weise, wie hier gelehrt worden ist.

Zusatz. Die im §. 108. gefundene Formel (3.) könnte man aus der so eben gefundenen allgemeineren ohne Mühe herleiten.

§. 118.

Der im §. 117. für fx gefundene Ausdruck ist für den Gebrauch sehr bequem, wenn die Zahl n, welche den Grad der Form für fx bestimmt, keine sehr grofse ganze Zahl ist; ist diese Zahl aber grofs, oder ist sie vollends unendlich, so ist die Form des Ausdrucks unbequem, denn er hat nicht nur $(n+1)$ Glieder, sondern jedes Glied besteht auch aus $(n+1)$ Factoren, und wenn also n ins Unendliche fortgeht, so ist auch jedes Glied ein Product von unendlich vielen Factoren, und der Ausdruck für diesen Fall völlig unbrauchbar. Es kann aber aus dem Theoreme des §. 113. eine Folgerung gezogen werden, die uns in den Stand setzt, einen neuen Ausdruck für eine Function zu finden, welcher den genannten Übelstand nicht hat.

Es bezeichne Φx eine Form des $n$ten Grades (rationale ganze Function) und es sei etwa:

$$\Phi x = A + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 \dots + \overset{n}{A}.x^n,$$

so kann der Ausdruck $\frac{\varphi a}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\varphi \overset{1}{a}}{\overset{1}{\psi} n} + \frac{\varphi \overset{2}{a}}{\overset{2}{\psi} n} \dots + \frac{\varphi \overset{\alpha}{a}}{\overset{\alpha}{\psi} n} \dots + \frac{\varphi \overset{n}{a}}{\overset{n}{\psi} n}$ leicht auf einen einfachen Ausdruck seines Werthes zurückgebracht werden. Substituirt man nemlich im Ausdrucke für Φx statt x der Reihe nach a, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, etc. bis $\overset{n}{a}$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& A.\left(\frac{1}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{1}{\overset{1}{\psi} n} \dots + \frac{1}{\overset{n}{\psi} n}\right) \\
+ & \overset{1}{A}.\left(\frac{a}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{a}}{\overset{1}{\psi} n} \dots + \frac{\overset{n}{a}}{\overset{n}{\psi} n}\right) \\
+ & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
+ & \overset{n-1}{A}.\left(\frac{a^{n-1}}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{a}{}^{n-1}}{\overset{1}{\psi} n} \dots + \frac{\overset{n}{a}{}^{n-1}}{\overset{n}{\psi} n}\right) \\
+ & \overset{n}{A}.\left(\frac{a^{n}}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{a}{}^{n}}{\overset{1}{\psi} n} \dots + \frac{\overset{n}{a}{}^{n}}{\overset{n}{\psi} n}\right),
\end{aligned}$$

und da nach §. 115. die eingeklammerten Ausdrücke einzeln $=0$ sind, und nur der letzte eingeklammerte Ausdruck $=1$ ist, so hat man also:

$$\frac{\varphi a}{\overset{0}{\psi} n}+\frac{\varphi \overset{1}{a}}{\overset{1}{\psi} n}+\frac{\varphi \overset{2}{a}}{\overset{2}{\psi} n}\cdots\cdot+\frac{\varphi \overset{\alpha}{a}}{\overset{\alpha}{\psi} n}\cdots\cdot+\frac{\varphi \overset{n}{a}}{\overset{n}{\psi} n}=\overset{n}{A}.$$

Hingegen ist der Ausdruck auf der linken Seite $=0$, wenn Φx eine rationale ganze Function ist, deren Grad $<n$ ist.

Ist also z. B. $\Phi x = A(x-p)(x-q)(x-r)\ldots.$ und ist die Menge der Factoren $x-p$, $x-q$, $x-r$, etc. $=n$, so ist die gesuchte Summe $=A$, und wenn diese Menge $<n$ ist, so ist die Summe $=0$, obgleich p, q, r etc. beliebige Werthe haben. Ist aber die Menge der Factoren $x-p$, $x-q$, $x-r$, etc. $>n$, dann werden auch die Zahlen p, q, r, etc. auf den Betrag der Summe Einfluſs haben.

§. 119.

Es seien a, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, ... $\overset{\alpha}{a}$, ... mehrere aufeinander folgende und etwa nach ihrer steigenden Gröſse geordnete Werthe einer veränderlichen Gröſse z, und eine Function dieser Gröſse z, welche durch $\Phi(x+z)$ im Allgemeinen bezeichnet sein mag, habe die jenen Werthen von z entsprechenden Werthe u, $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$, ... $\overset{\alpha}{u}$, ..., deren es also eben so viele giebt, so ist $\Phi(x+a)=u$, $\Phi(x+\overset{1}{a})=\overset{1}{u}$, $\Phi(x+\overset{2}{a})=\overset{2}{u}$, $\Phi(x+\overset{3}{a})=\overset{3}{u}$, ... allgemein $\Phi(x+\overset{\alpha}{a})=\overset{\alpha}{u}$. Nehmen wir nun für $\Phi(x+z)$ die folgende Form an:

1. $\Phi(x+z)=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}(z-a)+\overset{2}{A}(z-a)(z-\overset{1}{a})+\overset{3}{A}(z-a)(z-\overset{1}{a})(z-\overset{2}{a})+$ etc.

so sind die Coëfficienten $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ etc. die einzigen noch unbekannten Gröſsen. Bezeichnen wir aber die Producte der Factoren $z-a$, $z-\overset{1}{a}$, $z-\overset{2}{a}$, etc. auf ähnliche Art, wie die Facultäten, mit

$$[z|\overset{r}{a}]=(z-a)(z-\overset{1}{a})(z-\overset{2}{a})\ldots.(z-\overset{r-1}{a}),$$

so nemlich, daſs auch $[z|\overset{0}{a}]=1$ und $[z|\overset{1}{a}]=z-a$ ist, so haben wir:

$$\Phi(x+z)=S\overset{\alpha}{A}.[z|\overset{\alpha}{a}].$$

Unter der Voraussetzung aber, daſs die unbekannten Coëfficienten $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc. von z unabhängig sind, können dieselben gefunden werden. Setzt man nemlich, um allgemein den Coëfficienten $\overset{n}{A}$ zu finden, $\overset{n}{a}$ für z, so fallen in der für $\Phi(x+z)$ angenommenen Reihe alle Glieder weg, welche auf das Glied $\overset{n}{A}.[z|\overset{n}{a}]$ folgen, weil sie den Factor $z-\overset{n}{a}=\overset{n}{a}-\overset{n}{a}=0$ ent-

halten. Man hat also:

$$\varphi(x+z) = S\,A\,.\,[z|a]^{n-\alpha} \text{ für } z = \overset{n}{a}.$$

Dieser Ausdruck ist in Hinsicht auf z offenbar eine rationale ganze Function des $n$ten Grades; auch gilt diese Gleichung für alle dem Werthe $\overset{n}{a}$ vorhergehende Werthe von z, und da der Coëfficient der höchsten oder $n$ten Potenz von z in diesem Ausdrucke $= \overset{n}{A}$ ist, so hat man also in Anwendung des im §. 118. bewiesenen Lehrsatzes:

$$2. \quad \overset{n}{A} = \frac{u}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{u}}{\overset{1}{\psi} n} + \frac{\overset{2}{u}}{\overset{2}{\psi} n} \cdots\cdot + \frac{\overset{\alpha}{u}}{\overset{\alpha}{\psi} n} \cdots\cdot + \frac{\overset{n}{u}}{\overset{n}{\psi} n},$$

wodurch also allgemein der Coëfficient $\overset{n}{A}$ bekannt geworden ist; die als Nenner vorkommenden Gröfsen ψ haben aber denselben Bau und dieselbe Bedeutung wie im §. 113. Der Coëfficient $\overset{0}{A}$ wird aus der Gleichung (1.) gefunden, wenn man $z = a$ setzt, wodurch man erhält:

$$\overset{0}{A} = \varphi(x+a) = u.$$

Der Ausdruck $\overset{n}{A}$ ist eine von der Function $u = \varphi(x+a)$ abgeleitete Function von x, welche daher durch $D^n u$ bezeichnet sein mag, wobei dann aber n die Ordnungszahl ist, und also D^n nicht etwa als eine Potenz, womit u multiplicirt werden solle, zu betrachten ist. In Anwendung dieser Bezeichnung haben wir also

$$3. \quad \varphi(x+z) = u + D^1 u\,.\,[z|a]^1 + D^2 u\,.\,[z|a]^2 + D^3 u\,.\,[z|a]^3 \cdots\cdot \text{ und}$$

$$4. \quad D^n u = \frac{u}{\overset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{u}}{\overset{1}{\psi} n} + \frac{\overset{2}{u}}{\overset{2}{\psi} n} \cdots\cdot + \frac{\overset{\alpha}{u}}{\overset{\alpha}{\psi} n} \cdots\cdot + \frac{\overset{n}{u}}{\overset{n}{\psi} u}.$$

Der Ausdruck (3.) kann nun offenbar, wenn es nöthig ist, selbst ins Unendliche fortgesetzt werden, wenn nur die Reihe der Bedingungen, welche auf die Bestimmung der Function Einflufs haben müssen, ebenfalls ins Unendliche fortgeht. Dieses Entwickelungstheorem ist das allgemeinste, was die Analysis je aufstellte; denn die gewöhnlichen Theoreme, welche für die Entwickelungen der Functionen in Anspruch genommen werden, erscheinen nur als besondere vor dem gegenwärtigen allgemeineren.

§. 120.

Die Ermittelung der Derivirten (derivirten Function) $D^n u$, welche das Deriviren heifsen kann, geschieht nach der im §. 119. aufgestellten Formel (4.), diese Ermittelung ist dann independent; aber das Deriviren kann auch ein recurrirendes sein. Um nun dazu die Regel zu finden,

stellen wir fest, daſs unter $D^n \overset{1}{u}$ immer ein dem Ausdrucke $D^n u$ ähnlich gebildeter sei, den man aus diesem schon dadurch findet, daſs man die im Ausdrucke $D^n u$ vorkommenden Elemente jedes mit dem nächst folgenden vertauscht, und also setzt $\overset{1}{a}$ für a, $\overset{2}{a}$ für $\overset{1}{a}$, $\overset{3}{a}$ für $\overset{2}{a}$, u. s. w.

Die Gröſsen ψ erhalten dadurch ebenfalls eine Abänderung, sie enthalten nemlich nach einer solchen Veränderung das Element a nicht mehr, hingegen tritt das Element $\overset{n+1}{a}$ in sie hinein, ohne daſs es jedoch an die Stelle des hinausgetretenen Elements a käme. Geht etwa $\overset{\alpha}{\psi} n$ dadurch über in $\overset{\alpha}{\psi}_1 n$, so ist offenbar $(\overset{\alpha}{a} - a).\overset{\alpha-1}{\psi}_1 n = \overset{\alpha}{\psi}(n+1)$ für jedes α, welches $< n$; und eben so auch $\overset{\alpha}{\psi} n = (\overset{\alpha}{a} - \overset{n+1}{a}).\overset{\alpha}{\psi}(n+1)$.

Die Ausdrücke für $D^n u$ und $D^n \overset{1}{u}$ gehen aber, wenn nur $\frac{\overset{\alpha}{a} - a}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)}$ für $\frac{1}{\overset{\alpha-1}{\psi}_1 n}$, und $\frac{\overset{\alpha}{a} - \overset{n+1}{a}}{\overset{\alpha}{\psi}(n+1)}$ für $\frac{1}{\overset{\alpha}{\psi} n}$ gesetzt wird, über in die folgenden:

$$D^n \overset{1}{u} = \frac{a u}{\overset{0}{\psi}(n+1)} + \frac{\overset{1}{a}\,\overset{1}{u}}{\overset{1}{\psi}(n+1)} \dots + \frac{\overset{n+1}{a} . \overset{n+1}{u}}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)} - a . D^{n+1} u,$$

$$D^n u = \frac{a u}{\overset{0}{\psi}(n+1)} + \frac{\overset{1}{a}\,\overset{1}{u}}{\overset{1}{\psi}(n+1)} \dots + \frac{\overset{n+1}{a} . \overset{n+1}{u}}{\overset{n+1}{\psi}(n+1)} - \overset{n+1}{a} . D^{n+1} u,$$

Wird also die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, so hat man die folgende einfache Formel:

$$D^{n+1} u = \frac{D^n \overset{1}{u} - D^n u}{\overset{n+1}{a} - a}.$$

Um also von einer Derivirten (Derivate) $D^n u$ zur nächst höheren $D^{n+1} u$ aufzusteigen, *vertausche man jedes in der gegebenen Derivate vorkommende Element mit dem nächst folgenden, vom veränderten Ausdrucke subtrahire man den gegebenen und dividire den Rest durch den Unterschied der beiden äuſsersten Elemente, welche im Reste vorkommen.*

Mit jeder neuen Derivation findet man also in der Reihe

$$\varphi(x+z) = S\, \dot{D}^{\alpha} u . [z|a]^{\alpha}$$

ein neues oder späteres Glied; aber mit jedem solchen Schritte kommt auch ein neues Element in Rechnung und macht sich also auch eine neue Bedingung für die Bestimmung der Function geltend.

§. 121.

Wenn in der Elementenreihe $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots\ldots \overset{k}{a}, \ldots\ldots \overset{n}{a}, \ldots\ldots$ einige erste Elemente unbenutzt bleiben, so hat man nicht nöthig, die Folge der übrigen abzuändern. Soll etwa das Element $\overset{k}{a}$ als das erste betrachtet werden, so tritt es in den vorigen Formeln an die Stelle des Elementes a; überhaupt treten dann die Elemente $\overset{k}{a}, \overset{k+1}{a}, \overset{k+1}{a}$, etc. an die Stelle der Elemente $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}$, etc. Dadurch geht allgemein $D^{\alpha} u$ über in $D^{\alpha} \overset{k}{u}$, und es bezeichnet dann $D^{\alpha} \overset{k}{u}$ einen Ausdruck, welchen man erhält, wenn man jede Zeigezahl der im Ausdrucke $D^{\alpha} u$ vorkommenden Elemente um k erhöhet. Eben so bedeutet dann $[z|\overset{k\,\alpha}{a}]$, daſs man die Zeigezahl eines jeden in $[z|\overset{\alpha}{a}]$ vorkommenden Elementes um k erhöhen soll. Man hat also noch allgemeiner:

$$\varPhi(x+z) = u + D^1 \overset{k}{u}.[z|\overset{k\,1}{a}] + D^2 u.[z|\overset{k\,2}{a}] + D^3 u.[z|\overset{k\,3}{a}] + \text{etc.} = S\, D^{\alpha} u.[z|\overset{k\,\alpha}{a}].$$

Da nun k eine beliebige ganze Zahl ist, so kann man also $\varPhi(x+z)$ auf beliebig viele sich ähnliche Arten entwickeln. Diese allgemeinere Darstellung ist oft nothwendig.

Ist nun $\varPhi'(x+z)$ eine zweite Function und wird $\varPhi'(x+a) = v$, $\varPhi'(x+\overset{1}{a}) = \overset{1}{v}$, $\varPhi'(x+\overset{2}{a}) = \overset{2}{v}$, etc. und allgemein $\varPhi'(x+\overset{\alpha}{a}) = \overset{\alpha}{v}$ gesetzt, so hat man also auch:

$$\varPhi'(x+z) = v + D^1 v.[z|\overset{1}{a}] + D^2 v.[z|\overset{2}{a}] + D^3 v.[z|\overset{3}{a}] + \text{etc.} = S\, D^{\alpha} v.[z|\overset{\alpha}{a}],$$

und das Product der beiden Functionen $\varPhi(x+z)$ und $\varPhi'(x+z)$ ist nun offenbar:

$$\varPhi(x+z).\varPhi'(x+z) = uv + D^1(uv).[z|\overset{1}{a}] + D^2(uv).[z|\overset{2}{a}] + \text{etc.} = S\, D^{\gamma}(uv).[z|\overset{\gamma}{a}].$$

Dieses Product läſst sich aber auch durch wirkliche Multiplication der Reihe für $\varPhi'(x+z)$ mit einer Reihe für $\varPhi(x+z)$ finden; soll das Product aber in der That dieselbe Form erhalten mit dem vorstehenden, so darf für $\varPhi(x+z)$ nicht immer dieselbe Entwickelung gebraucht werden, d. h. es muſs k für jedes neue Glied des Multiplicators $S\, D^{\alpha} v.[z|\overset{\alpha}{a}]$ einen anderen und zwar mit der Zeigezahl des Gliedes übereinstimmenden Werth erhalten. Hiernach hat man noch:

$$\varPhi(x+z).\varPhi'(x+z) = S\,\{D^{\alpha} v.[z|\overset{\alpha}{a}].D^{\beta} \overset{\alpha}{u}.[z|\overset{\alpha\,\beta}{a}]\},$$

und da $[z|\overset{\alpha}{a}].[z|\overset{\beta}{a}] = [z|\overset{\gamma}{a}]$ für $\alpha+\beta=\gamma$ ist, so stimmen offenbar die

Reihen für das Product $\varphi(x+z).\varphi'(x+z)$ in der Form völlig zusammen. Man hat also allgemein:

$$D^r(u.v) = S\, D^\alpha v . D^\beta \overset{\alpha}{u} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Nach dieser einfachen Formel kann die Derivate eines Productes $u.v$ aus den Derivaten der Factoren u und v des Productes hergeleitet werden. Die ersten Glieder dieses Ausdrucks sind:

$$D^r(u.v) = D^r u + D^1 v . D^{r-1}\overset{1}{u} + D^2 v . D^{r-2}\overset{2}{u} + D^3 v . D^{r-3}\overset{3}{u} + \text{etc.}$$

Noch einfacher ist die Formel, nach welcher man die Derivaten eines mehrgliedrigen Ausdrucks findet. Man hat nemlich:

$$D^r(u+v) = D^r u + D^r v.$$

Der Beweis dieser Formel wird, da die Wahrheit am Tage liegt, der Kürze wegen übergangen.

§. 122.

Um ein einfaches Beispiel des Gebrauches der behandelten Entwickelungsmethode zu geben, legen wir uns die Entwickelung der Function $(x+z)^m$ vor. Hier ist $\varphi x = x^m$ und $\overset{\alpha}{u} = (x+\overset{\alpha}{a})^m$. Man hat also:

$$(x+z)^m = u + D^1 u . [z|a]^{1} + D^2 u . [z|a]^{2} + D^3 u . [z|a]^{3} + \text{etc.}$$

und es findet sich allgemein:

$$D^n u = \frac{(x+a)^m}{\underset{0}{\psi} n} + \frac{(x+\overset{1}{a})^m}{\underset{1}{\psi} n} + \frac{(x+\overset{2}{a})^m}{\underset{2}{\psi} n} \ldots + \frac{(x+\overset{n}{a})^m}{\underset{n}{\psi} n}.$$

Die für $(x+z)^m$ angegebene Reihe bricht ab, wenn m eine positive ganze Zahl ist. Um dieses zu beweisen, bemerken wir, dafs nach §. 113. der Ausdruck

$$\frac{a^m}{\underset{0}{\psi} n} + \frac{\overset{1}{a}{}^m}{\underset{1}{\psi} n} + \frac{\overset{2}{a}{}^m}{\underset{2}{\psi} n} \ldots + \frac{\overset{n}{a}{}^m}{\underset{n}{\psi} m} = \underset{(n)}{\overset{m-n}{C}}$$

ist, wenn als Scale bei der combinatorischen Operation dient

$$(n) = (a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{n}{a}).$$

Wird nun im Ausdrucke jedes Element um x vermehrt, so behalten die Nenner ψ im Ausdrucke die vorigen Werthe, weil sie nur Unterschiede der Elemente enthalten. Man hat also

$$D^n u = D^n (x+a)^m = \underset{(n)}{\overset{m-n}{C}},$$

wenn die Scale $(n) = (x+a,\ x+\overset{1}{a},\ x+\overset{2}{a}, \ldots x+\overset{n}{a})$ statt der vorigen gebraucht wird. Dieser Ausdruck ist aber offenbar $=0$, wenn m eine positive ganze Zahl ist, welche $<n$. Man hat also in Anwendung dieser

Scale der geschlossenen Ausdruck:

$$(x+z)^m = S \overset{\beta}{\underset{(\alpha)}{C}} . [z|\overset{\alpha}{a}] \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=m),$$

und die Scale (α) ist dann eine in Hinsicht auf die Menge ihrer Elemente veränderliche, nemlich $(\alpha) = (x+a, x+\overset{1}{a}, x+\overset{2}{a}, \dots x+\overset{\alpha}{a})$. Es würde hier zu weit führen, von den Fällen ausführlicher zu handeln, in welchen m keine positive ganze Zahl ist.

Fünfter Abschnitt.

Besondere Entwickelungsmethoden für $\varphi(x+z)$.

§. 123.

Die vorhin entwickelte Methode, eine Function $\varphi(x+z)$ durch eine Reihe auszudrücken, ist so allgemein, daſs ihre Allgemeinheit in vielen Fällen überflüssig ist. Die Elemente $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}$, etc. konnten willkürlich, ohne allen Zusammenhang, gewählte Gröſsen sein; nur war vorausgesetzt, daſs keine gleiche unter ihnen vorkämen; und wozu sollte auch die Wiederholung einer Bedingung in der Bestimmung einer Function dienen. Nehmen wir jetzt an, daſs $a=0$, $\overset{1}{a}=k$, $\overset{2}{a}=2k$, $\overset{3}{a}=3k$, etc. und allgemein $\overset{\alpha}{a}=\alpha k$ sei, so verwandeln sich die Producte $[z|\overset{\alpha}{a}]$ in Facultäten, nemlich es ist nun $[z|\overset{\alpha}{a}] = [z,\overset{\alpha}{k}] = z(z-k)(z-2k)\dots(z-\alpha k+k)$. Ferner ist nun $\varphi(x+\overset{0}{a}) = \varphi(x+a) = u = \varphi x$ und also $D^\alpha u = D^\alpha \varphi x$. Man hat also zunächst:

$$\varphi(x+z) = \varphi x + D^1\varphi x.[z,\overset{1}{k}] + D^2\varphi x.[z,\overset{2}{k}] + D^3\varphi x.[z,\overset{3}{k}] \dots = S D^\alpha \varphi x.[z,\overset{\alpha}{k}].$$

Weiter hat man $\overset{\alpha}{u} = \varphi(x+\alpha k)$, und zur Specialisirung von $D^n\varphi x$ ist es nun erforderlich, die in seinem Ausdrucke vorkommenden Nenner ψ näher zu betrachten.

Es ist aber nun

$$\overset{r}{\psi} n = (\overset{r}{a}-\overset{0}{a})(\overset{r}{a}-\overset{1}{a})\dots(\overset{r}{a}-\overset{r-1}{a})(\overset{r}{a}-\overset{r+1}{a})\dots(\overset{r}{a}-\overset{n}{a}),$$

und da $\overset{r}{a}-\overset{n}{a} = rk-nk = (r-n)k = -(n-r)k$ ist, so hat man offenbar:

$$\overset{r}{\psi} n = (-1)^{n-r}.k^r.r'(n-r)',$$

und es ist also:

$$D^n\varphi x = S(-1)^\beta . \frac{\varphi(x+\alpha k)}{k^n \alpha' \beta'} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=n).$$

Schafft man in diesem Ausdrucke die Nenner fort, so hat man also:

$$D^n \varphi x = \frac{1}{k^n . n'} S(-1)^\beta [n]^\beta_{\beta'} \varphi(x+\alpha k) \qquad \text{cond.} (\alpha+\beta=n).$$

Die Recursionsformel ist nun einfacher die folgende:

$$D^{n+1} \varphi x = \frac{D^n \varphi(x+k) - D^n \varphi x}{(n+1)k}.$$

Wird nun der Ausdruck $(D^n \varphi x).(k^n.n')$ mit $\Delta^n \varphi x$ bezeichnet, und die *n*te Differenz der Function φx genannt, so hat man:

$$\Delta^n \varphi x = S(-1)^\beta [n]^\beta_{\beta'} . \varphi(x+\alpha k),$$

und die Recursionsformel wird nun ebenfalls einfacher:

$$\Delta^{n+1} \varphi x = \Delta^n \varphi(x+k) - \Delta^n \varphi x;$$

also auch $\Delta \varphi x = \varphi(x+k) - \varphi x$. Wird nun etwa $\chi x = x$ gesetzt, so ist also $\Delta x = \Delta \chi x = \chi(x+k) - \chi x = x+k-x = k$. Man wird also nun der Gleichmäfsigkeit wegen auch Δx für k setzen. Dadurch erhält man also:

1. $\varphi(x+z) = \varphi x + \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} . [z, \Delta x]^1_{1'} + \frac{\Delta^2 \varphi x}{\Delta x^2} . [z, \Delta x]^2_{2'} \ldots = S \frac{\Delta^\alpha \varphi x}{\Delta x^\alpha} . [z, \Delta x]^\alpha_{\alpha'}$,

2. $\Delta^n \varphi x = S(-1)^\beta [n]^\beta_{\beta'} \varphi(x+\alpha \Delta x) \qquad \text{cond.} (\alpha+\beta=n)$,

3. $\Delta^{n+1} \varphi x = \Delta^n \varphi(x+\Delta x) - \Delta^n \varphi x$.

Die im §. 121. gefundene Formel heifst nun:

4. $\Delta^n(\varphi x . \psi x) = S [n]^\alpha_{\alpha'} \Delta^\alpha \varphi x . \Delta^\beta \psi(x+\alpha \Delta x) \qquad \text{cond.} (\alpha+\beta=n)$.

Zusatz. Hätte man $a=0$, $\overset{1}{a} = -k$, $\overset{2}{a} = -2k$, etc. und allgemein $\overset{\alpha}{a} = -\Delta k$ gesetzt, und hätte man dann statt des Zeichens Δ das Zeichen ∇ genommen, so hätte man die folgenden Formeln erhalten:

1. $\varphi(x+z) = S \frac{\nabla^\alpha \varphi x}{\nabla x^\alpha} . [z, -\nabla x]^\alpha_{\alpha'}$,

2. $\nabla^n \varphi x = S(-1)^\beta [n]^\alpha_{\alpha'} \varphi(x-\beta \nabla x) \qquad \text{cond.} (\alpha+\beta=n)$,

3. $\nabla^{n+1} \varphi x = \nabla^n \varphi x - \nabla^n \varphi(x-\nabla x)$,

4. $\nabla^n(\varphi x . \psi x) = S[n]^\alpha_{\alpha'} \nabla^\alpha \varphi x . \nabla^\beta \psi(x-\alpha \nabla x \qquad \text{cond.} (\alpha+\beta=n)$.

§. 124.

Die beiden für $\varphi(x+z)$ angegebenen Reihen gehen nun zwar ins Unendliche fort, aber sie brechen unter gewissen Umständen dennoch ab.

Wenn nemlich z ein Vielfaches von $+\triangle x$ oder von $-\nabla x$ ist, so hat man

$$\varphi(x+n\triangle x) = S\,[n]^{\alpha}_{\overline{\alpha'}}\triangle^{\alpha}\varphi x = S\,[n]^{\beta}_{\overline{\beta'}}\triangle^{\alpha}\varphi x \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=n),$$

$$\varphi(x-n\nabla x) = S(-1)^{\alpha}[n]^{\alpha}_{\overline{\alpha'}}\nabla^{\alpha}\varphi x = S(-1)^{\alpha}[n]^{\beta}_{\overline{\beta'}}\nabla^{\alpha}\varphi x \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=n).$$

Aufserdem können die Differenzen $\triangle^{\alpha}\varphi x$ und $\nabla^{\alpha}\varphi x$ von einem gewissen Gliede an einzeln $=0$ sein, und dann brechen die Reihen ebenfalls ab, obgleich z kein Vielfaches von $\triangle x$ oder von $-\nabla x$ ist.

Der im §. 113. behandelte, oder noch etwas allgemeinere Ausdruck für $D^n(x+a)^m$ im §. 122. geht nun, wenn $a=0$ und $a=\alpha\triangle x$ gesetzt wird, über in $\overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}$ für die Scale:

$$(n) = x,\; x+\triangle x,\; x+2\triangle x,\; \ldots\ldots\; x+n\triangle x.$$

Wird $x=0$ gesetzt, so hat man also

$$\underset{\text{für } x=0}{D^n x^m} = \overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}.\triangle x^{m-n} \quad \text{für die Scale } (n)=0,1,2,3,\ldots\ldots n,$$

und da $\triangle^n x^m = \triangle x^n.n'.D^n x^m$ ist, so hat man

$$\underset{\text{für } x=0}{\triangle^n x^m} = n'.\overset{m-n}{\underset{(n)}{C}}.\triangle x^m = n'.{}^{-n}\overset{m-n}{f}.\triangle x^m,$$

wenn ${}^{-n}\overset{m-n}{f}$ einen Facultäten-Coëfficienten, wie früher, bezeichnet. Man hat also:

$$\underset{\text{für } x=0 \text{ und } \triangle x=1}{\triangle^n x^m} = S(-1)^{\beta}[n]^{\beta}_{\overline{\beta'}}.\alpha^m = n'.{}^{-n}\overset{m-n}{f} \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=n).$$

§. 125.

Wenn man den Ausdruck $\varphi(x+z) = S\dfrac{\triangle^{\alpha}\varphi x}{\triangle x^{\alpha}}.[z,\triangle x]^{\alpha}_{\overline{\alpha'}}$ nach Potenzen von z entwickeln will, so hat man also nur die in jedem Gliede vorkommenden Facultäten zu entwickeln, denn der Factor $\dfrac{\triangle^{\alpha}\varphi x}{\triangle x^{\alpha}}$ enthält die Gröfse z nicht. Nun ist aber allgemein:

$$[z,\triangle x]^{n} = S\,{}^{n}\overset{\beta}{f}.z^{n-\beta}.(-\triangle x)^{\beta},$$

und wird dieser Ausdruck substituirt, so erhält man:

$$\varphi(x+z) = S\triangle^{\alpha}\varphi x.{}^{\alpha}\overset{\beta}{f}.z^{\alpha-\beta}.\frac{\triangle x^{\beta-\alpha}}{\alpha'}.(-1)^{\beta}.$$

Nun ist aber ${}^{+\alpha}\overset{\beta}{f}=0$, wenn $\alpha<\beta$ ist; daher kann man sogleich $\alpha+\beta$ für α setzen, und erhält dadurch:

$$\varphi(x+z) = S\triangle^{\alpha+\beta}\varphi x.{}^{\alpha+\beta}\overset{\beta}{f}\frac{z^{\alpha}}{\triangle x^{\alpha}}.\frac{1}{(\alpha+\beta)'}.(-1)^{\beta}.$$

Dieser nach Potenzen von z fortschreitende Ausdruck kann nun einfacher unter

$$1.\quad \varphi(x+z) = S\overset{\alpha}{A}.z^{\alpha}$$

vorgestellt werden, und die in dieser Reihe vorkommenden Coëfficienten A haben dann folgenden Ausdruck:

$$\overset{r}{A} = S(-1)^{\beta}\frac{\Delta^{r+\beta}\varphi x}{\Delta x^r}.{}^{r+\beta}\overset{\beta}{f}.\frac{1}{(r+\beta)'}.$$

Er erscheint ein wenig einfacher, wenn man ihn mit $r'.\Delta x^r$ multiplicirt; dadurch erhält man:

$$2.\quad r'.\overset{r}{A}.\Delta x^r = S(-1)^{\beta}[r\overset{-\beta}{]}.{}^{r+\beta}\overset{\beta}{f}.\Delta^{r+\beta}\varphi x.$$

Setzt man $r=1$, so hat man also noch:

$$3.\quad \overset{1}{A}.\Delta x = S(-1)^{\beta}\frac{\Delta^{\beta+1}\varphi x}{\beta+1}.$$

In Anwendung dieser Reihen, welche aber leider selten gehörig convergiren, könnte oder müfste man die Coëfficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. berechnen, wenn man die Function $\varphi(x+z)$ nach steigenden Potenzen von z entwickeln wollte. Wenn man den Ausdruck einer Function nicht kennt, sondern ihn erst nach gegebenen Bedingungen, wie im §. 119. gezeigt worden ist, zu ermitteln hat, so bleibt auch im Grunde kein anderes Mittel, als der Gebrauch dieser Reihen, für die Berechnung der Coëfficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. übrig.

§. 126.

Unter der Voraussetzung, dafs die Coëfficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. berechnet sind, kann man auch die Gröfse $\Delta^m\varphi x$ nach Potenzen von Δx entwickeln. Da man nemlich, wenn der Reihe nach $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, etc. für z gesetzt wird, allgemein erhält:

$$\varphi(x+v.\Delta x) = S\overset{\gamma}{A}.v^{\gamma}.\Delta x^{\gamma}$$

und $\Delta^n\varphi x = S(-1)^{\beta}[n\overset{\beta}{\underset{\beta'}{]}}\varphi(x+\alpha\Delta x)$ cond. $(\alpha+\beta=n)$ ist, so erhält man durch Substitution:

$$\Delta^n\varphi x = S(-1)^{\beta}[n\overset{\beta}{\underset{\beta'}{]}}\alpha^{\gamma}.\overset{\gamma}{A}.\Delta x^{\gamma}\qquad \text{cond.}\ (\alpha+\beta=\gamma).$$

Nun ist aber allgemein $S(-1)^{\beta}[n\overset{\beta}{\underset{\beta'}{]}}\alpha^m = n'.{}^{-n}\overset{m-n}{f}$, also hat man einfacher:

$$\Delta^n\varphi x = S\,n'.{}^{-n}\overset{\gamma-n}{f}.\Delta x^{\gamma}.\overset{\gamma}{A}.$$

Nun ist aber ${}^{-n}\overset{\gamma-n}{f}=0$, so lange $\gamma<n$ ist; daher kann sogleich $\gamma+n$ für

γ geschrieben werden, wodurch man erhält:

$$\Delta^n \varphi x = (S\, {}^{-n}\overset{\gamma}{f}.\overset{n+\gamma}{A}.\Delta x^{n+\gamma}).n'.$$

Die ersten Glieder dieser Reihe sind nun aber offenbar die folgenden:

$$\Delta^n \varphi x = n'(\overset{n}{A}\Delta x^n + {}^{-n}\overset{1}{f}.\overset{n+1}{A}.\Delta x^{n+1} + {}^{-n}\overset{2}{f}.\overset{n+2}{A}.\Delta x^{n+2} + \text{etc.}),$$

oder es ist:

$$\frac{1}{n'}.\frac{\Delta^n \varphi x}{\Delta x^n} = \overset{n}{A} + {}^{-n}\overset{1}{f}.\overset{n+1}{A}.\Delta x + {}^{-n}\overset{2}{f}.\overset{n+2}{A}.\Delta x^2 + {}^{-n}\overset{3}{f}.\overset{n+3}{A}.\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Wenn man also die Ausdrücke $\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$, $\frac{1}{2'}.\frac{\Delta^2\varphi x}{\Delta x^2}$; $\frac{1}{3'}.\frac{\Delta^3\varphi x}{\Delta x^3}$; etc. in Reihen entwickelte, welche nach steigenden Potenzen von Δx fortgehen, so würden die Coëfficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc. die Anfangsglieder dieser Reihen sein, und man könnte sie dann in der Reihe $\varphi(x+z) = S\overset{a}{A}.z^a$ substituiren. Nun zeigt sich aber bald, daſs es nicht einmal nöthig ist, die Gröſsen $\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$, $\frac{1}{2'}.\frac{\Delta^2\varphi x}{\Delta x^2}$; $\frac{1}{3'}.\frac{\Delta^3\varphi x}{\Delta x^3}$; etc. vollständig in Reihen zu verwandeln, sondern daſs die Kenntniſs des Anfangsgliedes der ersten Reihe hinreicht, um das Anfangsglied der zweiten, aus diesem dann das der dritten Reihe u. s. w. zu finden. Diese Art der Herleitung oder Derivation der Gröſse $\overset{1}{A}$ aus $\overset{0}{A}$ oder φx, der Gröſse $\overset{2}{A}$ aus $\overset{1}{A}$, der Gröſse $\overset{3}{A}$ aus $\overset{2}{A}$, u. s. w. ist also für die Theorie der Entwickelung von Wichtigkeit; sie heiſst Differentiiren. Bezeichnet man das Anfangsglied der höheren Differenz $\Delta^n\varphi x$ einer Function φx mit $\partial^n\varphi x$, so hat man also für das $n$te Differential von φx:

$$\partial^n\varphi x = \overset{n}{A}.\Delta x^n.n'.$$

Sieht man nun selbst x als eine Function an, so ist das Anfangsglied der Reihe für Δx offenbar wieder $=\Delta x$, so lange Δx unentwickelt bleibt, und man hat also auch $\partial x = \Delta x$. Kann und muſs aber Δx wieder nach Potenzen der Differenz einer anderen veränderlichen Gröſse entwickelt werden, so ist offenbar ∂x nur das Anfangsglied der dadurch erhaltenen Reihe. Man thut daher wohl, für alle Fälle in der Formel $\partial^n\varphi x = n'.\overset{n}{A}.\Delta x^n$ statt Δx zu setzen ∂x, obgleich es unnöthig wäre, wenn Δx unentwickelt bleibt. Man hat also:

$$\frac{1}{n'}.\frac{\partial^n\varphi x}{\partial x^n} = \overset{n}{A},$$

und wenn dieser Werth substituirt wird, so hat man die beiden Reihen:

$$\varphi(x+z) = S\frac{\partial^a \varphi x}{\partial x^a}\cdot\frac{z^a}{a'} \text{ und}$$

$$\Delta^n \varphi x = S[n]^{-a}\cdot{}^{-n}\overset{a}{f}\cdot\frac{\partial^{n+a}\varphi x}{\partial x^{n+a}}\cdot\Delta x^{n+a}.$$

Zusatz. Wäre $z = \varphi x$ und $x = \psi v$, und hätte man gefunden $\Delta z = A.\Delta x + B.\Delta x^2$ etc., wie auch $\Delta x = a\Delta v + b\Delta v^2 +$ etc., so hätte man offenbar für Δz auch eine Reihe von der Form

$$\Delta z = Aa.\Delta v + P.\Delta v^2 + Q.\Delta v^3 + \text{etc.},$$

und also, wenn Δv unentwickelt bleibt, offenbar $\partial z = A.a.\Delta v$, wie auch $\partial z = A.\partial x$. Hätte man $\partial z = A.\Delta x$ gesetzt, also Δx nicht in ∂x verwandelt, so würde man durch Substitution erhalten $\partial z = Aa.\Delta v + Ab.\Delta v^2 +$ etc., da doch ∂z nur $= Aa.\Delta v$, d. h. dem Anfangsgliede der Differenz gleich sein soll. Daher kann die Versäumung der auch schon durch die Gleichmäſsigkeit veranlaſsten Verwandlung von Δx in ∂x im Ausdrucke $\partial z = A.\Delta x$ zu Fehlern führen.

§. 127.

Um nun noch zu zeigen, daſs man aus dem Anfangsgliede einer Differenzreihe das Anfangsglied der nächst höheren Differenzreihe finden könne, setzen wir

$$\Delta^n \varphi x = \frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}.\Delta x^n + P.\Delta x^{n+1} + Q.\Delta x^{n+2} + \text{etc.};$$

die Gröſsen $\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}$; P, Q, etc. sind dann Functionen von x. Weil nun $\Delta^n \varphi x = \Delta^n \varphi(x+\Delta x) - \Delta^n \varphi x$ ist, so muſs man in jedem Gliede der Reihe $x + \Delta x$ für x setzen und vom also veränderten Gliede das Glied selbst subtrahiren, oder in Zeichen:

$$\Delta^{n+1}\varphi x = \left(\Delta\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}\right)\Delta x^n + \Delta P.\Delta x^{n+1} + \Delta Q.\Delta x^{n+2} + \text{etc.}$$

Da nun aber

$$\Delta\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}\right)}{\partial x}\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3 + \text{etc.},$$

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x + A'\Delta x^2 + B'\Delta x^3 + \text{etc.},$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x + A''\Delta x^2 + B''\Delta x^3 + \text{etc.},$$

etc.

ist, so hat man offenbar, wenn diese Reihen substituirt werden:

$$\Delta^{n+1}\varphi x = \frac{\partial\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}}{\partial x}.\Delta x^{n+1} + A\,\Delta x^{n+2} + B\,\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$$
$$+\frac{\partial P}{\partial x}.\Delta x^{n+2} + A'\,\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$$
$$+\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$$

und da auch $\Delta^{n+1}\varphi x = \frac{\partial^{n+1}\varphi x}{\partial x^{n+1}}.\Delta x^{n+1} + V.\Delta x^{n+2} + W\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$ ist, so hat man

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi x}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial\frac{\partial^n \varphi x}{\partial x^n}}{\partial x}.$$

Diese Formel, welche auch einfacher $\partial^{n+1}\varphi x = \partial(\partial^n \varphi x)$ ist, ist der Ausdruck der obigen Behauptung. Hat man also ein höheres Differential $\partial^n \varphi x$, so setze man in ihm $x + \Delta x$ für x, entwickele dasselbe nach Potenzen (steigenden) von Δx, subtrahire von der Entwickelung $\partial^n \varphi x$, und behalte vom Reste nur das Glied, welches mit $\Delta x'$ multiplicirt ist, verwandle dann Δx in ∂x, so hat man $\partial^{n+1}\varphi x$.

Wie hieraus die bekannten Regeln des Differentiirens herzuleiten und wie man sich zu verhalten, wenn x wieder als Function einer neuen veränderlichen Gröfse anzusehen ist, mufs hier der Kürze wegen übergangen werden. Darin stimmen auch die meisten Darstellungen der Differentialrechnung überein. Schliefslich wird bemerkt, dafs die im §. 125. gefundenen Reihen (2. und 3.) nun sind:

$$\frac{\partial^r \varphi x}{\partial x^r}.\Delta x^r = S(-1)^\beta [r]^{-\beta}.{}^{r+\beta}\!f^{\beta}.\Delta^{r+\beta}\varphi x \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}.\Delta x = S(-1)^\beta \frac{\Delta^{\beta+1}\varphi x}{\beta+1}.$$

Sowohl die Reihe für $\frac{\partial^r \varphi x}{\partial x^r}\Delta x$ als auch die Reihe $\Delta^r \varphi x = S[r]^{-\beta}.{}^{-r}\!f^{\beta}.\Delta x^{r+\beta}$, welche mit den Reihen für $\{\log(1+z)\}^r$ und $(e^z - 1)^r$ Ähnlichkeit haben, behalten auch noch eine Bedeutung, wenn r eine negative ganze Zahl bezeichnet.

§. 128.

Die Reihe $\varphi(x+z) = S\frac{\partial^\alpha \varphi x}{\partial x^\alpha}.\frac{z^\alpha}{\alpha'}$ ist von jeher fast ausschliefslich benutzt worden, um Functionen zu entwickeln. Die beiden Reihen:

$$\varphi(x+z) = S\frac{\Delta^\alpha \varphi x}{\Delta x^\alpha}.[z, \Delta x]^{\alpha}_{\alpha^1} \quad \text{und}$$
$$\varphi(x+z) = S\frac{\nabla^\alpha \varphi x}{\nabla x^\alpha}.[z, -\nabla x]^{\alpha}_{\alpha^1},$$

in deren Mitte gleichsam die erste oder auch die Taylorsche Reihe fällt, hat man aber bis jetzt kaum anders als zur Interpolation benutzt. In vielen Fällen ist gleichwohl ein nach Facultäten fortgehender Ausdruck für die Rechnung in bestimmten Zahlen bequemer als ein nach Potenzen fortgehender.

Um ein Beispiel zu geben, legen wir uns die Aufgabe der Entwickelung der Function ${}^{x}\overset{r}{f}$ in eine nach Facultäten von x fortgehende Reihe vor. Setzen wir $\varphi x = {}^{x}\overset{r}{f}$ und $\Delta x = 1$, so ist $\Delta\varphi x = {}^{x+1}\overset{r}{f} - {}^{x}\overset{r}{f}$, und da ${}^{x+1}\overset{r}{f} = {}^{x}\overset{r}{f} + x\,.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}$ ist, so hat man

$$\Delta\,{}^{x}\overset{r}{f} = x\,.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten der Gleichung die $m$te Differenz, so haben wir:

$$\Delta^{m+1}\,{}^{x}\overset{r}{f} = \Delta^{m}\,(x\,.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}).$$

Da nun $x\,.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}$ ein Product aus x und ${}^{x}\overset{r-1}{f}$ ist, so haben wir, wenn die Formel (4.) des §. 123. gebraucht wird:

$$\Delta^{m}\,\{x\,.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}\} = x\,.\,\Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r-1}{f} + m\,.\,\Delta^{m-1}\,{}^{x+1}\overset{r-1}{f},$$

und es ist also auch

$$\Delta^{m+1}\,{}^{x}\overset{r}{f} = x\,.\,\Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r-1}{f} + m\,.\,\Delta^{m-1}\,{}^{x+1}\overset{r-1}{f}.$$

Da aber allgemein $\Delta^{n}\psi(x+\Delta x) = \Delta^{n}\psi x + \Delta^{n+1}\psi x$ ist, so hat man also auch $\Delta^{m-1}\,{}^{x+1}\overset{r-1}{f} = \Delta^{m-1}\,{}^{x}\overset{r-1}{f} + \Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r-1}{f}$, und wenn dieser Ausdruck gebraucht wird, so hat man:

$$\Delta^{m+1}\,{}^{x}\overset{r}{f} = (x+m)\,\Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r-1}{f} + m\,.\,\Delta^{m-1}.\,{}^{x}\overset{r-1}{f}.$$

Diese Formel dient nun zur recurrirenden Berechnung der höheren Differenzen der sogenannten Facultäten-Coëfficienten. Aus dieser Formel kann eine Menge von Folgerungen gezogen werden, womit wir uns aber nicht aufhalten. Wir bemerken nur, dafs die Formel für $x=0$ am einfachsten wird, nemlich:

$$\Delta^{m+1}\,{}^{x}\overset{r}{f} = m\,.\,(\Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r-1}{f} + \Delta^{m-1}\,{}^{x}\overset{r-1}{f}) \text{ für } x=0.$$

Die Formel, welche zur independenten Berechnung der höheren Differenzen dient, ist $\Delta^{m}\varphi x = S(-1)^{\beta}\,[m]^{\beta}_{\overline{\beta'}}\,\varphi(x+\alpha\Delta x)$ cond. $(\alpha+\beta=m)$, und wenn $\varphi(x+\alpha\Delta x) = {}^{x+\alpha}\overset{r}{f}$ gesetzt wird, so hat man:

$$\Delta^{m}\,{}^{x}\overset{r}{f} = S(-1)^{\beta}\,[m]^{\beta}_{\overline{\beta'}}\,{}^{x+\alpha}\overset{r}{f} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=m).$$

Will man die Differenzen für $x=0$ haben, so dient die Formel

$$\Delta^m\, {}^x\overset{r}{f} = S(-1)^\beta\, [m]^{\beta}_{\beta'} \cdot {}^{\alpha}\overset{r}{f}$$

mit der vorigen Bedingungsgleichung. Der Ausdruck kann aber noch sehr zusammengezogen werden, wenn man bemerkt, daſs ${}^{\alpha}\overset{r}{f} > 0$, so lange die positive ganze Zahl $\alpha < r$ ist. Man kann daher sogleich $\alpha + r$ für α setzen, und hat also

$$\underset{\text{Für } x=0.}{\Delta^m\, {}^x\overset{r}{f}} = S(-1)^\beta\, [m]^{\beta}_{\beta'} \cdot {}^{r+\alpha}\overset{r}{f} \qquad \text{cond.}\ (\alpha + \beta = m - r).$$

§. 129.

Um von diesen Formeln nun Gebrauch zu machen, setzen wir in der Formel $\varphi(x+z) = S\,\frac{\Delta^\alpha \varphi x}{\Delta x^\alpha} \cdot [z, \Delta x]^{\alpha}_{\alpha'}$ ebenfalls $\varphi x = {}^x\overset{r}{f}$, $\Delta x = 1$, $x = 0$, und dann x für z. Dadurch erhält man:

$$ {}^x\overset{r}{f} = S\,\{\underset{\text{Für } x=0.}{\Delta^\alpha\, {}^x\overset{r}{f}}\}\, [x]^{\alpha}_{\alpha'}.$$

Aber der für $\{\underset{x=0}{\Delta^m\, {}^x\overset{r}{f}}\}$ im §. 128. gefundene Ausdruck giebt zu erkennen, daſs er $=0$ sei, so lange $m < r$. In der für ${}^x\overset{r}{f}$ angegebenen Reihe fallen also alle erste Glieder, für welche $\alpha < r$ ist, weg, und man kann also sogleich $r + \alpha$ für α setzen. Führen wir für $\{\underset{x=0}{\Delta^{r+m}\, {}^x\overset{r}{f}}\}$ das einfachere Zeichen $\overset{m}{\varphi} r$ ein, so haben wir also:

$$1. \qquad {}^x\overset{r}{f} = S\, \overset{\alpha}{\varphi} r \cdot [x]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'},$$

und zur Berechnung der unbekannten Coëfficienten dient dann die Formel:

$$2. \qquad \overset{m}{\varphi} r = S(-1)^\beta\, [m+r]^{\beta}_{\beta'} \cdot {}^{r+\alpha}\overset{r}{f} \qquad \text{cond.}\ (\alpha + \beta = m).$$

Wenn $r > 0$ ist, so ist auch noch $\overset{0}{\varphi} r = 0$, weil für $r > 0$ auch ${}^r\overset{r}{f} = 0$ ist. Wird diese Abänderung der Bezeichnung in die Recursionsformel eingeführt, so hat man:

$$3. \qquad \overset{m+1}{\varphi} r = (m+r) \cdot \{\overset{m+1}{\varphi}(r-1) + \overset{m}{\varphi}(r-1)\}.$$

Die Rechnung nach dieser Recursionsformel ist besonders bequem. In Anwendung derselben findet man leicht die folgenden allgemeinen Resultate:

$$\overset{r}{\varphi} r = 1.3.5.7\ldots.(2r-1) = [1, -2]^{r} \text{ und } \overset{1}{\varphi} r = 1.2.3\ldots.r = [1, -1]^{r} = [r]^{r}$$

$$\text{und } \overset{m}{\varphi} r = 0, \text{ wenn } m > r \text{ ist.}$$

Für die übrigen Coëfficienten $\overset{2}{\varphi}r$, $\overset{3}{\varphi}r$, $\overset{4}{\varphi}r$, ... $\overset{r-1}{\varphi}r$ lassen sich ähnliche, aber minder einfache Resultate finden.

Die begonnene Rechnung giebt aber die folgenden bestimmten Resultate:

$$ {}^{x}\overset{1}{f} = [x]^{2}_{\overline{2},} $$

$$ {}^{x}\overset{2}{f} = 2[x]^{3}_{\overline{3},} + 3[x]^{4}_{\overline{4},} $$

$$ {}^{x}\overset{3}{f} = 6[x]^{4}_{\overline{4},} + 20[x]^{5}_{\overline{5},} + 15[x]^{6}_{\overline{6},} $$

$$ {}^{x}\overset{4}{f} = 24[x]^{5}_{\overline{5},} + 130[x]^{6}_{\overline{6},} + 210[x]^{7}_{\overline{7},} + 105[x]^{8}_{\overline{8},} $$

$$ {}^{x}\overset{5}{f} = 120[x]^{6}_{\overline{6},} + 924[x]^{7}_{\overline{7},} + 2380[x]^{8}_{\overline{8},} + 2520[x]^{9}_{\overline{9},} + 945[x]^{10}_{\overline{10},} $$

$$ {}^{x}\overset{6}{f} = 720[x]^{7}_{\overline{7},} + 7308[x]^{8}_{\overline{8},} + 26432[x]^{9}_{\overline{9},} + 44100[x]^{10}_{\overline{10},} + 34650[x]^{11}_{\overline{11},} + 10395[x]^{12}_{\overline{12},} $$

u. s. w.

Als Probe für die Richtigkeit der Berechnung der Coëfficienten in diesen Ausdrücken dient die Formel:

$$ -\overset{1}{\varphi}r + \overset{2}{\varphi}r - \overset{3}{\varphi}r \dots + (-1)^{\alpha}\overset{\alpha}{\varphi}r \dots + (-1)^{r}\overset{r}{\varphi}r = (-1)^{r}. $$

So ist z. B.

$$ -720+7308-26432+44100-34650+10395=(-1)^{6}=+1=61803-61802. $$

Zusatz. Setzt man $\left(S\,\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)^{m} = S\;{}^{m}\overset{\alpha}{\mathfrak{R}}\,x^{2m+\alpha}$, so findet man nach §. 109. allgemein $\overset{m}{\varphi}r = [m+r]^{r-m}.\,{}^{m}\overset{r-m}{\mathfrak{R}}$, was leicht zu beweisen ist.

§. 130.

Die Anwendung der Reihe $\varphi(x+z) = S\,\frac{\nabla^{\alpha}\varphi x}{\nabla x^{\alpha}}\,.\,[z, -\nabla x]^{\alpha}_{\overline{\alpha},}$ geschieht in ähnlicher Art, und man findet:

$$ \nabla^{m+1}\;{}^{x}\overset{r}{f} = (x-m-1)\,\nabla^{m}\;{}^{x-1}\overset{r-1}{f} + m\,.\,\nabla^{m-1}\;{}^{x-1}\overset{r-1}{f}, $$

womit man fast eben so wie früher verfährt, und ähnliche, obgleich von den vorigen verschiedene Ausdrücke erhält, mit deren Herleitung wir uns hier aber nicht aufhalten. Soviel erhellet im Allgemeinen aus dem Vorhergehenden, daſs die Function ${}^{x}\overset{r}{f}$ eine rationale ganze Function von x des $2r$ten Grades ist. Weil aber die Form dieser Function nun bekannt geworden ist, so kann die im §. 117. für solche Functionen hergeleitete

allgemeine Formel zur Anwendung kommen, nemlich:

$$\varphi x = S\,\overset{\alpha}{X}.\varphi\overset{\alpha}{a} \quad \text{für } \alpha \text{ nicht} > n.$$

Im vorliegenden Falle, wo $\varphi x = {}^x\overset{r}{f}$ die gesuchte Gröſse ist, hat man also $n=2r$.

Setzen wir $\overset{0}{a}=0$, $\overset{1}{a}=1$, $\overset{2}{a}=2$, ... $\overset{r}{a}=r$; $\overset{r+1}{a}=-1$, $\overset{r+2}{a}=-2$, $\overset{r+3}{a}=-3$, ... $\overset{2r}{a}=-r$, so hat man also $\varphi\overset{\alpha}{a} = {}^\alpha\overset{r}{f}=0$, wenn α nicht $>r$ und $\varphi\overset{r+\alpha}{a} = {}^{-\alpha}\overset{r}{f}$, und wenn diese Werthe substituirt werden, so findet man auf der Stelle:

$${}^x\overset{r}{f} = \frac{(x^2-1^2)(x^2-2^2)(x^2-3^2)\dots(x^2-r^2)}{(2r)'}.\left(S(-1)^\beta\,[2r]^{\beta}_{\beta'}.{}^{-\alpha}\overset{r}{f}.\frac{x}{x+\alpha}\right)$$
$$\text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Wollte man ${}^x\overset{r}{f}$ nach Potenzen von x entwickeln, so ginge auch dieses an; wir aber wollen diese Entwickelung nur theilweise vornehmen und dem Ausdrucke die folgende Gestalt geben:

$${}^x\overset{r}{f} = [x-1]^{r}_{r'}.({}^r\overset{0}{A}x^r + {}^r\overset{1}{A}x^{r-1} + {}^r\overset{2}{A}x^{r-2}\dots + {}^r\overset{\alpha}{A}x^{r-\alpha}\dots + {}^r\overset{r-1}{A}x),$$

weil bekannt ist, daſs der Ausdruck diese Gestalt haben könne. Setzt man zur Einfachheit $\overset{r}{\psi}x = [x-1]^{r}_{r'}$ und $\overset{r}{\varphi}x = S\,{}^r\overset{\alpha}{A}x^\beta$ cond. $(\alpha+\beta=r)$, so hat man ${}^x\overset{r}{f} = \overset{r}{\psi}x.\overset{r}{\varphi}x$, also auch ${}^{x+1}\overset{r}{f} = \overset{r}{\psi}(x+1).\overset{r}{\varphi}(x+1)$, und da ${}^{x+1}\overset{r}{f} = {}^x\overset{r}{f} + x.{}^x\overset{r-1}{f}$ ist, so hat man also:

$$\overset{r}{\psi}(x+1).\overset{r}{\varphi}(x+1) = (\overset{r}{\psi}x).(\overset{r}{\varphi}x) + x(\overset{r-1}{\psi}x).(\overset{r-1}{\varphi}x).$$

Nun ist aber $\overset{r}{\psi}(x+1) = \frac{x}{r}\overset{r-1}{\psi}x$ und $\overset{r}{\psi}x = \frac{x-r}{r}\overset{r-1}{\psi}x$, also hat man, wenn diese Werthe substituirt werden, eine Gleichung, welche durch $\overset{r-1}{\psi}x$ dividirt die folgende ist:

$$x(\overset{r}{\varphi}(x+1) - \overset{r}{\varphi}x) = r(x\overset{r-1}{\varphi}x - \overset{r}{\varphi}x).$$

Werden hierin für $\overset{r}{\varphi}x$, $\overset{r}{\varphi}(x+1)$ und $\overset{r-1}{\varphi}x$ die Werthe substituirt, so erhält man durch Identificirung die folgende Recursionsformel:

$$(2r-m).{}^r\overset{m}{A} = r.{}^{r-1}\overset{m}{A} - \{[r-m+1]^{2}_{2'}\,{}^r\overset{m-1}{A} + [r-m+2]^{3}_{3'}\,{}^r\overset{m-2}{A}\dots + [r-m+\alpha]^{\alpha+1}_{(\alpha+1)'}\,{}^r\overset{m-\alpha}{A}\dots + [r]^{m+1}_{(m+1)'}\,{}^r\overset{0}{A}\}.$$

Die Rechnung nach dieser Formel ist noch ziemlich einfach, und durch dieselbe sind die im §. 85. aufgestellten Ausdrücke gefunden worden.

Manche sonst bemerkenswerthe Beziehung hat hier übergangen werden müssen, weil der der Theorie der Potenzial-Functionen beizufügende Anhang ohnehin schon den beabsichtigten Umfang überschritten hat.

(Ende. Die hierzu gehörigen Tabellen im nächsten Bande.)

29.

De functionibus ellipticis commentatio altera.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

De summis serierum functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arihmeticam constituunt.

Proponemus in sequentibus formulas quasdam elementares circa summas functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arithmeticam constituunt. Quae cum in aliis quaestionibus usui esse possunt, tum summa facilitate formulas generales de functionum ellipticarum transformatione suppeditant.

Proficiscor a formula nota de additione integralium ellipticorum, quae ad secundam speciem pertinent:

1. $E(a)+E(u)-E(a+u) = k^2 \sin\mathrm{am}(a)\sin\mathrm{am}(u)\sin\mathrm{am}(u+a)$,

in qua e notatione in commentatione priore de functionibus ellipticis proposita:

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \mathrm{am}(u) . \partial u.$$

Scribamus in formula (1.) pa loco a, unde illa fit:

$$E(pa)+E(u)-E(u+pa) = k^2 \sin\mathrm{am}(pa)\sin\mathrm{am}(u)\sin\mathrm{am}(u+pa);$$

atque posito successive u, $u+a$, $u+2a$, ... $u+(n-1)a$ loco u, summationem instituamus. Designata generaliter per $\Sigma^{(n)}F(u)$ summa

$$\Sigma^{(n)}F(u) = F(u)+F(u+a)+F(u+2a)+\ldots.+\Sigma(u+(n-1)a),$$

fit:

$$nE(pa)+\Sigma^{(n)}E(u)-\Sigma^{(n)}E(u+pa)=k^2\sin\mathrm{am}(pa)\Sigma^{(n)}\sin\mathrm{am}(u)\sin\mathrm{am}(u+pa).$$

Eodem modo e formula

$$E(na)+E(u)-E(u+na) = k^2 \sin\mathrm{am}(na)\sin\mathrm{am}(u)\sin\mathrm{am}(u+na),$$

loco u posito successive u, $u+a$, $u+2a$, ... $u+(p-1)a$, et summatione facta obtines:

$$pE(na)+\Sigma^{(p)}E(u)-\Sigma^{(p)}E(u+na)=k^2\sin\mathrm{am}(na)\Sigma^{(p)}\sin\mathrm{am}(u)\sin\mathrm{am}(u+na).$$

Jam observo, esse

$$\Sigma^{(n+p)}E(u)=\Sigma^{(n)}E(u)+\Sigma^{(p)}E(u+na)=\Sigma^{(p)}E(u)+\Sigma^{(n)}E(u+pa),$$

ideoque

$$\Sigma^{(n)}E(u)-\Sigma^{(n)}E(u+pa) = \Sigma^{(p)}E(u)-\Sigma^{(p)}E(u+na).$$

Unde e duabus formulis appositis invenimus:

$$2.\quad \begin{array}{c} k^2 \sin \operatorname{am}(pu)\, \Sigma^{(n)} \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+pa) \\ -\, k^2 \sin \operatorname{am}(na)\, \Sigma^{(p)} \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+na) \end{array} = nE(pa) - pE(na).$$

Casus est memorabilis, quo $\sin \operatorname{am}(na)$ neque simul $\sin \operatorname{am}(pa)$ evanescit, quo casu (2.) fit:

$$3.\quad \Sigma^{(n)} \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+pa) = \frac{nE(pa) - pE(na)}{k^2 \sin \operatorname{am}(pa)}.$$

Jam observo, in elementis probari formulas:

$$\cos \operatorname{am}(a) = \cos \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(u+a) + \Delta \operatorname{am}(a) \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+a),$$

$$\Delta \operatorname{am}(a) = \Delta \operatorname{am}(u)\, \Delta \operatorname{am}(u+a) + k^2 \cos \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+a),$$

unde e (3.) nanciscimur etiam:

$$4.\quad \Sigma^{(n)} \cos \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(u+pa) = n \cos \operatorname{am}(pa) - \frac{\Delta \operatorname{am}(a)}{k^2 \sin \operatorname{am}(a)} (nE(pa) - pE(na)),$$

$$5.\quad \Sigma^{(n)} \Delta \operatorname{am}(u)\, \Delta \operatorname{am}(u+pa) = n\, \Delta \operatorname{am}(pa) - \cot \operatorname{am}(a)\, (nE(pa) - pE(na)).$$

Videmus igitur, quoties $\sin \operatorname{am}(na)$ evanescat, neque simul $\sin \operatorname{am}(pa)$, expressiones

$$\Sigma^{(n)} \sin \operatorname{am}(u) \sin \operatorname{am}(u+pa),$$
$$\Sigma^{(n)} \cos \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(u+pa),$$
$$\Sigma^{(n)} \Delta \operatorname{am}(u)\, \Delta \operatorname{am}(u+pa)$$

ab argumento u independentes esse. Ceterum posito, ut in fundamentis,

$$w = \frac{mK + m'iK'}{n},$$

designantibus m, m' numeros quoslibet positivos seu negativos, qui cum ipso n uterque eundem non habent factorem communem, ut $\sin \operatorname{am}(na)$ neque simul $\sin \operatorname{am}(pa)$ evanescat, fieri debet $a = 2\mu w$, designante μ numerum integrum quemlibet, dummodo μp per n non divisibilis sit.

Alias circa summas functionum ellipticarum formulas hunc in modum nancisceris. Posito enim

$$\operatorname{am}(u) = \alpha,\quad \operatorname{am}(v) = \beta,\quad \operatorname{am}(u+v) = \sigma,\quad \operatorname{am}(u-v) = \vartheta,$$

e formulis (24. — 29.) pag. 33. Fundam. sequitur:

$$\cos\sigma\, \Delta\vartheta + \cos\vartheta\, \Delta\sigma = \frac{2\cos\beta\, \Delta\beta \,.\, \cos\alpha\, \Delta\alpha}{1 - k^2 \sin\beta^2 \sin\alpha^2},$$

$$\Delta\sigma \sin\vartheta + \Delta\vartheta \sin\sigma = \frac{2\cos\beta \,.\, \sin\alpha\, \Delta\alpha}{1 - k^2 \sin\beta^2 \sin\alpha^2},$$

$$\sin\sigma \cos\vartheta + \sin\vartheta \cos\sigma = \frac{2\Delta\beta \,.\, \sin\alpha \cos\alpha}{1 - k^2 \sin\beta^2 \sin\alpha^2}.$$

Simul autem dedimus formulas pag. 32. (4. — 6.):

$$\sin\sigma - \sin\vartheta = \frac{2\sin\beta \,.\, \cos\alpha\, \Delta\alpha}{1 - k^2 \sin\beta^2 \sin\alpha^2},$$

$$\cos\vartheta - \cos\sigma = \frac{2\sin\beta\,\Delta\beta\,.\,\sin\alpha\,\Delta\alpha}{1-k^2\sin\beta^2\sin\alpha^2},$$

$$\Delta\vartheta - \Delta\sigma = \frac{2k^2\sin\beta\cos\beta\,.\,\sin\alpha\cos\alpha}{1-k^2\sin\beta^2\sin\alpha^2},$$

quibus cum prioribus combinatis, prodit:

$$6.\quad \cos\sigma\,\Delta\vartheta + \cos\vartheta\,\Delta\sigma = \frac{\Delta\beta}{\operatorname{tang}\beta}(\sin\sigma - \sin\vartheta),$$

$$7.\quad \Delta\sigma\sin\vartheta + \Delta\vartheta\sin\sigma = \frac{1}{\Delta\beta\operatorname{tang}\beta}(\cos\vartheta - \cos\sigma),$$

$$8.\quad \sin\sigma\cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\sigma = \frac{\Delta\beta}{\sin\beta\cos\beta}(\Delta\vartheta - \Delta\sigma).$$

Posito $u+\frac{a}{2}$ loco u et $v=\frac{a}{2}$, fit

$$\beta = \operatorname{am}\left(\frac{a}{2}\right),\quad \sigma = \operatorname{am}(u+a),\quad \vartheta = \operatorname{am}(u),$$

unde (6. — 8.) ita repraesentantur:

$$\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+a) + \cos\operatorname{am}(u+a)\Delta\operatorname{am}(u) = \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}}{\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\sin\operatorname{am}(u+a) - \sin\operatorname{am}(u)],$$

$$\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+a) + \Delta\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u) = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\cos\operatorname{am}(u) - \cos\operatorname{am}(u+a)],$$

$$\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u+a) + \sin\operatorname{am}(u+a)\cos\operatorname{am}(u) = \frac{\Delta\operatorname{am}\frac{a}{2}}{\sin\operatorname{am}\frac{a}{2}\cos\operatorname{am}\frac{a}{2}}[\Delta\operatorname{am}(u) - \Delta\operatorname{am}(u+a)].$$

In his formulis loco a scribatur pa, atque loco u successive posito u, $u+a$, ... $u+(n-1)a$, summatio instituatur; deinde in iisdem formulis loco a scribatur na, atque loco u successive posito u, $u+a$, ... $u+(p-1)a$, rursus summatio instituatur. Utrisque summis inter se comparatis, ubi insuper observas, generaliter esse

$$\Sigma^{(n)}F(u) - \Sigma^{(n)}F(u+pa) = \Sigma^{(p)}F(u) - \Sigma^{(p)}F(u+na),$$

obtineo:

$$9.\quad \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{pa}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}}\Sigma^{(n)}[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+pa) + \cos\operatorname{am}(u+pa)\Delta\operatorname{am}(u)] =$$

$$\frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{na}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}}\Sigma^{(p)}[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+na) + \cos\operatorname{am}(u+na)\Delta\operatorname{am}(u)].$$

10. $\operatorname{tang am}\frac{pa}{2}\,\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}.\Sigma^{(n)}[\Delta\operatorname{am}(u+pa)\sin\operatorname{am}u+\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+pa)]$

$=\operatorname{tang am}\frac{na}{2}\,\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}.\Sigma^{(p)}[\Delta\operatorname{am}(u+na)\sin\operatorname{am}u+\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+na)]$,

11. $\dfrac{\sin\operatorname{am}\frac{pa}{2}\cos\operatorname{am}\frac{pa}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{pa}{2}}.\Sigma^{(n)}[\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u+pa)+\sin\operatorname{am}(u+pa)\cos\operatorname{am}(u)]$

$=\dfrac{\sin\operatorname{am}\frac{na}{2}\cos\operatorname{am}\frac{na}{2}}{\Delta\operatorname{am}\frac{na}{2}}.\Sigma^{(p)}[\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u+na)+\sin\operatorname{am}(u+na)\cos\operatorname{am}(u)]$.

Casu speciali, quo $\sin\operatorname{am}(na)$ neque simul $\sin\operatorname{am}(pa)$ evanescit, e (9.—11.) sequuntur formulae memorabiles:

12. $\Sigma^{(n)}[\cos\operatorname{am}(u)\,\Delta\operatorname{am}(u+pa)+\cos\operatorname{am}(u+pa)\,\Delta\operatorname{am}(u)]=0$,

13. $\Sigma^{(n)}[\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+pa)+\Delta\operatorname{am}(u+pa)\sin\operatorname{am}(u)]=0$,

14. $\Sigma^{(n)}[\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u+pa)+\sin\operatorname{am}(u+pa)\cos\operatorname{am}(u)]=0$.

Jam ope formularum (3.—5.), (12.—14.) formulas generales de functionum ellipticarum transformatione condimus.

Demonstratio nova formularum fundamentalium de transformatione functionum ellipticarum.

Consideremus expressiones

$R=\sin\operatorname{am}(u)+\sin\operatorname{am}(u+4w)+\sin\operatorname{am}(u+8w)+\dots+\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)w)$,

$S=\cos\operatorname{am}(u)+\cos\operatorname{am}(u+4w)+\cos\operatorname{am}(u+8w)+\dots+\cos\operatorname{am}(u+4(n-1)w)$,

$T=\Delta\operatorname{am}(u)+\Delta\operatorname{am}(n+4w)+\Delta\operatorname{am}(u+8w)+\dots+\Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)w)$,

in quibus n sit numerus impar, $w=\frac{mK+m'iK'}{n}$, uti supra atque in Fundamentis, ita ut posito $4w=a$, quoties $p<n$ aut certe p per n non divisibilis, $\sin\operatorname{am}(na)=0$ neque tamen simul $\sin\operatorname{am}(pa)=0$.

Ubi brevitatis causa designamus per $\Sigma F(u)$ summam

$$\Sigma F(u)=F(u)+F(u+4w)+\dots+F(u+4(n-1)w),$$

expressiones R, S, T brevius ita repraesentare licet:

$$R=\Sigma\sin\operatorname{am}(u),\quad S=\Sigma\cos\operatorname{am}(u),\quad T=\Sigma\Delta\operatorname{am}(u).$$

Quaeramus expressionum R, S, T quadrata et producta binarum.

Fit, uti ipsa multiplicatione instituta apparet:

$$\begin{aligned}RR=\Sigma\sin^2\operatorname{am}(u)&+\Sigma\sin\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+4w)\\&+\Sigma\sin\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+8w)\\&\dots\dots\dots\dots\\&+\Sigma\sin\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u+4(n-1)w),\end{aligned}$$

$$SS = \Sigma \cos^2 \mathrm{am}(u) + \Sigma \cos \mathrm{am}(u) \cos \mathrm{am}(u+4w)$$
$$+ \Sigma \cos \mathrm{am}(u) \cos \mathrm{am}(u+8w)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Sigma \cos \mathrm{am}(u) \cos \mathrm{am}(u+4(n-1)w),$$
$$TT = \Sigma\, \Delta^2 \mathrm{am}(u) + \Sigma\, \Delta\, \mathrm{am}(u)\, \Delta\, \mathrm{am}(u+4w)$$
$$+ \Sigma\, \Delta\, \mathrm{am}(u)\, \Delta\, \mathrm{am}(u+8w)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Sigma\, \Delta\, \mathrm{am}(u)\, \Delta\, \mathrm{am}(u+4(n-1)w).$$

Jam ex iis, quae supra proposuimus, apparet, expressiones huiusmodi:

$$\Sigma \sin \mathrm{am}(u) \sin \mathrm{am}(u+4pw),$$
$$\Sigma \cos \mathrm{am}(u) \cos \mathrm{am}(u+4pw),$$
$$\Sigma\, \Delta\, \mathrm{am}(u)\, \Delta\, \mathrm{am}(u+4pw),$$

in quibus, uti in antecedentibus $p<n$, constantibus aequales esse, sive ab argumento u non pendere. Unde ponere licet:

$$15. \quad \begin{cases} RR = \Sigma \sin^2 \mathrm{am}(u) - 2\varrho, \\ SS = \Sigma \cos^2 \mathrm{am}(u) - 2\sigma, \\ TT = \Sigma\, \Delta^2\, \mathrm{am}(u) + 2\tau, \end{cases}$$

designantibus ϱ, σ, τ constantes, quarum valores e valoribus specialibus ipsius u peti possunt. Quem in finem adnoto formulas elementares

$$\sin \mathrm{am}\, 4(n-m)w = -\sin \mathrm{am}\,(4mw),$$
$$\cos \mathrm{am}(K+4(n-m)w) = -\cos \mathrm{am}(K+4mw),$$
$$\Delta\, \mathrm{am}(K+iK'+4(n-m)w) = -\Delta\, \mathrm{am}(K+iK'+4mw),$$

porro formulas

$$\sin \mathrm{am}\,(0) = \cos \mathrm{am}\,(K) = \Delta\, \mathrm{am}(K+iK') = 0,$$

e quibus patet, posito resp. $u=0$, $u=K$, $u=K+iK'$, expressiones R, S, T ideoque etiam RR, SS, TT evanescere. Hinc cum insuper sit

$$\Delta\, \mathrm{am}(K+iK'+u) = i\varkappa' \operatorname{tang} \mathrm{am}(u),$$

eruimus e (15.), posito resp. $u=0$, $u=K$, $u=K+iK'$:

$$\varrho = \sin^2 \mathrm{am}\, 4w + \sin^2 \mathrm{am}\, 8w + \ldots + \sin^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)w,$$
$$\sigma = \cos^2 \mathrm{coam}\, 4w + \cos^2 \mathrm{coam}\, 8w + \ldots + \cos^2 \mathrm{coam}\, 2(n-1)w,$$
$$\tau = k'k'[\operatorname{tang}^2 \mathrm{am}\, 4w + \operatorname{tang}^2 \mathrm{am}\, 8w + \ldots + \operatorname{tang}^2 \mathrm{am}\, 2(n-1)w].$$

Quantitates ϱ, σ, τ eaedem sunt, quas et in commentatione priore de funct. ellipt. eadem denotatione exhibuimus.

E formulis (15.) sequitur:

$$RR + SS = n - 2\varrho - 2\sigma,$$
$$\varkappa^2 RR + TT = n - 2\varkappa^2 \varrho + 2\tau,$$

unde ponere licet

$$R = \sqrt{(n-2\varrho-2\sigma)}\sin\psi,$$
$$S = \sqrt{(n-2\varrho-2\sigma)}\sin\psi,$$
$$T = \sqrt{(n-2k^2\varrho+2\tau)}\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa^2(n-2\varrho-2\sigma)}{n-2\varkappa^2\varrho+2\tau}\sin\psi^2\right)},$$

sive posito

$$\frac{\varkappa^2(n-2\varrho-2\sigma)}{n-2\varkappa^2\varrho+2\tau} = \lambda\lambda, \quad n-2\varkappa^2\varrho+2\tau = \frac{1}{MM},$$

fit

$$R = \frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\psi, \quad S = \frac{\lambda}{\varkappa M}\cos\psi, \quad T = \frac{1}{M}\sqrt{(1-\lambda\lambda\sin\psi^2)}.$$

Quaeramus iam producta binarum expressionum R, S, T. Instituta multiplicatione, invenitur:

$$\begin{aligned} ST = {} & \Sigma \cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u) \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+4w) + \cos\operatorname{am}(u+4w)\Delta\operatorname{am}(u)] \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+8w) + \cos\operatorname{am}(u+8w)\Delta\operatorname{am}(u)] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+4(n-1)w) + \cos\operatorname{am}(u+4(n-1)w)\Delta\operatorname{am}(u)]. \end{aligned}$$

Adiecimus factorem $\frac{1}{2}$, cum in summis, quibus adiectus est, unusquisque terminus bis occurrat. Jam vero e (12.), posito $a = 4w$, quoties, ut in antecedentibus, $p < n$, fit:

$$\Sigma[\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u+4pw) + \cos\operatorname{am}(u+4pw)\Delta\operatorname{am}(u)] = 0,$$

unde simpliciter:
$$ST = \Sigma\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u).$$

Eodem modo invenitur ope formularum (13., 14.):

$$TR = \Sigma\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u),$$
$$RS = \Sigma\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u).$$

Sequitur autem e formulis:

$$R = \Sigma\sin\operatorname{am}(u), \quad S = \Sigma\cos\operatorname{am}(u), \quad T = \Sigma\Delta\operatorname{am}(u),$$

instituta differentiatione:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \Sigma\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u) = ST,$$
$$\frac{\partial S}{\partial u} = -\Sigma\Delta\operatorname{am}(u)\sin\operatorname{am}(u) = -TR,$$
$$\frac{\partial T}{\partial u} = -\varkappa^2\Sigma\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u) = -\varkappa^2 RS,$$

unde cum ex antecedentibus sit:

$$R = \frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\psi, \quad S = \frac{\lambda}{\varkappa M}\cos\psi, \quad T = \frac{1}{M}\sqrt{(1-\lambda\lambda\sin\psi^2)},$$

fit:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{1}{M}\sqrt{(1-\lambda\lambda\sin\psi^2)}, \quad \text{sive} \quad \frac{\partial u}{M} = \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-\lambda\lambda\sin\psi^2)}},$$

unde cum ψ et u simul evanescant:

$$\psi = \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right).$$

Nacti igitur sumus valores ipsarum R, S, T:

$$R = \frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

$$S = \frac{\lambda}{\varkappa M} \cos \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

$$T = \frac{1}{M} \Delta \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

sive quod idem est:

$$\frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sin \mathrm{am}(u) + \sin \mathrm{am}(u+4w) + \dots + \sin \mathrm{am}(u+4(n-1)w),$$

$$\frac{\lambda}{\varkappa M} \cos \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \cos \mathrm{am}(u) + \cos \mathrm{am}(u+4w) + \dots + \cos \mathrm{am}(u+4(n-1)w),$$

$$\frac{1}{M} \Delta \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \Delta \mathrm{am}(u) + \Delta \mathrm{am}(u+4w) + \dots + \Delta \mathrm{am}(u+4(n-1)w).$$

Quae sunt formulae de functionum ellipticarum transformatione fundamentales.

30.

Auflösung der Aufgaben 1. und 2. des Herrn Steiner im zweiten Bande dieses Journals S. 96.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

1\. **Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn A, B, C ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte AB, BC ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.**

Es sei der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Kreise der Anfangspunct der Coordinaten. Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunctes des ersten Kreises a, b, und dessen Halbmesser r; des zweiten a', b', r'; und des dritten a'', b'', r''. Man hat also:

$$aa + bb = rr,$$
$$a'a' + b'b' = r'r',$$
$$a''a'' + b''b'' = r''r''.$$

Zieht man nun durch den Anfangspunct der Coordinaten eine Linie, die mit der Axe der x den Winkel θ macht, und ist die Entfernung des Durchschnittes derselben A mit dem ersten Kreise von dem Anfangspuncte der Coordinaten z; die Entfernung des Durchschnitts B mit dem zweiten Kreise z'; und die Entfernung des Durchschnitts C mit dem dritten Kreise z''; so hat man ebenfalls:

$$(a - x\cos\theta)^2 + (b - x\sin\theta)^2 = rr,$$
$$(a' - x'\cos\theta)^2 + (b' - x'\sin\theta)^2 = r'r',$$
$$(a'' - x''\cos\theta)^2 + (b'' - x''\sin\theta)^2 = r''r''.$$

Subtrahirt man von jeder dieser drei Gleichungen die entsprechende der obigen, so ergiebt sich:

$$x = 2(a\cos\theta + b\sin\theta),$$
$$x' = 2(a'\cos\theta + b'\sin\theta),$$
$$x'' = 2(a''\cos\theta + b''\sin\theta),$$

mithin:

$$x' - x = AB = 2\{(a' - a)\cos\theta + (b' - b)\sin\theta\},$$
$$x'' - x' = BC = 2\{(a'' - a')\cos\theta + (b'' - b)\sin\theta\}.$$

Ist also $AB = \mp k\,BC$, je nachdem C und A auf entgegengesetzten oder auf derselben Seite von B liegen, so hat man:

$$0 = \{(a'-a) \pm k(a''-a')\}\cos\theta + \{(b'-b) \pm k(b''-b')\}\sin\theta,$$

folglich:

$$-\operatorname{tang}\theta = \frac{a'-a \pm k(a''-a')}{b'-a \pm k(b''-b')}.$$

Zieht man nun durch die Mittelpuncte des zweiten und dritten Kreises eine unbestimmte gerade Linie, und bestimmt auf derselben vom Mittelpuncte des zweiten Kreises aus nach beiden Seiten einen Punct in einer Entfernung, die sich zu der Entfernung der Mittelpuncte der beiden Kreise wie $AB:BC$ verhält, und legt dann durch einen dieser Puncte und den Mittelpunct des ersten Kreises eine Gerade, so ist die Tangente des von derselben mit der Axe der x gebildeten Winkels:

$$\frac{b'-b \pm k(b''-b')}{a'-a \pm k(a''-a')} = \operatorname{tang}(90+\theta),$$

je nachdem der bestimmte Punct um den Mittelpunct des dritten Kreises auf derselben, oder auf entgegengesetzter Seite vom Mittelpuncte des zweiten Kreises liegt.

Es ist also die gesuchte Gerade, die auf die oben bestimmte aus dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der drei Kreise gefällte Gerade.

2. Wenn im Raume vier beliebige Kugeln einander in einem Puncte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dafs wenn aufserdem A, B, C, D die Puncte sind, in welchen sie den Kugelflächen aufserdem begegnet, ihre Abschnitte AB, BC, CD gegebene Verhältnisse zu einander haben.

Es sei der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der vier Kugeln der Anfangspunct der Coordinaten, und die rechtwinkligen Coordinaten der Mittelpuncte und die Halbmesser derselben resp.

$$\begin{array}{llll} a, & b, & c, & r, \\ a', & b', & c', & r', \\ a'', & b'', & c'', & r'', \\ a''', & b''', & c''', & r''', \end{array}$$

so dafs also:

$$\begin{aligned} aa + bb + cc &= rr, \\ a'a' + b'b' + c'c' &= r'r', \\ a''a'' + b''b'' + c''c'' &= r''r'', \\ a'''a''' + b'''b''' + c'''c''' &= r'''r'''. \end{aligned}$$

Sei ferner eine gerade Linie durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegt, dessen Winkel mit der Axe der z, φ ist, und dessen Projection auf die Ebene der x und y mit der Axe der x den Winkel η bildet, so ist, wenn u, u', u'', u''', die resp. Entfernungen der übrigen Durchschnitte A, B, C, D dieser Linie mit den vier Kugeln sind:

$$(a - u \sin\varphi\cos\eta)^2 + (b - u \sin\varphi\sin\eta)^2 + (c - u \cos\varphi)^2 = r\,r,$$
$$(a' - u' \sin\varphi\cos\eta)^2 + (b' - u' \sin\varphi\sin\eta)^2 + (c' - u' \cos\varphi)^2 = r'\,r',$$
$$(a'' - u'' \sin\varphi\cos\eta)^2 + (b'' - u'' \sin\varphi\sin\eta)^2 + (c'' - u'' \cos\varphi)^2 = r''\,r'',$$
$$(a''' - u''' \sin\varphi\cos\eta)^2 + (b''' - u''' \sin\varphi\sin\eta)^2 + (c''' - u''' \cos\varphi)^2 = r'''\,r'''.$$

Subtrahirt man von jeder dieser Gleichungen die entsprechende der obigen, so folgt:

$$u = 2(a \sin\varphi\cos\eta + b \sin\varphi\sin\eta + c \cos\varphi),$$
$$u' = 2(a' \sin\varphi\cos\eta + b' \sin\varphi\sin\eta + c' \cos\varphi),$$
$$u'' = 2(a'' \sin\varphi\cos\eta + b'' \sin\varphi\sin\eta + c'' \cos\varphi),$$
$$u''' = 2(a''' \sin\varphi\cos\eta + b''' \sin\varphi\sin\eta + c''' \cos\varphi);$$

mithin:

$$u' - u = BC = 2\{(a' - a)\sin\varphi\cos\eta + (b' - b)\sin\varphi\sin\eta + (c' - c)\cos\varphi\},$$
$$u'' - u' = CD = 2\{(a'' - a')\sin\varphi\cos\eta + (b'' - b')\sin\varphi\sin\eta + (c'' - c')\cos\varphi\},$$
$$u''' - u'' = AB = 2\{(a''' - a'')\sin\varphi\cos\eta + (b''' - b'')\sin\varphi\sin\eta + (c''' - c'')\cos\varphi\}.$$

Ist also $AB = \mp k.BC$, $CD = \mp k'.BC$, je nachdem C und A von B aus, oder B und D von C aus, auf entgegengesetzten oder auf denselben Seiten liegen, so hat man:

$$0 = \{(a' - a) \pm k(a'' - a')\}\sin\varphi\cos\eta + \{(b' - b) \pm k(b'' - b')\}\sin\varphi\sin\eta$$
$$+ \{(c' - c) \pm k(c'' - c')\}\cos\varphi,$$
$$0 = \{(a''' - a'') \pm k'(a'' - a')\}\sin\varphi\cos\eta + \{(b''' - b'') \pm k'(b'' - b')\}\sin\varphi\sin\eta$$
$$+ \{(c''' - c'') \pm k'(c'' - c')\}\cos\varphi,$$

woraus sich die Winkel φ und η leicht bestimmen lassen.

Man ziehe nun durch den Mittelpunct der zweiten und dritten Kugel, eben so wie in der Aufgabe 1., eine unbestimmte Gerade, und bestimme einen Punct, dessen Entfernung von dem Mittelpunct der zweiten Kugel (in der Richtung nach dem Mittelpuncte der dritten, oder in entgegengesetzter genommen) sich zu der Entfernung der Mittelpuncte der beiden Kugeln wie $AB:BC$ verhält. Nach diesem Puncte ziehe man vom Mittelpuncte der ersten Kugel eine gerade Linie, deren Winkel mit den drei Coordinaten-Axen resp. μ, μ', μ'' seien. Ist nun V die Länge derselben, so sind offenbar die Projectionen auf die drei Axen:

$$V.\cos\mu = a' - a \pm k(a'' - a'),$$
$$V.\cos\mu' = b' - b \pm k(b'' - b'),$$
$$V.\cos\mu'' = c' - c \pm k(c'' - c').$$

Bestimmt man nun noch auf der durch die Mittelpuncte der zweiten und dritten Kugel gezogenen Geraden einen Punct, dessen Entfernung vom Mittelpuncte der zweiten Kugel (in entgegengesetzter oder in der Richtung des Mittelpuncts der dritten Kugel) sich zu der Entfernung der beiden Mittelpuncte, wie $CD:BC$ verhält, und zieht man von diesem Puncte nach dem Mittelpuncte der vierten Kugel eine Gerade V', die mit den drei Coordinaten-Axen die Winkel ν, ν', ν'' resp. bilden: so sind die drei Projectionen:

$$V'\cos\nu = \pm k'(a'' - a') + a''' - a'',$$
$$V'\cos\nu' = \pm k'(b'' - b') + b''' - b'',$$
$$V'\cos\nu'' = \pm k'(c'' - c') + c''' - c''.$$

Sind nun die Winkel der gesuchten Geraden mit den drei Axen ξ, ξ', ξ'', so sind:

$$\cos\xi = \sin\phi\sin\eta,$$
$$\cos\xi' = \sin\phi\sin\eta,$$
$$\cos\xi'' = \cos\phi.$$

Substituirt man in die obigen zwei Gleichungen zur Bestimmung von ϕ und η die eben gefundenen Werthe, so verwandeln sie sich in:

$$\cos\xi\cos\mu + \cos\xi'\cos\mu' + \cos\xi''\cos\mu'' = 0,$$
$$\cos\xi\cos\nu + \cos\xi'\cos\nu' + \cos\xi''\cos\nu'' = 0;$$

folglich steht die gesuchte Gerade auf einer mit den Linien V und V' parallel gelegten Ebene senkrecht. (Siehe Gaufs *Disquisit. generales circa sup. curvas.*)

31.

Über den Stillstand eines Planeten oder Cometen in seiner scheinbaren aus einem andern beobachteten Bahn.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. In den astronomischen Lehrbüchern wird gewöhnlich nur von dem geocentrischen Stillstand der Planeten, und zwar blofs in der Länge, gehandelt, indem man, wegen der geringen Neigung der Bahnen derselben, auf Bewegung in der Breite keine Rücksicht nimmt. Da nun also eine Bedingung erfüllt werden mufs, so kann man im Allgemeinen einen Punct in der einen Bahn willkürlich annehmen und den Punct in der andern angeben, wo der Planet oder die Erde sich befinden mufs, wenn ein Stillstand stattfinden soll. Fast in allen diesen Fällen ist aber noch immer, wie Delambre bemerkt, die Bewegung in der Breite merklich, indem der Planet nahe einen kleinen Halbkreis beschreibt, dessen Halbmesser, und die kleinste Geschwindigkeit des Körpers in demselben, insbesondere bei den kleinen Planeten, oft bedeutend sind; in einem noch höhern Grade ist dies bei den Cometen der Fall, die Curven von den verschiedensten Krümmungen über das ganze Himmelsgewölbe beschreiben.

Betrachtet man nun den Fall, der bei diesen Körpern blofs von Interesse ist, wo die geocentrische Bewegung derselben gänzlich verschwindet, so sind zwei Bedingungen, wodurch also der Punct in beiden Bahnen, in denen dieses stattfindet, völlig bestimmt sind.

Es seien die rechtwinkligen Coordinaten des Körpers M auf willkürliche Axen bezogen, x, y, z; des Körpers M', x', y', z'; β der Winkel der von M nach M' gezogenen Geraden Δ mit der Axe der x, y; und α der Winkel zwischen der Projection dieser Linie auf die genannte Ebene und der Axe der x, so hat man:

$$\begin{aligned}\Delta\cos\beta\cos\lambda &= x'-x,\\ \Delta\cos\beta\sin\lambda &= y'-y,\\ \Delta\sin\beta &= z'-z,\end{aligned}$$

Die Bedingungen des scheinbaren Stillstandes des einen Körpers aus dem andern gesehen sind nun: $\partial\beta=0$, $\partial\alpha=0$; folglich wenn man von den

drei Gleichungen die logarithmischen Differentiale nimmt:

$$1.\quad \frac{\partial\Delta}{\Delta}=\frac{\partial x'-\partial x}{x'-x},\quad \frac{\partial\Delta}{\Delta}=\frac{\partial y'-\partial y}{y'-y},\quad \frac{\partial\Delta}{\Delta}=\frac{\partial z'-\partial z}{z'-z};$$

subtrahirt man je zwei dieser Gleichungen von einander, so findet man:

$$2.\quad \begin{cases} x\partial y-y\partial x+x'\partial y'-y'\partial x' = x'\partial y-y'\partial x+x\partial y'-y\partial x', \\ y\partial z-z\partial y+y'\partial z'-z'\partial y' = y'\partial z-z'\partial y+y\partial z'-z\partial y', \\ z\partial x-x\partial z+z'\partial x'-x'\partial z' = z'\partial x-x'\partial z+z\partial x'-x\partial z'. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten blofs für zwei verschiedene, indem sich jede derselben aus den beiden andern ableiten läfst. Es sind aber $x\partial y-y\partial x$, $y\partial z-z\partial y$, $z\partial x-x\partial z$ die resp. Projectionen des doppelten vom Radius vector des Körpers M in den Zeittheilchen ∂t beschriebenen Elements $k.\sqrt{p}.\partial t$ auf die Ebenen der x, y; der y, z; und der z, x; wo p der halbe Parameter der Bahn und k die bekannte Gaufsische Constante bedeuten. Sind also i, g, h die resp. Neigungen der Bahn gegen diese Ebenen, so hat man:

$$3.\quad \begin{cases} x\partial y-y\partial x = k\sqrt{p}\cos i\,\partial t, \\ y\partial z-z\partial y = k\sqrt{p}\cos g\,\partial t, \\ z\partial x-x\partial z = k\sqrt{p}\cos h\,\partial t, \end{cases}$$

Und eben so, wenn p' der halbe Parameter der Bahn von M', und i', g', h' die resp. Neigungen derselben gegen die eben genannten drei Ebenen bedeuten:

$$4.\quad \begin{cases} x'\partial y'-y'\partial x' = k\sqrt{p'}\cos i'.\partial t, \\ y'\partial z'-z'\partial y' = k\sqrt{p'}\cos g'.\partial t, \\ z'\partial x'-x'\partial z' = k\sqrt{p'}\cos h'.\partial t. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2.) verwandeln sich durch Substitution dieser Ausdrücke in:

$$5.\quad \begin{cases} [\sqrt{p}\cos i+\sqrt{p'}\cos i']\,k\,\partial t = x'\partial y-y'\partial x+x\partial y'-y\partial x', \\ [\sqrt{p}\cos g+\sqrt{p'}\cos g']\,k\,\partial t = y'\partial z-z'\partial y+y\partial z'-z\partial y', \\ [\sqrt{p}\cos h+\sqrt{p'}\cos h']\,k\,\partial t = z'\partial x-x'\partial z+z\partial x'-x\partial z'. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit z, x, y resp. und dann mit $\partial z, \partial x, \partial y$, addirt jedesmal die drei Producte, berücksichtigt die Gleichungen (3. und 4.) und dafs

$$z\cos i+x\cos g+y\cos h=0,$$
$$\partial z\cos i+\partial x\cos g+\partial y\cos h=0,$$

so erhält man:

$$6.\quad \begin{cases} \sqrt{p'}[\,z\cos i'+x\cos g'+y\cos h']+\sqrt{p}[\,z'\cos i+x'\cos g+y'\cos h]=0, \\ \sqrt{p'}[\partial z\cos i'+\partial x\cos g'+\partial y\cos h']+\sqrt{p}[\partial z'\cos i+\partial x'\cos g+\partial y'\cos h]=0. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun durch ζ den senkrechten Abstand von M von der Bahn von M', und durch ζ' den senkrechten Abstand von M' von der Bahn M, so hat man

$$\zeta = z\cos i' + x\cos g + y\cos h',$$
$$\zeta' = z'\cos i + x'\cos g + y'\cos h.$$

Die Bedingungsgleichungen verwandeln sich dadurch in die höchst einfachen Formeln:

$$7. \quad \frac{\zeta}{\sqrt{p}} + \frac{\zeta'}{\sqrt{p'}} = 0; \quad \frac{\partial\zeta}{\sqrt{p}} + \frac{\partial\zeta'}{\sqrt{p'}} = 0.$$

2. Um diese Gröfsen durch die Elemente der Bahnen auszudrücken, sei p der halbe Parameter der Bahn von M, e die Excentricität, φ die wahre Anomalie, und r der Radius vector; für den Körper M' werden die entsprechenden Gröfsen durch einen Accent bezeichnet. Ferner sei die Neigung der Bahn von M' gegen die von M, i, der Winkel zwischen dem Perihel von N und dem Durchschnitt der beiden Bahnen η; der Winkel zwischen dem Durchschnitt und dem Perihel von M', ϖ, so ist:

$$\zeta = r\sin(\eta - \varphi)\sin i; \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$
$$\zeta' = r'\sin(\varpi + \varphi')\sin i; \quad r' = \frac{p'}{1 + e'\cos\varphi'},$$

und da $\dfrac{\partial(r\cos\varphi)}{k\partial t} = -\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}$; $\dfrac{\partial(r\sin\varphi)}{k\partial t} = \dfrac{\cos\varphi + e}{\sqrt{p}}$; so wird:

$$\frac{\partial\zeta}{\sin i\, k\partial t} = -\frac{\cos(\varphi - \eta) + e\cos\eta}{\sqrt{p}}; \quad \frac{\partial\zeta'}{\sin i\, k\partial t} = \frac{\cos(\varphi' + \varpi) + e'\cos\varpi}{\sqrt{p'}}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke verwandeln sich die Gleichungen (7.) in:

$$8. \quad \frac{\sin(\varphi - \eta)\sqrt{p}}{1 + e\cos\varphi} = \frac{\sin(\varphi' + \varpi)\sqrt{p'}}{1 + e'\cos\varphi'}; \quad \frac{\cos(\varphi - \eta) + e\cos\eta}{p} = \frac{\cos(\varphi' + \varpi) + e'\cos\varpi}{p'}.$$

Obgleich diese Gleichungen sehr einfach sind, so ist ihre directe Auflösung doch nicht möglich, da die Elimination von einer der unbekannten auf eine Gleichung vom achten Grade der andern führt. Die sich von selbst darbietende indirecte Auflösungsart führt aber sehr schnell zum Ziele.

Es ist bemerkenswerth, dafs die Neigung der beiden Bahnen gegen einander aus den Formeln verschwindet.

3. Man kann auch die Gleichungen (8.) auf eine andere Art herleiten, die ich noch hinzufüge. Zieht man die Linien, die die beiden Himmelskörper in zweien aufeinander folgenden Zeitmomenten verbinden, so sind diese in dem scheinbaren Stillstandspuncte miteinander parallel. Die

vier Endpuncte derselben liegen also in einer Ebene, mithin auch die Tangenten an den Bahnen in diesen Puncten. Diese schneiden sich daher in einem Puncte, der in dem Durchschnitte beider Ebenen liegt. Dieses ist eine Bedingung des Stillstandes. Da ferner die beiden obigen Linien parallel sind, und beide zwei andere Linien in einer Ebene schneiden, so müssen die von ihnen abgeschnittenen Stücke, oder die Bewegung der Körper im Zeittheilchen ∂t, den beiden Stücken der Tangenten zwischen ihrem Durchschnitte und den Puncten in der Bahn, wo sie tangiren, proportionirt sein. Dieses ist die andere Bedingung.

Es seien nun die wahren Anomalien der beiden Körper φ und φ'; die Radii vectoren r, r'; die halben Parameter der Bahnen p und p'; und ihre Excentricitäten e und e'; ferner die Entfernungen der Perihelien von derselben Knotenlinie ϖ und ϖ'.

Nun ist allgemein in jedem Kegelschnitt, wenn man die rechtwinkligen Coordinaten auf den Hauptaxen nimmt:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi};$$

$$\frac{\partial x}{k\,\partial t} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{p}}; \quad \frac{\partial y}{k\,\partial t} = \frac{\cos\varphi + e}{\sqrt{p}}; \quad \frac{\partial r}{k\,\partial t} = \frac{e\sin\varphi}{\sqrt{p}};$$

und wenn θ der Winkel der Tangente mit der Abscissenlinie, und ∂s das von dem Körper im Zeittheilchen ∂t beschriebene Element ist:

$$\frac{\partial x}{k\,\partial t} = \frac{\partial s}{k\,\partial t}\cos\theta; \quad \frac{\partial y}{k\,\partial t} = \frac{\partial s}{k\,\partial t}\sin\theta;$$

folglich

$$\frac{\sqrt{p}\,.\,\partial s}{k\,\partial t}\cos\theta = -\sin\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{p}\,.\,\partial s}{k\,\partial t}\sin\theta = \cos\varphi + e;$$

und wenn N ein beliebiger Winkel ist:

$$\frac{\sqrt{p}\,.\,\partial s}{k\,\partial t}\sin(\theta + N) = \cos(\varphi + N) + e\cos N.$$

Die erste Bedingung ist nun, daſs die beiden Dreiecke, deren zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel r, das Stück der Tangente bis zum Durchschnittspuncte der Tangenten beider Bahnen und $\theta - \varphi$ in dem einen Körper, und r', das abgeschnittene Stück der andern Tangente und $\theta' - \varphi'$ sind, miteinander eine gemeinschaftliche Seite A, die zwischen dem Brennpuncte der Bahnen und dem Durchschnitte beider Tangenten gezogene Grade habe; und daſs die an r und r' liegenden Winkel $\varpi + \varphi$ und

$\varpi' + \varphi'$, und mithin die r und r' gegenüberliegenden $180 - (\varpi + \theta)$, $180 - (\varpi' + \theta')$ sind. Es muſs demnach sein:

$$\frac{\sin(\theta - \varphi)}{A} = \frac{\sin(\theta + \varpi)}{r} \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin(\theta' - \varphi')}{A} = \frac{\sin(\theta' + \varpi')}{r'};$$

oder

$$\frac{\sin(\theta + \varpi)}{r \sin(\theta - \varphi)} = \frac{\sin(\theta' + \varpi')}{r' \sin \theta' - \varphi')};$$

welche Formel sich nach der Substitution der obigen Gleichung für $\sin(\theta + N)$, wenn man für N nach und nach ϖ, $-\varphi$ setzt, in folgende verwandelt:

$$\frac{\cos(\varphi + \varpi) + e \cos \varpi}{p} = \frac{\cos(\varphi' + \varpi') + e' \cos \varpi'}{p'},$$

welche mit der zweiten der Gleichungen (8.) identisch ist.

Nennt man die beiden Stücke der Tangenten bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte T und T', so ist die zweite Bedingung $\frac{\partial s}{\partial s'} = \frac{T}{T'}$; nun ist aber:

$$\frac{\sin(\varphi + \varpi)}{T} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{A},$$

$$\frac{\sin(\varphi' + \varpi')}{T'} = \frac{\sin(\theta' - \varphi')}{A};$$

folglich

$$\frac{T}{T'} = \frac{\sin(\varphi + \varpi)}{\sin(\varphi' + \varpi')} \cdot \frac{\sin(\theta' - \varphi')}{\sin(\theta - \varphi)} = \frac{\partial s}{\partial s'},$$

oder

$$\sin(\varphi + \varpi) \sin(\theta' - \varphi') \partial s' = \sin(\varphi' + \varpi') \sin(\theta - \varphi) \partial s,$$

oder endlich:

$$\frac{\sin(\varphi + \varpi) \sqrt{p}}{1 + e \cos \varphi} = \frac{\sin(\varphi' + \varpi') \sqrt{p'}}{1 + e \cos \varphi'},$$

welche mit der ersten der Gleichungen (8.) übereinkommt.

4. Als Beispiel wählte ich den interessanten Enkeschen Cometen. Da ich aber den Stillstandspunct bei etwa 160^0 und 190^0 Anomalie fand, wo er für uns unsichtbar ist, so setze ich die Rechnung nicht her.

Als zweites Beispiel nahm ich den Cometen von Biela, wie er 1826 sich bewegte. Unter Annahme $\log e'$ 9,8730702 habe ich für die Bahn desselben gefunden: ϖ $218^0\,22'\,32''$, Länge des aufsteigenden Knotens $251^0\,25'\,3''$, Neigung $13^0\,33'\,52''$. $\log p'$ 0,1977012. Für die Erde ist $\log e = 8{,}2248126$; $\log p = 9{,}9998779$; $-\eta = 208^0\,31'\,58''$. Demnach

wird die zweite der Gleichungen (8.)

$$\cos(\varphi + 208^0\, 31'\, 58'')$$
$$= \text{Num. log } 9{,}8021767 \cos(\varphi' + 218^0\, 22'\, 32'')\ \text{Num. log } 9{,}5519367.$$

Durch Zuziehung der ersten Gleichung (8.) findet man einen Stillstandspunct zwischen 150^0 und 180^0 wahrer Anomalie, den ich der zu großen Entfernung wegen übergehe. Ein zweiter ergiebt sich für $\varphi' = -57^0\, 6'\, 5''$; $\varphi = -45^0\, 24'\, 15''$, wo die geocentrische Länge $42^0\, 57'\, 10''$, Breite $32^0\, 27'\, 13''$ und Entfernung von der Erde 0,1574. In 4 Stunden ändert der geocentrische Ort sich nicht $5''$, wie ich durch unmittelbare Rechnung gefunden habe. Dieser Stillstandspunct erfordert, daß das Perihel auf den ersten oder zweiten Januar falle. Da dieses grade bei der Erscheinung desselben Cometen in 1805 der Fall ist, so habe ich mit den Elementen der damals von ihm beschriebenen Bahn den Stillstandspunct berechnet und gefunden:

$$\varphi' = -60^0\, 8'; \quad \varphi = -48^0\, 11'.$$

Danach hätte das Perihel am 31,0 December eintreffen sollen, welches aber in der That am 1,9 Januar, zwei Tage später, eingetreten ist. Die Beobachtungen des Cometen deuten an, daß er wirklich wenige Tage vor seiner Entdeckung, ungeachtet der großen Nähe bei der Frde, eine äußerst langsame Bewegung gehabt habe.

München, den 9. Sept. 1830.

32.

Bemerkungen zu der Abhandlung No. 26. im 6. Bande dieses Journals (Heft 3. S. 303.), den Ausdruck des körperlichen Inhalts der Pyramide betreffend.

In einem gelegentlichen Briefe an den Herausgeber bemerkt der Herr Professor Möbius zu Leipzig: dem an dem angeführten Orte gegebenen Beweise des Satzes, dafs die Pyramide der dritte Theil eines Prisma sei, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, scheine, ungeachtet des darin an den Tag gelegten Scharfsinns, doch nicht vorzügliche Einfachheit eigenthümlich zu sein. Der Euclidische, und noch mehr der Legendrische Beweis des Satzes sei einfacher. Auch den Begriff des Unendlichen hätten Euclides und Legendre schon vermieden, und der gegenwärtige Beweis sei eben sowohl indirect, als die Beweise der beiden genannten Geometer. Auch hier werde die Gleichheit nur dadurch bewiesen, dafs die Unmöglichkeit der Ungleichheit dargethan werde. Der Beweis endlich, der gleich zu Anfange des Aufsatzes von dem Satze gegeben werde: dafs symmetrische Tetraëder gleichen Inhalt haben, stehe ganz so in der 5ten Ausgabe der Legendrischen Geometrie, in der in dem Aufsatze selbst erwähnten 7ten Note. Dafs der Verfasser des Aufsatzes diesen Beweis von Neuen darstelle, und gleichwohl auf die 7te Note in der neuen Ausgabe der Geometrie von Legendre verweise, lasse sich also nur dadurch erklären, dafs er von den neuen Ausgaben die 5te, vom Jahre 1804, nicht zu Gesicht bekommen haben müsse.

Dem Herausgeber hat der neue Beweis des ersten Satzes, wenn auch nicht einfacher als der Euclidische und Legendrische, so doch sinnreich und eigenthümlich geschienen; und deshalb ist der Aufsatz in dem Journale abgedruckt worden. Zu dem Umstande, dafs der Beweis von der Gleichheit der Gröfse symmetrischer Tetraëder schon bei Legendre vorkommt, bemerkt der Herausgeber, dafs sich dieser Beweis in einer neueren Ausgabe von Legendre's Geometrie, namentlich in der 11ten vom Jahre 1817, (der nemlichen, von welcher der Herausgeber im Jahre

1822 eine Deutsche Übersetzung geliefert hat) in der 7ten Note nicht findet, so daſs also der Herr Verfasser des Aufsatzes auch diese neuere Ausgabe vor Augen gehabt haben kann.

Übrigens scheint es dem Herausgeber, der Satz: daſs der Inhalt einer Pyramide der dritte Theil des Inhalts eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe sei, könne noch elementarer auf folgende Art bewiesen werden.

Zuerst kann bekanntlich leicht gezeigt werden, daſs sich ein beliebiges Prisma mit dreiseitiger Grundfläche, es sei senkrecht oder schief, in drei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe theilen lasse. Es kommt also nur darauf an, zu zeigen, daſs Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe gleich groſs sind; denn alsdann folgt unmittelbar, daſs ein Prisma dreimal so groſs ist als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Man theile die senkrechte Höhe zweier Pyramiden, von gleicher Grundfläche und Höhe, in eine beliebige Zahl gleicher Theile und lege durch die Theilungs-Puncte Ebenen mit der Grundfläche parallel, also wagerecht. Durch den Durchschnitt dieser Ebenen mit den Seiten-Ebenen der Pyramiden lege man, perpendiculair auf jene, senkrechte Ebenen, und verlängere sie jedesmal bis zu der nächsten wagerechten Ebene ober- und unterhalb, so daſs prismenförmige Schichten entstehen, die sowohl die Pyramiden umschlieſsen, als von ihnen umschlossen werden. Von diesen Schichten haben in beiden Pyramiden jedesmal die, welche in gleicher Höhe liegen, wie leicht zu zeigen, gleich groſse Grundflächen; also sind sie, weil sie gleich hoch sind, von einer zur andern Pyramide, gleich groſs. Es ist also auch die Gesammtheit, der umschlieſsenden Prismen sowohl, als der umschlossenen, in beiden Pyramiden gleich groſs. Nun ist auch jede umschlossene Schicht so groſs, als die unmittelbar darüber liegende umschlieſsende: folglich ist die Gesammtheit der umschlossenen Schichten so groſs als die Gesammtheit der umschlieſsenden, letztere nach Abzug der einzigen untersten, umschlieſsenden Schicht genommen. Der Unterschied des Inhalts der umschlieſsenden und der umschlossenen Schichten ist also dem Inhalte der untersten, umschlieſsenden Schicht gleich. Es ist aber der Inhalt der Pyramide kleiner als der Inhalt der Gesammtheit der sie umschlieſsenden, und gröſser als die Gesammtheit der von ihr umschlossenen Schichten. Also ist der Unterschied zwischen dem

Inhalt der Pyramide und der Summe der sie umschliefsenden oder der von ihr umschlossenen Schichten, nothwendig kleiner als der Unterschied der Gesammtheit der umschliefsenden und der umschlossenen Schichten selbst; folglich kleiner als der Inhalt der einen, untersten, umschliefsenden Schicht. Der Inhalt der Gesammtheit der umschliefsenden und der umschlossenen Schichten ist aber in beiden Pyramiden gleich grofs; also können die beiden Pyramiden selbst, äufsersten Falls, um nicht mehr verschieden sein, als um den Inhalt der untersten umschliefsenden Schicht. Nun kann aber die Höhe der Pyramiden in so viele gleiche Theile getheilt werden, als man will, und folglich kann die unterste Schicht so niedrig, und mithin so klein angenommen werden, als man will. Es folgt also, dafs der Unterschied des Inhalts zweier Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe kleiner ist als die kleinste Gröfse, die man annehmen will: mithin sind die Pyramiden nothwendig gleich grofs.

Dieser Beweis beruht auf einer Art von Annäherung; aber Ähnliches findet auch bei jedem andern Statt. Dagegen vermeidet er das Unendlich-Kleine und die Summirung von Reihen, und ist völlig anschaulich und elementar. Er scheint daher besonders für den Elementar-Unterricht passend. Es ist der nemliche, der sich in dem Lehrbuche der Geometrie des Herausgebers, Berlin 1826 — 27, bei Reimer, im zweiten Theile, §. 587. S. 726. findet, und der Herausgeber glaubt seiner hier haben erwähnen zu dürfen, da dieses Buch, obgleich es keine Nachbildung anderer, sondern ganz aus eigenem, längeren Nachdenken über die Wissenschaft hervorgegangen ist, bis jetzt ziemlich übersehen wurde.

33.
Einige Nachrichten von Büchern.

Anfangsgründe der höheren Mechanik, nach der antiken, reingeometrischen Methode bearbeitet von Dr. Lehmann.

Ankündigung. Unter diesem Titel wird im Anfange des künftigen Jahres eine Schrift erscheinen, welche in der Methode und Tendenz von den meisten bisherigen Werken ähnlichen Inhalts abweicht. Die Bearbeitung der Mechanik, im weitesten Umfange des Worts, wonach man darunter die vollständige Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper versteht, begann schon im Alterthum zu der Zeit, als kaum erst die Elemente der reinen Geometrie in ein System gebracht waren; die Verdienste des Archimedes in dieser Hinsicht, welcher in seinen Büchern vom Schwerpunct und von schwimmenden Körpern die Gleichgewichts-Theorie schon bis zu einem bedeutenden Grade der Ausbildung brachte, werden, so lange die Welt steht, in gefeiertem Andenken bleiben. So wie nun die ganze Mathematik der Alten reine Geometrie war (man wolle hier bei dem Ausdruck reine Geometrie mehr an die Methode als den Stoff der Untersuchungen denken), so wurde natürlich auch die Mechanik von ihnen rein geometrisch bearbeitet; insofern ist der Versuch, welchen ich in dem obgenannten Werke dem Publikum vorzulegen gesonnen bin, nicht neu, sondern uralt; aber ich habe bei der Ausarbeitung mich bestrebt, unbeschadet der Methode, weiter als die Alten zu gehen. Dafs die Griechischen Geometer bei der Bearbeitung der Statik und Mechanik eine gewisse Grenze nicht überschreiten konnten, lag wohl nicht in der Unbequemlichkeit der alten mathematischen Methode (hoffentlich werden die Leser des angekündigten Werks vom Gegentheil überzeugt werden); eher möchte der Grund in den weitumfassenden geschichtlichen Erscheinungen zu finden sein, in der gänzlichen Vernichtung des mathematischen Studiums, so wie aller Zweige des edleren menschlichen Denkens, durch die einreifsende Barbarei des Mittelalters, welcher schon vor dem Anfange der Völkerwanderung bedeutungsvolle Vorspiele vorhergingen. Wenigstens möchte sichs schwer beweisen lassen, dafs die Alten die Ausbildung der mechanischen Lehren irgendeinmal verlassen, und nachher doch noch fortgefahren hätten, die reine Geometrie auf eine höhere Stufe der Vollendung zu bringen. In der Dunkelheit des Mittelalters, wo auch die Araber nur Sammler waren, wurden in der Mathematik überhaupt, und also auch in der Mechanik, keine wesentlich neue Theorien entdeckt. Nach der Wiederherstellung der Wissenschaften dauerte die reingeometrische Behandlung aller mathematischen und also auch der mechanischen Lehren noch Jahrhunderte lang fort, bis durch Einführung des niederen und höheren Calculs eine unerschöpfliche Quelle von Entdeckungen für die Mechanik eröffnet wurde. Während die Engländer, bis auf Newton und Maclaurin herab, mitten in der Bearbeitung der schwierigsten Theorien die Vorliebe für die antike Methode noch immer lebhaft durchleuchten liefsen, entfernten sich die Franzosen, und nach ihrem Beispiel die Deutschen, immer mehr davon, und lösten zuletzt alles so sehr in Calcul auf, dafs in Werken wie Laplace's Mechanik des Himmels durch die gänzliche Abwesenheit aller geometrischen Zeichnungen die antike Methode den Todesstofs erhielt. Die von der Mitte des 17ten Jahrhunderts an auf einen lethargischen Schneckengang folgenden Riesenschritte in der Ausbildung der Mechanik haben bis auf die neuesten Zeiten die Ansicht begünstigt, dafs die reingeometrische Methode sich mit der weiteren Ausbildung der Wissenschaft nicht vereinigen lasse. Von der andern Seite ist aber die höhere Mechanik für Anfänger unzugänglicher geworden, weil die grofse Schwierigkeit im Abstracten des Calculs, im Gebrauch des Negativen, Ima-

ginären und Unendlichkleinen, nicht nur viele Köpfe abschreckt, sondern auch nach ihrer wahren Bedeutung gar nicht wit Worten deutlich gemacht werden kann *), und nur von auserwählten Geistern nach langem Kampfe, nach Durchbrechung der Schale, durch die angestrengteste Thätigkeit des inneren Anschauungsvermögens und durch Errathen, in vollendeter Klarheit aufgefafst und fortgebildet wird. Bei diesen Umständen mufs uns ein Mittel willkommen sein, die wichtigen Sätze der reinen und angewandten Bewegungslehre in absolut anschaulichen und handgreiflichen Schlüssen allen denjenigen zugänglich zu machen, welche überhaupt die Elemente der Mathematik aufzufassen fähig sind, und das ist kein andres als die Übertragung der antiken, reingeometrischen, streng synthetischen Methode auf die neueren Fortschritte der Wissenschaft, und namentlich auf die Mechanik. Meine im vorigen Jahre bei Kummer in Zerbst herausgegebenen mathematischen Abhandlungen sollten einen ersten Versuch abgeben, die Möglichkeit einer solchen Übertragung der antiken Methode auf die höhere Mathematik überhaupt zu zeigen. Was im Anhange des genannten Buchs sich speciell auf höhere Mechanik bezieht, erscheint in dem angekündigten Werke, welches übrigens auf die erwähnten mathematischen Abhandlungen keine Beziehung hat, sondern als ein Ganzes für sich verstanden werden kann, weiter ausgeführt, so dafs darin viele im ersteren Werke erregte Hoffnungen, welche zu Zweifeln Veranlassung geben konnten, realisirt sind. In diesem zuletzt bearbeiteten und im künftigen Jahre erscheinenden Werke, welches sich die strenge logische und geometrische Consequenz des Euclides zur Haupt-Aufgabe gemacht hat, war wegen des innern Zusammenhanges des Systems unvermeidlich, vieles, was nach Inhalt und Methode bereits bekannt und namentlich in Newtons *Principiis philosophiae naturalis mathematicis* und anderen älteren Werken auf ähnliche Weise dargestellt ist, mit aufzunehmen; doch kommen auch verschiedene von Newton noch nicht bearbeitete Theorien vor, welche sich, wie der Erfolg lehrt, leicht an die antike Methode anschmiegen, so unwahrscheinlich dies auch manchem auf den ersten Blick dünken möchte. So habe ich allen Grund zu vermuthen, dafs die in Euler's *Theoria motuum corporum solidorum seu rigidorum*, und später im Laplace und vielen anderen Werken arithmetisch und analytisch entwickelte Lehre von der drehenden Bewegung fester Körper, von den Haupt-Umdrehungs-Axen und den darauf bezüglichen periodischen Schwankungen sich selbst überlassener rotirender Körper, hier zum erstenmal reingeometrisch und synthetisch bearbeitet erscheint.

Um die Reinheit der geometrischen Methode zu erhalten, habe ich die Begriffe von Kraft, Geschwindigkeit, Masse, Moment u. s. w. ohne physicalische Beimischung, auf reinmathematischem Wege und so definirt, dafs der erklärte Begriff jedesmal als eine willkürliche Combination einfacherer reingeometrischer Begriffe erscheint, und nachher in Anmerkungen gezeigt, wie diese scheinbar willkürlich construirten Begriffe sich in der Natur wiederfinden; ich bin hierin dem Beispiele Lagrange's in seiner *Mécanique analytique* gefolgt, und habe mich, in der Erwägung, dafs wir nie dem innern Wesen der Naturkräfte auf den Grund kommen können, nicht entschliefsen können, den Ansichten derer beizutreten, welche sagen, dafs man in der theoretischen Mechanik, nach dem Beispiele von Newton, Laplace und andern, von dem physicalischen Begriffe der Kraft ausgehen müsse, welcher, zu Anfang des Systems hingestellt, doch immer nur eine vage und unbestimmte Definition zuläfst. Bei diesem von mir befolgten Gange, welcher sich nicht bemüht die inneren Kräfte, sondern nur die Gesetze der Naturerscheinungen kennen zu lernen, verlieren die sogenannten physicalischen Grundgesetze der Bewegung alles räthselhafte Ansehn; der Grundsatz des Beharrungsvermögens: „Jeder Körper verbleibt so lange im

*) Leider treffen diese und ähnliche Vorwürfe den Calcul, wie er ist, nur zu sehr. Wäre er aber, wie er sein sollte und könnte, so würde er eben so klar sein und wahrlich nicht mehr Abstractionen erfordern als irgend eine andere Theorie der Mathematik, oder irgend eine andere Behandlungsart ihrer Untersuchungen. Anm. d. Herausg.

Zustande der Ruhe oder der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung, als keine Kraft auf ihn wirkt," geht nun in eine blofse Definition über: „So lange ein Punct im Zustande der Ruhe oder der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung verharrt, sagen wir, dafs keine Kraft auf ihn wirke," u. s. w.; der Streit hinsichtlich des Maafses der Kräfte, ob sie den Geschwindigkeiten oder den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional seien, wird nun ganz umgangen, und selbst der Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte nimmt die Gestalt einer blofsen Definition an. An die Stelle des Unendlichkleinen habe ich überall die Betrachtung der ersten und letzten Verhältnisse treten lassen, dabei aber wo möglich noch mehr als Newton in seinen *Principiis* auch den Ausdruck des Unendlichkleinen zu vermeiden gesucht; ich glaubte auf diese Art dafür zu sorgen, dafs auch denen, welche noch nicht in Betrachtungen dieser Art geübt sind, die Anschauung keinen Augenblick verloren gehe. Dies Unternehmen ward am schwierigsten da, wo die an der Bewegung blofser Puncte entwickelten Gesetze auf die Bewegung fester Körper übergetragen werden sollten; denn da kommt aufser den bisher namhaft gemachten Streitpuncten auch noch der Kampf des atomistischen und dynamischen Systems zur Sprache, und die Schwierigkeit wird noch mehr dadurch vermehrt, dafs der Atomist seine Atome doch auch immer als Körper und nicht als geometrische Puncte zu betrachten und daher gewissermafsen sich selbst zu widersprechen gezwungen ist, der Dynamiker dagegen, bei der Übertragung der an discreten Puncten entwickelten Bewegungsgesetze auf die Bewegung stetig ausgefüllter Körper, einen Sprung in den Schlüssen unter keiner Bedingung vermeiden kann. Indem ich mich aufser Stande fühlte, mich mit den Widersprüchen des atomistischen Systems auszusöhnen, habe ich bei dem von mir befolgten Gange die erwähnten Sprünge nicht verheimlicht, und zu diesem Behufe eben so viele Annahmen, als Sprünge unvermeidlich waren, nach Art der physicalischen Annahmen des Archimedes, hingestellt, und mich hinterher in Anmerkungen auf die Erfahrung berufen, wodurch die aus jenen Annahmen gezogenen Schlüsse bestätigt werden; ich habe indessen, um auch hier die reingeometrische Methode möglichst zu erhalten, die Anzahl dieser Annahmen auf das möglichste Minimum reducirt.

Nach diesen Auseinandersetzungen über Tendenz und Methode des angekündigten Werks möchte über den Inhalt noch folgendes zu bemerken sein. Dem Titel entsprechend, wonach blofs Anfangsgründe der höheren Mechanik gegeben werden sollten, kann es keineswegs der Zweck dieses Werks sein, alles zu umfassen, was zur Statik und Mechanik gehört, oder ein geschlossenes Ganzes zu bilden; es sollte nur der Anfang eines Systems sein, welches sich hinterher in demselben Geiste wird weiter fortführen lassen. Überdies setzen diese Anfangsgründe sich noch engere Schranken, indem nemlich die Rücksicht der Anwendung auf Astronomie vorwaltet. Ich habe mich bei der Ausarbeitung im Ganzen von Laplace's Mechanik des Himmels leiten lassen. Bekanntlich umfafst dieses unsterbliche Werk in seinem ersten Buche die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung, welche in den folgenden Büchern speciell auf die Himmelskörper angewandt werden. Die im ersten Buche entwickelten allgemein-mechanischen Theorien auf reingeometrischem und streng synthetischem Wege herzuleiten, ist der Hauptzweck des angekündigten Werks, und es ist auf diese Art alles, was im ersten Buche des Laplace enthalten ist, mit Ausnahme dessen, was sich auf Flüssigkeiten bezieht, und überdies noch manches aus dem zweiten Buche und anderes, was sich nicht in Laplace's, sondern in Poisson's Mechanik befindet, in einem Umfange von etwa 30 Bogen in Octav, welche übrigens die Theorie des conischen Pendels und der rotatorischen Bewegung fester Körper noch vollständiger als Laplace und Poisson enthalten, dargestellt, so dafs dabei zum Verständnifs nichts als die Elemente des Euclides und einige Sätze des Archimedes und Appollonius, auf welche ich im Verlauf der Schrift öfters verweise, dagegen aber nichts von dem Theorem der neueren Arithmetik, Algebra und Analysis vorausgesetzt wird. Folgende Übersicht des Inhalts möchte

vielleicht das Publicum im Voraus über den im angekündigten Werke herrschenden Geist gründlicher belehren.

Das Werk zerfällt in 3 Theile, wovon die beiden ersteren, dem Umfange nach die kleineren, nur als vorbereitende betrachtet werden können. Der 1ste Theil ist betitelt: Vorbereitende arithmetische Lehren, der 2te Theil: Vorbereitende geometrische Lehren, der 3te: Mechanische Lehren. Die arithmetischen Lehren beziehen sich aber nicht auf Arithmetik im neueren Sinne des Worts, wonach alle Gröfsen als Zahlen, mit Rücksicht auf eine ein- für allemal festgesetzte Einheit, betrachtet werden müfsten, sondern gleichfalls auf die antike Methode, und sind nur darum von den geometrischen Lehren abgesondert worden, weil sie, wie die Sätze des 5ten Buchs des Euclides, Gröfsen überhaupt, und nicht räumliche Gröfsen allein betreffen. Für Gegenstände dieser Art ist die Benennung arithmetisch nicht ganz passend; doch habe ich bisher keine passendere kurze Benennung auffinden können. Der 1ste Abschnitt des 1sten Theils enthält eine Vervollständigung der Euclidischen Proportionslehre, welche als Grundlage der ganzen antiken Methode betrachtet werden kann. Der 2te Abschnitt behandelt die arithmetischen und geometrischen Reihen, sowohl begrenzte als unbegrenzte, und deren Summirung, soweit diese Theorie in der Mechanik angewandt wird. Der 3te Abschnitt betrachtet die convergirenden Reihen allgemeiner, besonders diejenigen, welche aus dem binomischen Lehrsatze hervorgehen, doch nur so weit, als späterhin in diesem Werke davon Gebrauch gemacht wird. Im 4ten Abschnitt, welcher überschrieben ist: Von den Facultäten, werden gewisse aus dem Binomial-Theorem hervorgehende merkwürdige Sätze auf antike Art bewiesen; übrigens sind beide Abschnitte, der 3te und 4te, hauptsächlich zur Begründung der Theorie des gemeinen und conischen Pendels und zur Herleitung der dabei vorkommenden unendlichen Reihen eingeschaltet. Die vorbereitenden geometrischen Lehren handeln im 1sten Abschnitt von den Tangenten, Normalen, Krümmungskreisen, Krümmungshalbmessern, Krümmungs-Ebenen, Evoluten und Evolventen bei Curven im Allgemeinen, von einfacher und von doppelter Krümmung; die Begriffe werden scharf bestimmt, und die merkwürdigsten Eigenschaften bewiesen; Lehren dieser Art können bei der festen Begründung der ersten mechanischen Grundbegriffe, Geschwindigkeit, Kraft, Zusammensetzung der Bewegungen, nicht aufser Acht gelassen werden. Der 2te Abschnitt betrachtet speciell die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte, und stützt sich vorzüglich auf das 5te Buch der *Conica* des Apollonius, welches von den Gröfsten und Kleinsten handelt; dieser Abschnitt wird hauptsächlich bei der Theorie der Centralbewegungen und bei der Entwickelung der Keplerschen Gesetze angewandt. Der 3te Abschnitt ist überschrieben: Vom Schwerpunct zwischen jeder beliebigen Anzahl Puncte im Raume. Der Schwerpunct wird hier reingeometrisch und ohne alle physicalische Beimischung definirt, und dann die von Laplace beschriebene Methode, den Schwerpunct zwischen jeder Anzahl gegebener Puncte in Beziehung auf 3 feste Ebenen oder in Beziehung auf 3 feste Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, zu bestimmen, auf antikem Wege bewiesen. Der 4te Abschnitt: Von den goniometrischen Linien, entwickelt hauptsächlich diejenigen Reihen für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen und für die Potenzen der Sinus, welche zum Beweise der unendlichen Reihe für die Zeit einer gemeinen oder conischen Pendelschwingung dienen, mit Vermeidung der Begriffe des Negativen und Imaginären; dieser Abschnitt stützt sich vorzüglich auf den 4ten Abschnitt des ersten Theils. Alsdann folgt noch ein kleiner, 5ter Abschnitt: Von der Cykloïde; es wird darin die Art, an einen gegebenen Punct der Cykloïde eine Tangente zu ziehen, ohne Beimischung des Unendlichkleinen bewiesen, zum Behuf der Theorie der Cykloïde als Tautochrona. Soviel von den vorbereitenden Abschnitten.

Der 1ste Abschnitt der eigentlich mechanischen Lehren begründet die Begriffe der Geschwindigkeit und der beschleunigenden und verzögernden Kraft bei einer Bewegung, insofern nicht darauf gesehen wird, ob sie geradlinig oder krummlinig ist.

Auch wird darin die vollständige Theorie der von der Schwere getriebenen, senkrecht abwärts fallenden und senkrecht aufwärts steigenden Körper entwickelt. Im 2ten Abschnitt wird die Begriffsbestimmung der Kräfte insofern vervollständigt, als nun auch auf die Zusammensetzungen der Bewegungen Rücksicht genommen wird. Der 3te Abschnitt, von Centralbewegungen, beweist die 3 Keplerschen Gesetze und ihre Umkehrungen; dann wird das *Problema duorum corporum* behandelt, die Bestimmung der Bahnen zweier sich gegenseitig nach dem Gravitationsgesetz anziehender Puncte; zugleich wird diese Theorie insofern erweitert, als nun sogleich das Theorem von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpuncts zwischen einer beliebigen Anzahl sich gegenseitig anziehender Puncte daran geknüpft wird. Zur Begründung des Satzes, dafs die Keplerschen Gesetze nicht für blofse Puncte allein, sondern auch für Kugeln von gleichförmiger Dichtigkeit oder für solche Kugeln gelten, deren Dichtigkeit in gleichen Entfernungen vom Mittelpuncte allemal gleich ist, dient der 4te Abschnitt; weil aber die Betrachtung fest mit einander verbundener Puncte, welche durch Anziehen und Abstofsen auf einander wirken, bis dahin noch nicht vorgekommen ist, so beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Betrachtung des Falls, wo vorausgesetzt wird, dafs eine Kugel einen blofsen Punct anzieht. Der 5te Abschnitt handelt von Bewegungeu auf vorgeschriebenem Wege, sowohl im Allgemeinen, als auch speciell und mit möglichster Ausführlichkeit vom gemeinen und conischen Pendel, überhaupt von der Bewegung eines von der Schwere getriebenen Puncts in einer vorgeschriebenen Kugelfläche oder Cykloïde, wobei auch die für diese Bewegungen geltenden unendlichen Reihen auf antikem Wege bewiesen werden. Vom 6ten Abschnitt an beginnt die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung eines Systems von Puncten, welche nach einem beliebigen Gesetz, doch mit Beobachtung des Princips der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, auf einander wirken. Voran steht das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten; ich habe mich bemüht, dieses, so wie die Umkehrung desselben, in antiker Form auszudrücken und nach antiker Methode zu beweisen. Daran knüpft sich die Theorie des einarmigen, zweiarmigen und des Winkelhebels, dann die des Gleichgewichts eines Systems fest mit einander verbundener Puncte, und im 7ten Abschnitt die des Gleichgewichts eines festen Körpers, und sodann im 8ten Abschnitt die beim 4ten Abschnitt noch rückständig gelassene Untersuchung über die Gravitation für den Fall, wo beide Körper, der anziehende und angezogene Kugeln sind. Der 9te Abschnitt entspricht dem 5ten Capitel im 1sten Buch des Laplace, und entwickelt die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines Systems von Körpern, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Winkelflächen; auch wird die Theorie der unveränderlichen Ebene in möglichster Vollständigkeit und mit steter Festhaltung der geometrischen Anschauung entwickelt. Der 10te Abschnitt endlich schliefst sich an das 7te Capitel des 1sten Buchs des Laplace; und enthält die Theorie der drehenden Bewegung der festen Körper, hauptsächlich für den Fall, wenn auf einen solchen Körper entweder gar keine äufseren Kräfte oder nur parallele Kräfte, wie die Schwere, wirken. Mit der Bewegung um eine feste Axe, weil ihre Theorie die leichtere ist, wird der Anfang gemacht, und dabei die Theorie des zusammengesetzten Pendels gegeben. Der Schwingungspunct bei einem zusammengesetzten Pendel wird zur Begründung des Begriffs des Moments der Trägheit eines Körpers im Allgemeinen benutzt, welcher Begriff, wenn man die Betrachtung des Unendlichkleinen oder das atomistische System umgehen will, schwierig ist (eine Schwierigkeit, die sich übrigens auch bei der Begriffsbestimmung des Schwerpuncts eines Körpers findet). Die Definition des Moments der Trägheit eines Körpers wird, so wie die Definition des Schwerpuncts eines Körpers, nicht reingeometrisch, sondern mit Benutzung statischer und mechanischer Hülfsbegriffe, gegeben; hinterher folgt indessen ein Versuch, das Moment der Trägheit bei einer bestimmten Art von Körpern, nemlich bei Kugeln von gleichförmiger Dichtigkeit (welche auch Laplace im 1. Buch seiner Mechanik speciell betrachtet), vermittelst eines der Exhaustionsmethode der Alten ähnlichen Verfahrens zu bestimmen. Daran schliefst sich denn die Begriffsbestimmung der Haupt-

Axen, unter Grundlegung des Begriffs des Moments der Trägheit, übrigens reingeometrisch entwickelt. Auch werden die merkwürdigsten geometrischen Eigenschaften der Haupt-Axen, namentlich der Zusammenhang derselben mit den gröfsten und kleinsten Momenten der Trägheit, bewiesen. Nun beginnt die Untersuchung über die Bewegung fester Körper oder fester Systeme von Puncten, für den Fall, wenn nur Ein Punct oder gar kein Punct fest ist, und es werden die merkwürdigsten Gesetze der drehenden Bewegung in möglichster Vollständigkeit und Anschaulichkeit hergeleitet. Voran steht der Fall, wo ein Körper sich um eine Haupt-Axe dreht; dann folgt die Betrachtung des Falls, wo ein Körper unzählige in Einer Ebene liegende Haupt-Axen hat, und sich um eine von den Haupt-Axen verschiedene Axe dreht (von dieser Bewegung wird eine vollständige Theorie gegeben); endlich wird die Bewegung für den Fall bestimmt, wo der sich drehende Körper nur 3 Haupt-Axen hat, und sich um eine von den Haupt-Axen verschiedene Axe dreht. Von dieser letzteren Bewegung wird zwar keine vollständige Theorie gegeben (welche auch selbst bei Anwendung des höheren Calculs, wenn man nicht bei Annäherungen stehen bleiben will, fast mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden ist); aber es werden auch die dabei vorkommenden periodischen Schwankungen der augenblicklichen Umdrehungs-Axe um die Haupt-Axe des gröfsten oder kleinsten Moments und um die Axe der unveränderlichen Ebene, so wie die Bedingungen des sicheren und unsicheren Zustandes, in möglichster Vollständigkeit entwickelt, und zuletzt gezeigt, dafs die Bewegung nach Ablauf einer Periode allemal genau wie von vorn anfängt.

Inwiefern die hier angekündigte Arbeit, mit Beobachtung der antiken Methode, auf schwierigere Gegenstände der Mechanik des Himmels, auf das Problem der 3 Körper und den Perturbationscalcul, ausgedehnt werden kann, kann nur die Zeit lehren.

Einige neuere mathematische Schriften sind folgende:

C. J. Gaufs, *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Goett.* 1830. eine wichtige, ihres berühmten Verfassers würdige Schrift, welche ihren Gegenstand in grofser Allgemeinheit umfafst, so dafs sie die Laplacesche Theorie der Capillarität gleichsam als Corollarium enthält.

J. J. Caspari, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Coblenz 1829—30. Dieses Lehrbuch zeichnet sich durch die Menge der Übungs-Beispiele, durch Streben nach System und durch Deutlichkeit aus.

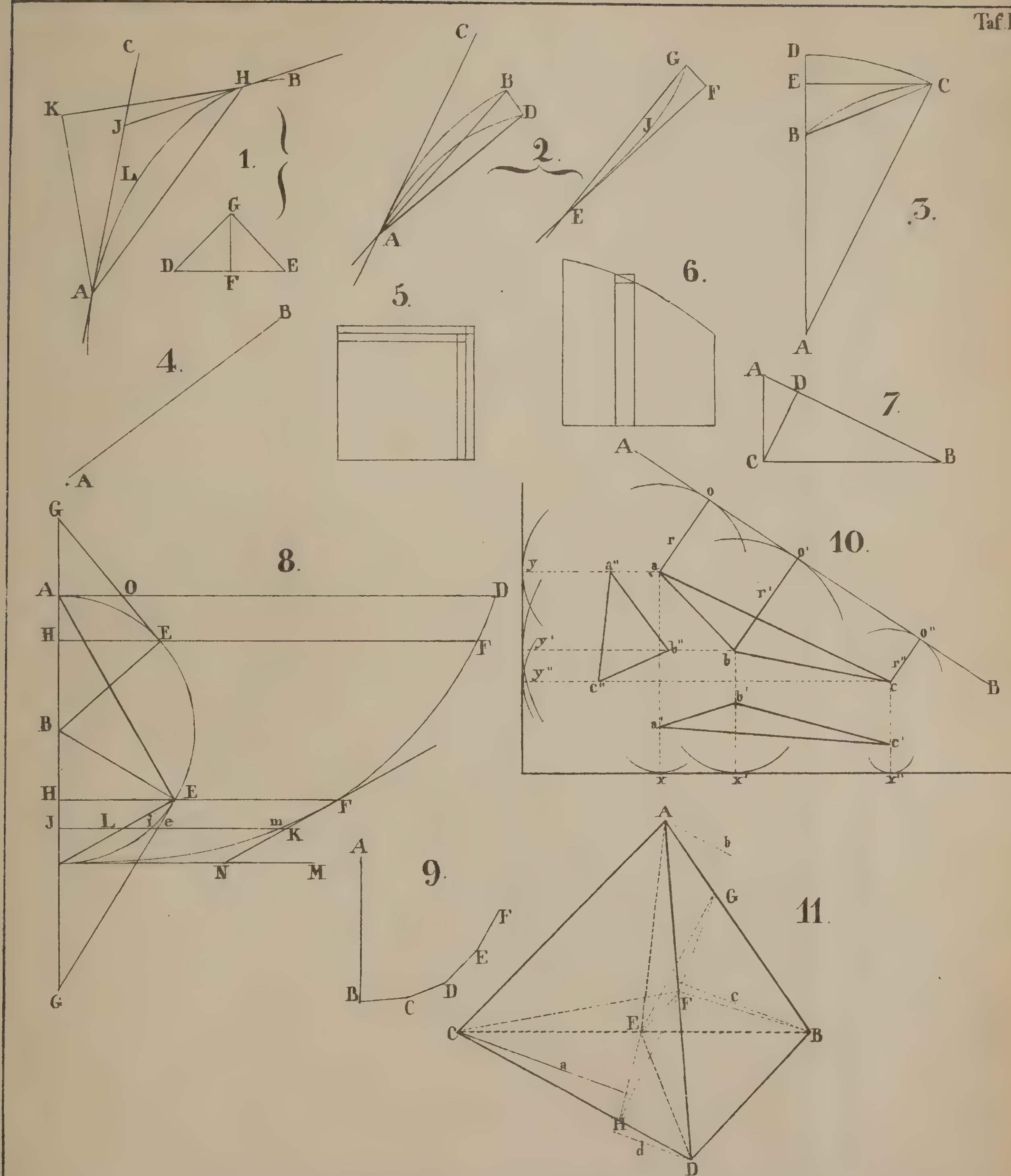
J. G. Hartmann, Elemente der analytischen Geometrie, Berlin 1830. Der bis jetzt erschienene erste Band dieser Schrift enthält zwar nur die ersten Elemente der Analysis der geraden Linie und der Linien zweiter Ordnung, zeichnet sich aber durch Einfachheit und Natürlichkeit aus, und ist deshalb den Lernenden zu empfehlen.

A. M. Legendre *Theorie des nombres; troisième édition, Paris chez Didot*, 1830. Diese neue Auflage ist fast doppelt so stark als die früheren, und daher fast als ein neues Werk des würdigen Veteranen der mathematischen Literatur zu betrachten.

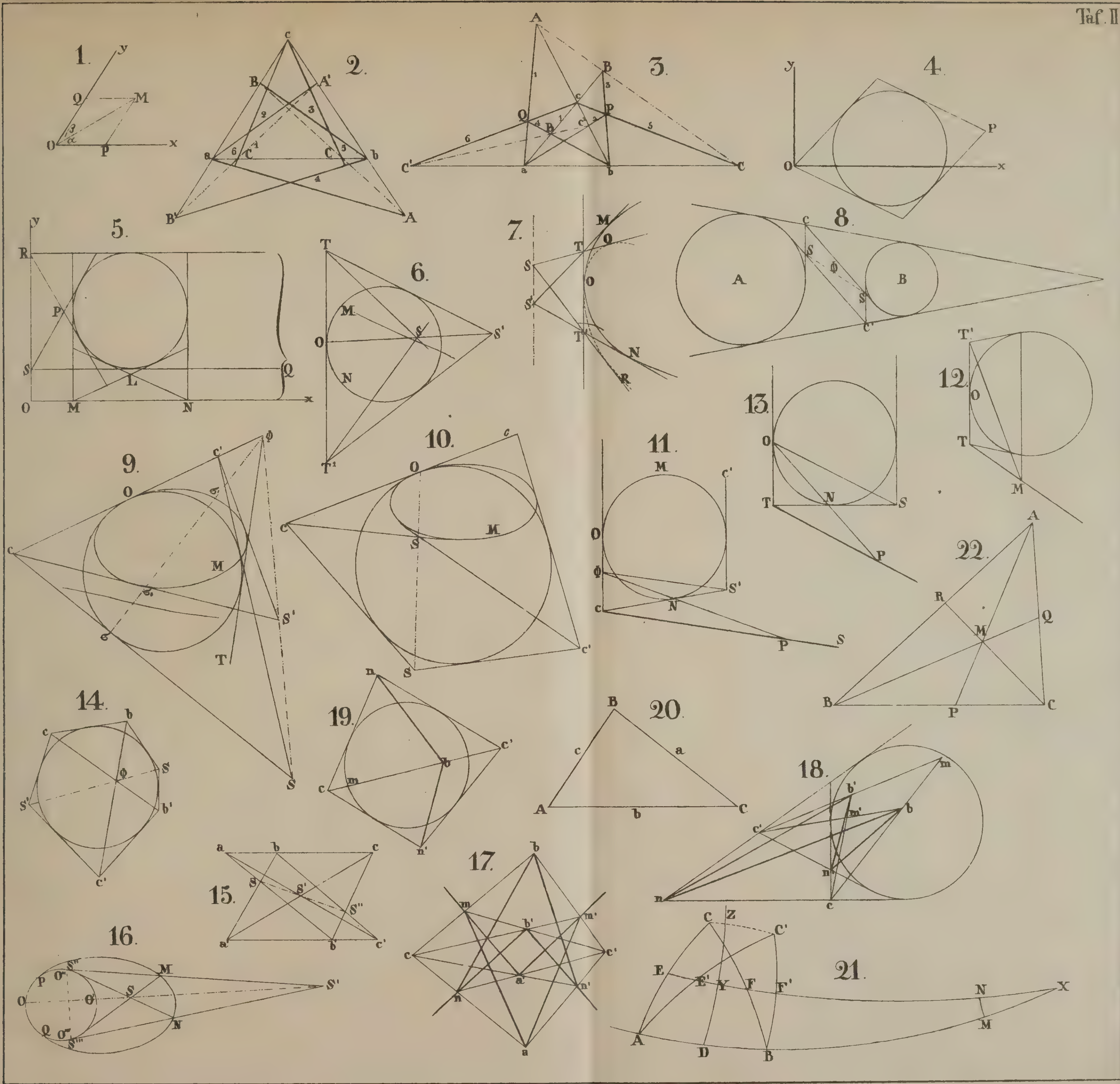
S. D. Poisson *sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés;* enthält eine tiefe Untersuchung der schwierigen Aufgabe von Mittheilung der Bewegung in elastischen Flüssigkeiten.

Von Lacroix *traité élém. d'arithm.* ist die 18te Auflage; von dessen *élém. de géom.* die 14te Auflage; von dessen *traité élém. du calc. diff. et int.* die 4te Auflage; von Bourdon *élém. d'arithm.* die 7te Auflage, und von dessen *élémens d'algèbre* die 5te Auflage erschienen.

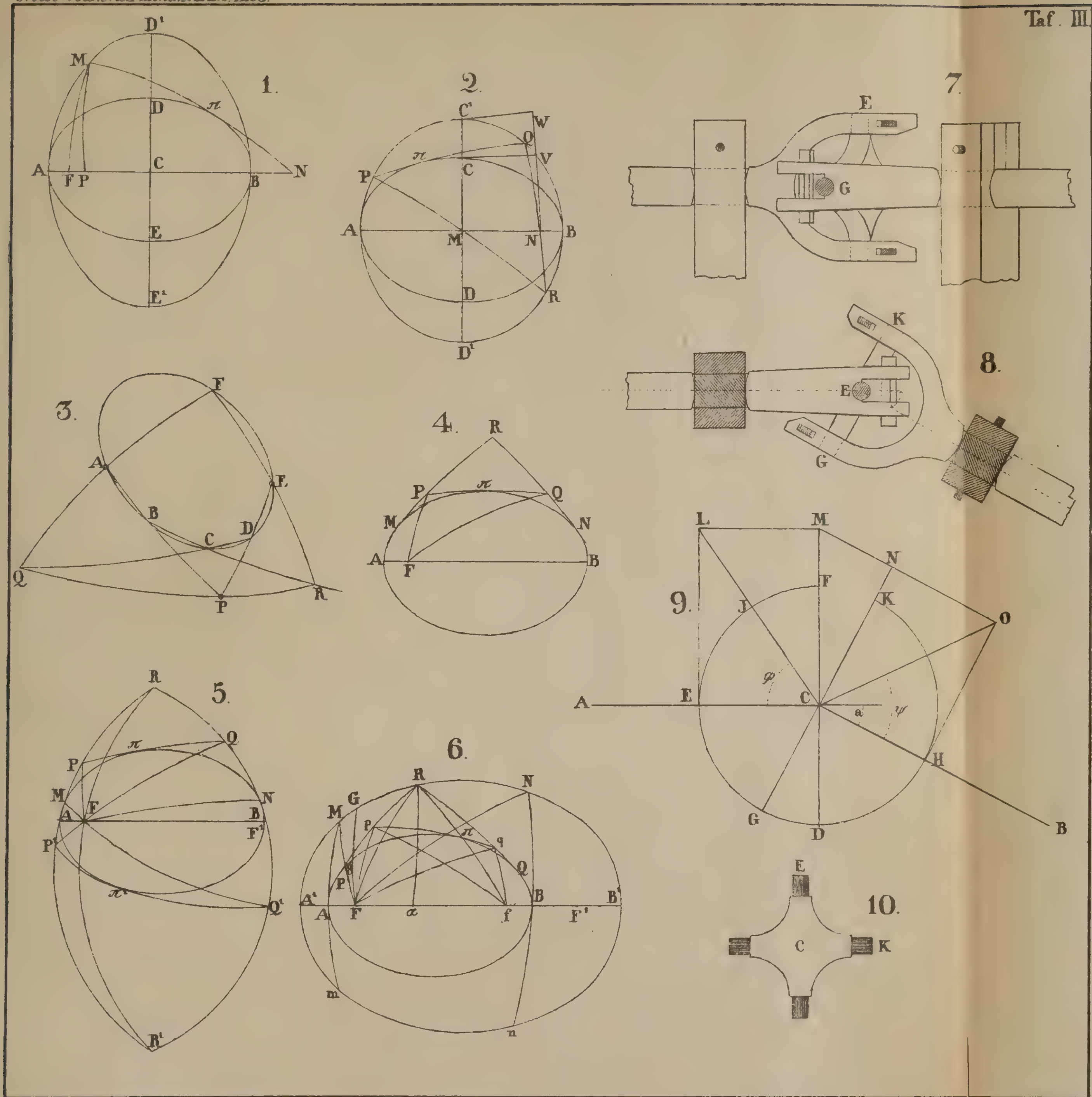
Die *Annales de mathématiques* von Gergonne befinden sich jetzt im 21sten Bande; von der *Correspondance mathématique et physique* von Quetelet ist der 6te Band, von der Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik der 7te Band vollendet, und das *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* von Ferussac befindet sich im 13ten Bande. Von Cauchy *exercices de mathématiques* sind jetzt in allem 50 Hefte erschienen.

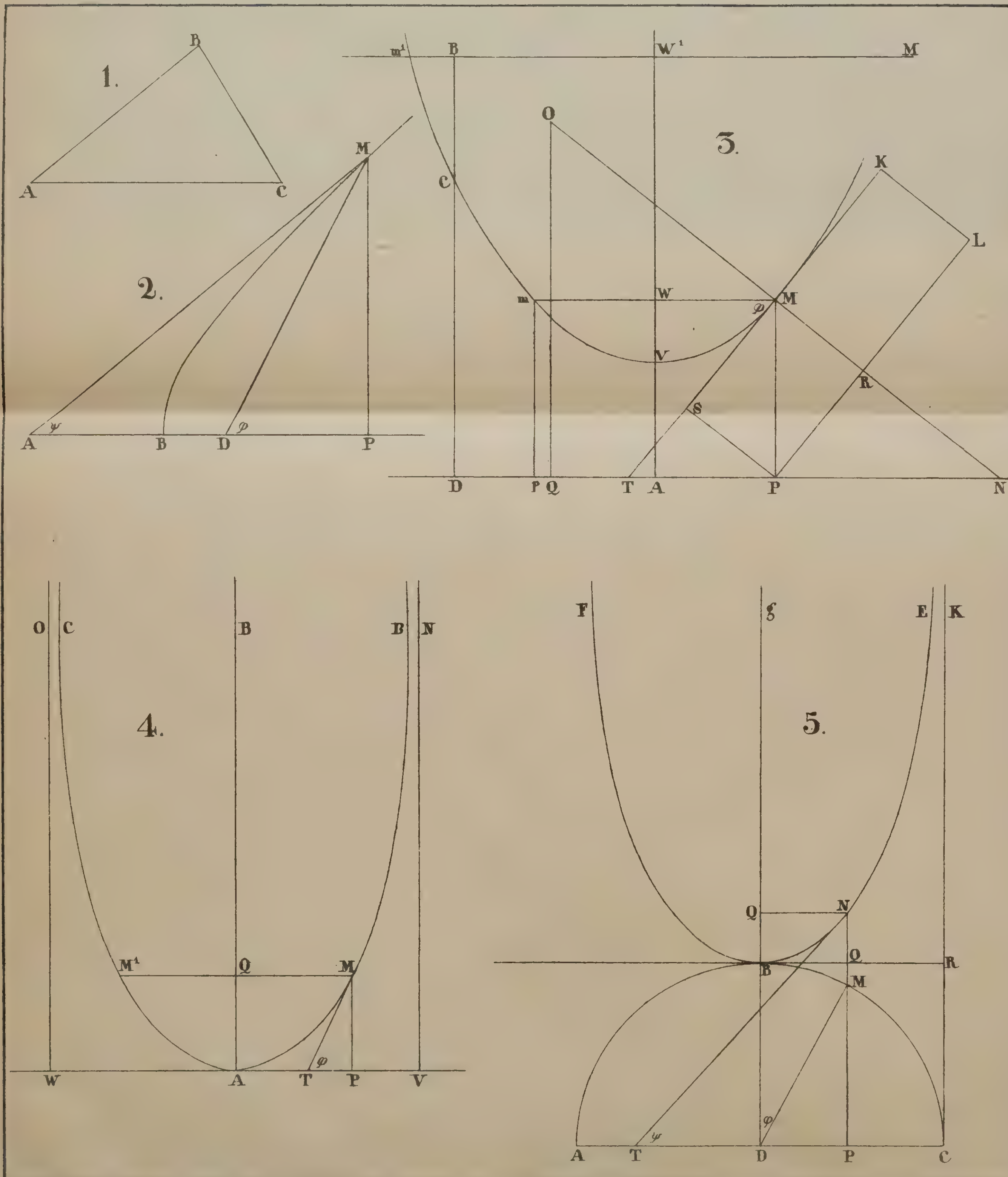

Taf. I.
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

Taf. II



Taf. III.




1.
2.
3.
4.
5.
A
B
C
D
P
M
O
K
L
R
S
T
N
V
W
Q
E
F